

7.9 2次式の根号を含む式の積分法

正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2 - x^2}$ で表される関数を積分する.

正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2 - x^2}$ で表される関数を積分する．無理式 $\sqrt{a^2 - x^2}$ の値が実数である範囲で考えるので， $a^2 - x^2 \geq 0$ ， $x^2 - a^2 \leq 0$ ， $(x + a)(x - a) \leq 0$ ， $-a \leq x \leq a$ ．

正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2 - x^2}$ で表される関数を積分する．無理式 $\sqrt{a^2 - x^2}$ の値が実数である範囲で考えるので， $a^2 - x^2 \geq 0$ ， $x^2 - a^2 \leq 0$ ， $(x+a)(x-a) \leq 0$ ， $-a \leq x \leq a$ ． $-1 \leq \frac{x}{a} \leq 1$ なので $\sin^{-1} \frac{x}{a}$ の値がある． $-1 \leq X \leq 1$ である各実数 X に対して $\sin^{-1} X$ の値がある．

正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2 - x^2}$ で表される関数を積分する. 無理式 $\sqrt{a^2 - x^2}$ の値が実数である範囲で考えるので, $a^2 - x^2 \geq 0$, $x^2 - a^2 \leq 0$, $(x+a)(x-a) \leq 0$, $-a \leq x \leq a$. $-1 \leq \frac{x}{a} \leq 1$ なので $\sin^{-1} \frac{x}{a}$ の値がある. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{a}$ とおく.

正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2 - x^2}$ で表される関数を積分する．無理式 $\sqrt{a^2 - x^2}$ の値が実数である範囲で考えるので， $a^2 - x^2 \geq 0$ ， $x^2 - a^2 \leq 0$ ， $(x+a)(x-a) \leq 0$ ， $-a \leq x \leq a$ ． $-1 \leq \frac{x}{a} \leq 1$ なので $\sin^{-1} \frac{x}{a}$ の値がある．変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{a}$ とおく． $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a}$ なので， $x = a \sin t$ ．

正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2 - x^2}$ で表される関数を積分する. 無理式 $\sqrt{a^2 - x^2}$ の値が実数である範囲で考えるので, $a^2 - x^2 \geq 0$, $x^2 - a^2 \leq 0$, $(x+a)(x-a) \leq 0$, $-a \leq x \leq a$. $-1 \leq \frac{x}{a} \leq 1$ なので $\sin^{-1} \frac{x}{a}$

の値がある. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{a}$ とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a}$ なので, $x = a \sin t$. $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ より $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$ なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - (a \sin t)^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = \sqrt{a^2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \\ &= a \sqrt{\cos^2 t} .\end{aligned}$$

正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2 - x^2}$ で表される関数を積分する．無理式 $\sqrt{a^2 - x^2}$ の値が実数である範囲で考えるので， $a^2 - x^2 \geq 0$ ， $x^2 - a^2 \leq 0$ ， $(x+a)(x-a) \leq 0$ ， $-a \leq x \leq a$ ． $-1 \leq \frac{x}{a} \leq 1$ なので $\sin^{-1} \frac{x}{a}$

の値がある．変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{a}$ とおく． $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a}$ なので， $x = a \sin t$ ． $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ より $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$ なので，

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - (a \sin t)^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = \sqrt{a^2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \\ &= a \sqrt{\cos^2 t} .\end{aligned}$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{a} \leq \frac{\pi}{2}$ なので $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ， $-1 \leq X \leq 1$ である各実数 X について $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} X \leq \frac{\pi}{2}$ ．

正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2 - x^2}$ で表される関数を積分する．無理式 $\sqrt{a^2 - x^2}$ の値が実数である範囲で考えるので， $a^2 - x^2 \geq 0$ ， $x^2 - a^2 \leq 0$ ， $(x+a)(x-a) \leq 0$ ， $-a \leq x \leq a$ ． $-1 \leq \frac{x}{a} \leq 1$ なので $\sin^{-1} \frac{x}{a}$

の値がある．変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{a}$ とおく． $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a}$ なので， $x = a \sin t$ ． $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ より $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$ なので，

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - (a \sin t)^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = \sqrt{a^2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \\ &= a \sqrt{\cos^2 t} .\end{aligned}$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{a} \leq \frac{\pi}{2}$ なので $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ，よって $\cos t \geq 0$ なので， $\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$ ．

正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2 - x^2}$ で表される関数を積分する．無理式 $\sqrt{a^2 - x^2}$ の値が実数である範囲で考えるので， $a^2 - x^2 \geq 0$ ， $x^2 - a^2 \leq 0$ ， $(x+a)(x-a) \leq 0$ ， $-a \leq x \leq a$ ． $-1 \leq \frac{x}{a} \leq 1$ なので $\sin^{-1} \frac{x}{a}$

の値がある．変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{a}$ とおく． $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a}$ なので， $x = a \sin t$ ． $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ より $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$ なので，

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - (a \sin t)^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = \sqrt{a^2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \\ &= a \sqrt{\cos^2 t} .\end{aligned}$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{a} \leq \frac{\pi}{2}$ なので $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ，よって $\cos t \geq 0$ なので， $\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$ ．これより

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t .$$

正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2 - x^2}$ で表される関数を積分する．無理式 $\sqrt{a^2 - x^2}$ の値が実数である範囲で考えるので， $a^2 - x^2 \geq 0$ ， $x^2 - a^2 \leq 0$ ， $(x+a)(x-a) \leq 0$ ， $-a \leq x \leq a$ ． $-1 \leq \frac{x}{a} \leq 1$ なので $\sin^{-1} \frac{x}{a}$

の値がある．変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{a}$ とおく． $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a}$ なので， $x = a \sin t$ ． $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ より $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$ なので，

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - (a \sin t)^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = \sqrt{a^2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \\ &= a \sqrt{\cos^2 t} .\end{aligned}$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{a} \leq \frac{\pi}{2}$ なので $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ，よって $\cos t \geq 0$ なので， $\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$ ．これより

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t .$$

また， $x = a \sin t$ より $\frac{dx}{dt} = a \cos t$ なので， $dx = (a \cos t) dt$.

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$ を計算する.

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{9-x^2}$ は実数なので, $9-x^2 \geq 0$, $x^2-9 \leq 0$, $(x+3)(x-3) \leq 0$,
 $-3 \leq x \leq 3$.

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{9-x^2}$ は実数なので, $9-x^2 \geq 0$, $x^2-9 \leq 0$, $(x+3)(x-3) \leq 0$,
 $-3 \leq x \leq 3$.

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{9-x^2}$ は実数なので, $9-x^2 \geq 0$, $x^2-9 \leq 0$, $(x+3)(x-3) \leq 0$,
 $-3 \leq x \leq 3$. $-1 \leq \frac{x}{3} \leq 1$ なので $\sin^{-1} \frac{x}{3}$ の値がある. $-1 \leq X \leq 1$ である

各実数 X について $\sin^{-1} X$ の値がある.

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{9-x^2}$ は実数なので, $9-x^2 \geq 0$, $x^2-9 \leq 0$, $(x+3)(x-3) \leq 0$,
 $-3 \leq x \leq 3$. $-1 \leq \frac{x}{3} \leq 1$ なので $\sin^{-1} \frac{x}{3}$ の値がある. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{3}$

($-3 \leq x \leq 3$) とおく.

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{9-x^2}$ は実数なので, $9-x^2 \geq 0$, $x^2-9 \leq 0$, $(x+3)(x-3) \leq 0$,
 $-3 \leq x \leq 3$. $-1 \leq \frac{x}{3} \leq 1$ なので $\sin^{-1} \frac{x}{3}$ の値がある. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{3}$

($-3 \leq x \leq 3$) とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{3}\right) = \frac{x}{3}$ なので $x = 3 \sin t$.

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{9-x^2}$ は実数なので, $9-x^2 \geq 0$, $x^2-9 \leq 0$, $(x+3)(x-3) \leq 0$,
 $-3 \leq x \leq 3$. $-1 \leq \frac{x}{3} \leq 1$ なので $\sin^{-1} \frac{x}{3}$ の値がある. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{3}$

($-3 \leq x \leq 3$) とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{3}\right) = \frac{x}{3}$ なので $x = 3 \sin t$.

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{3} \leq \frac{\pi}{2}$ なので $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, $-1 \leq X \leq 1$ である各実数 X

について $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} X \leq \frac{\pi}{2}$.

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{9-x^2}$ は実数なので, $9-x^2 \geq 0$, $x^2-9 \leq 0$, $(x+3)(x-3) \leq 0$,
 $-3 \leq x \leq 3$. $-1 \leq \frac{x}{3} \leq 1$ なので $\sin^{-1} \frac{x}{3}$ の値がある. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{3}$

($-3 \leq x \leq 3$) とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{3}\right) = \frac{x}{3}$ なので $x = 3 \sin t$.

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{3} \leq \frac{\pi}{2}$ なので $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, よって $\cos t \geq 0$ なので,

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{9-x^2}$ は実数なので, $9-x^2 \geq 0$, $x^2-9 \leq 0$, $(x+3)(x-3) \leq 0$,
 $-3 \leq x \leq 3$. $-1 \leq \frac{x}{3} \leq 1$ なので $\sin^{-1} \frac{x}{3}$ の値がある. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{3}$

($-3 \leq x \leq 3$) とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{3}\right) = \frac{x}{3}$ なので $x = 3 \sin t$.

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{3} \leq \frac{\pi}{2}$ なので $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, よって $\cos t \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{9-x^2} &= \sqrt{9-(3 \sin t)^2} = \sqrt{9-9 \sin^2 t} = \sqrt{9} \sqrt{1-\sin^2 t} = 3\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 3 \cos t .\end{aligned}$$

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{9-x^2}$ は実数なので, $9-x^2 \geq 0$, $x^2-9 \leq 0$, $(x+3)(x-3) \leq 0$,
 $-3 \leq x \leq 3$. $-1 \leq \frac{x}{3} \leq 1$ なので $\sin^{-1} \frac{x}{3}$ の値がある. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{3}$

($-3 \leq x \leq 3$) とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{3}\right) = \frac{x}{3}$ なので $x = 3 \sin t$.

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{3} \leq \frac{\pi}{2}$ なので $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, よって $\cos t \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{9-x^2} &= \sqrt{9-(3 \sin t)^2} = \sqrt{9-9 \sin^2 t} = \sqrt{9} \sqrt{1-\sin^2 t} = 3\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 3 \cos t .\end{aligned}$$

$x = 3 \sin t$ より $\frac{dx}{dt} = 3 \cos t$ なので, $dx = 3 \cos t dt$.

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{9-x^2}$ は実数なので, $9-x^2 \geq 0$, $x^2-9 \leq 0$, $(x+3)(x-3) \leq 0$,
 $-3 \leq x \leq 3$. $-1 \leq \frac{x}{3} \leq 1$ なので $\sin^{-1} \frac{x}{3}$ の値がある. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{3}$

($-3 \leq x \leq 3$) とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{3}\right) = \frac{x}{3}$ なので $x = 3 \sin t$.

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{3} \leq \frac{\pi}{2}$ なので $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, よって $\cos t \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{9-x^2} &= \sqrt{9-(3 \sin t)^2} = \sqrt{9-9 \sin^2 t} = \sqrt{9} \sqrt{1-\sin^2 t} = 3\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 3 \cos t.\end{aligned}$$

$x = 3 \sin t$ より $\frac{dx}{dt} = 3 \cos t$ なので, $dx = 3 \cos t dt$. $x = 0$ のとき

$t = \sin^{-1} 0 = 0$. $x = 3$ のとき $t = \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$.

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{9-x^2}$ は実数なので, $9-x^2 \geq 0$, $x^2-9 \leq 0$, $(x+3)(x-3) \leq 0$,
 $-3 \leq x \leq 3$. $-1 \leq \frac{x}{3} \leq 1$ なので $\sin^{-1} \frac{x}{3}$ の値がある. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{3}$

($-3 \leq x \leq 3$) とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{3}\right) = \frac{x}{3}$ なので $x = 3 \sin t$.

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{3} \leq \frac{\pi}{2}$ なので $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, よって $\cos t \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{9-x^2} &= \sqrt{9-(3 \sin t)^2} = \sqrt{9-9 \sin^2 t} = \sqrt{9} \sqrt{1-\sin^2 t} = 3\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 3 \cos t.\end{aligned}$$

$x = 3 \sin t$ より $\frac{dx}{dt} = 3 \cos t$ なので, $dx = 3 \cos t dt$. $x = 0$ のとき

$t = \sin^{-1} 0 = 0$. $x = 3$ のとき $t = \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$. よって

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos t \cdot 3 \cos t dt = 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$$

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos t \cdot 3 \cos t dt = 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$$

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos t \cdot 3 \cos t dt = 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt$$

$$\cos^2 t = \frac{1}{2} (1 + \cos 2t)$$

$$\begin{aligned}\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos t \cdot 3 \cos t dt = 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{9}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{9}{2} \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} - 0 \right) \\ &= \frac{9\pi}{4} .\end{aligned}$$

終

問7.9.1 定積分 $\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx$ を計算せよ.

$4-x^2 \geq 0$ なので $1 \leq x \leq 2$. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{2}$ ($1 \leq x \leq 2$)

とおく. $\sin t = \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$ なので $x = 2 \sin t$. $1 \leq x \leq 2$ より

$\cos t \geq 0$ なので,

$$\sqrt{4-x^2} = 2 \cos t$$

$x = 1$ より $\frac{dx}{dt} = 2 \cos t$ なので $dx = 2 \cos t dt$. $x = 1$ のとき $t = \frac{\pi}{6}$.

$x = 2$ のとき $t = \frac{\pi}{4}$. よって

$$\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos t \cdot 2 \cos t dt = 4 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt$$

問7.9.1 定積分 $\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx$ を計算せよ.

$4-x^2 \geq 0$ なので $-2 \leq x \leq 2$. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{2}$ ($-2 \leq x \leq 2$)

とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$ なので $x = 2 \sin t$. $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ より

$\cos t \geq 0$ なので,

$$\sqrt{4-x^2} =$$

$x =$ より $\frac{dx}{dt} =$ なので $dx =$ dt . $x = 1$ のとき $t =$.

$x = 2$ のとき $t =$. よって

$$\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx =$$

問7.9.1 定積分 $\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx$ を計算せよ.

$4-x^2 \geq 0$ なので $-2 \leq x \leq 2$. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{2}$ ($-2 \leq x \leq 2$)

とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$ なので $x = 2 \sin t$. $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ より

$\cos t \geq 0$ なので,

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(2\sin t)^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\sqrt{\cos^2 t} = 2\cos t.$$

$x =$ より $\frac{dx}{dt} =$ なので $dx =$ dt . $x = 1$ のとき $t =$.

$x = 2$ のとき $t =$. よって

$$\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx =$$

問7.9.1 定積分 $\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx$ を計算せよ.

$4-x^2 \geq 0$ なので $-2 \leq x \leq 2$. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{2}$ ($-2 \leq x \leq 2$)

とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$ なので $x = 2 \sin t$. $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ より

$\cos t \geq 0$ なので,

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(2\sin t)^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\sqrt{\cos^2 t} = 2\cos t.$$

$x = 2 \sin t$ より $\frac{dx}{dt} = 2 \cos t$ なので $dx = 2 \cos t dt$. $x = 1$ のとき $t = \frac{\pi}{6}$.

$x = 2$ のとき $t = \frac{\pi}{2}$. よって

$$\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx =$$

問7.9.1 定積分 $\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx$ を計算せよ.

$4-x^2 \geq 0$ なので $-2 \leq x \leq 2$. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{2}$ ($-2 \leq x \leq 2$)

とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$ なので $x = 2 \sin t$. $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ より

$\cos t \geq 0$ なので,

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(2\sin t)^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\sqrt{\cos^2 t} = 2\cos t.$$

$x = 2 \sin t$ より $\frac{dx}{dt} = 2 \cos t$ なので $dx = 2 \cos t dt$. $x = 1$ のとき $t = \frac{\pi}{6}$.

$x = 2$ のとき $t = \frac{\pi}{2}$. よって

$$\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos t \cdot 2 \cos t dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 t dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2(1 + \cos 2t) dt$$

$$= [2t + \sin 2t]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi + \sin \pi - \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

終

例 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx$ を計算する.

例 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{6-3x^2}$ は実数なので, $6-3x^2 \geq 0$, $x^2-2 \leq 0$, $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \leq 0$, $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

例 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{6-3x^2}$ は実数なので, $6-3x^2 \geq 0$, $x^2-2 \leq 0$, $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \leq 0$, $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

例 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{6-3x^2}$ は実数なので, $6-3x^2 \geq 0$, $x^2-2 \leq 0$, $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \leq 0$, $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}$ ($-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) とおく.

例 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{6-3x^2}$ は実数なので, $6-3x^2 \geq 0$, $x^2-2 \leq 0$, $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \leq 0$, $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}$ ($-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$) とおく.

$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ より $-1 \leq \frac{x}{\sqrt{2}} \leq 1$ なので $\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}$ の値がある.

例 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{6-3x^2}$ は実数なので, $6-3x^2 \geq 0$, $x^2-2 \leq 0$, $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \leq 0$, $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}$ ($-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$) とおく.

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x}{\sqrt{2}}$ なので $x = \sqrt{2} \sin t$.

例 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{6-3x^2}$ は実数なので, $6-3x^2 \geq 0$, $x^2-2 \leq 0$, $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \leq 0$, $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}$ ($-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$) とおく.

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x}{\sqrt{2}}$ なので $x = \sqrt{2} \sin t$. $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} \leq \frac{\pi}{2}$

なので $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, $-1 \leq X \leq 1$ である各実数 X について

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} X \leq \frac{\pi}{2}$.

例 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{6-3x^2}$ は実数なので, $6-3x^2 \geq 0$, $x^2-2 \leq 0$, $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \leq 0$, $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}$ ($-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$) とおく.

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x}{\sqrt{2}}$ なので $x = \sqrt{2} \sin t$. $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} \leq \frac{\pi}{2}$

なので $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, よって $\cos t \geq 0$ なので,

例 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{6-3x^2}$ は実数なので, $6-3x^2 \geq 0$, $x^2-2 \leq 0$, $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \leq 0$, $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}$ ($-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$) とおく.

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x}{\sqrt{2}}$ なので $x = \sqrt{2} \sin t$. $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} \leq \frac{\pi}{2}$

なので $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, よって $\cos t \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{6-3x^2} &= \sqrt{6-3(\sqrt{2} \sin t)^2} = \sqrt{6-6\sin^2 t} = \sqrt{6} \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{6} \sqrt{\cos^2 t} \\ &= \sqrt{6} \cos t.\end{aligned}$$

例 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{6-3x^2}$ は実数なので, $6-3x^2 \geq 0$, $x^2-2 \leq 0$, $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \leq 0$, $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}$ ($-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$) とおく.

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x}{\sqrt{2}}$ なので $x = \sqrt{2} \sin t$. $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} \leq \frac{\pi}{2}$

なので $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, よって $\cos t \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{6-3x^2} &= \sqrt{6-3(\sqrt{2} \sin t)^2} = \sqrt{6-6\sin^2 t} = \sqrt{6} \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{6} \sqrt{\cos^2 t} \\ &= \sqrt{6} \cos t.\end{aligned}$$

$x = \sqrt{2} \sin t$ より $\frac{dx}{dt} = \sqrt{2} \cos t$ なので $dx = \sqrt{2} \cos t dt$.

例 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{6-3x^2}$ は実数なので, $6-3x^2 \geq 0$, $x^2-2 \leq 0$, $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \leq 0$, $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}$ ($-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$) とおく.

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x}{\sqrt{2}}$ なので $x = \sqrt{2} \sin t$. $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} \leq \frac{\pi}{2}$

なので $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, よって $\cos t \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{6-3x^2} &= \sqrt{6-3(\sqrt{2} \sin t)^2} = \sqrt{6-6\sin^2 t} = \sqrt{6} \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{6} \sqrt{\cos^2 t} \\ &= \sqrt{6} \cos t.\end{aligned}$$

$x = \sqrt{2} \sin t$ より $\frac{dx}{dt} = \sqrt{2} \cos t$ なので $dx = \sqrt{2} \cos t dt$. $x = 0$ のとき

$t = \sin^{-1} 0 = 0$. $x = 1$ のとき $t = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$.

例 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{6-3x^2}$ は実数なので, $6-3x^2 \geq 0$, $x^2-2 \leq 0$, $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \leq 0$, $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}$ ($-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$) とおく.

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x}{\sqrt{2}}$ なので $x = \sqrt{2} \sin t$. $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} \leq \frac{\pi}{2}$

なので $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, よって $\cos t \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{6-3x^2} &= \sqrt{6-3(\sqrt{2} \sin t)^2} = \sqrt{6-6\sin^2 t} = \sqrt{6} \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{6} \sqrt{\cos^2 t} \\ &= \sqrt{6} \cos t.\end{aligned}$$

$x = \sqrt{2} \sin t$ より $\frac{dx}{dt} = \sqrt{2} \cos t$ なので $dx = \sqrt{2} \cos t dt$. $x = 0$ のとき

$t = \sin^{-1} 0 = 0$. $x = 1$ のとき $t = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$.

$$\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{6} \cos t \cdot \sqrt{2} \cos t dt = 2\sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt$$

$$\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{6} \cos t \cdot \sqrt{2} \cos t dt = 2\sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{6} \cos t \cdot \sqrt{2} \cos t dt = 2\sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt \\ &= 2\sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt \quad \cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{6} \cos t \cdot \sqrt{2} \cos t dt = 2\sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt \\ &= 2\sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt = \sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{6} \cos t \cdot \sqrt{2} \cos t dt = 2\sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt \\ &= 2\sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt = \sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt \\ &= \sqrt{3} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{3} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}(\pi + 2)}{4} .\end{aligned}$$

終

問7.9.2 定積分 $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2} dx$ を計算せよ.

≥ 0 なので, ≤ 0 , $(x \quad)(x \quad) \leq 0$, $\leq x \leq$. 変

数 t を $t =$ ($\leq x \leq$) とおく. $\sin t = \sin(\quad) =$ なの

で $x =$. $\leq t \leq$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$\sqrt{12-3x^2} =$$

$x =$ より $\frac{dx}{dt} =$ なので $dx = dt$. $x = -1$ のとき

$t =$ $=$. $x = \sqrt{3}$ のとき $t =$ $=$.

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2} dx = \int dt = \int dt$$

問7.9.2 定積分 $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2} dx$ を計算せよ.

$12-3x^2 \geq 0$ なので, $x^2-4 \leq 0$, $(x+2)(x-2) \leq 0$, $-2 \leq x \leq 2$. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{2}$ ($-2 \leq x \leq 2$) とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$ なの

で $x = 2\sin t$. $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$\sqrt{12-3x^2} =$$

$x =$ より $\frac{dx}{dt} =$ なので $dx =$ dt . $x = -1$ のとき

$t =$ $=$. $x = \sqrt{3}$ のとき $t =$ $=$.

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2} dx = \int \quad dt = \int \quad dt$$

問7.9.2 定積分 $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2} dx$ を計算せよ.

$12-3x^2 \geq 0$ なので, $x^2-4 \leq 0$, $(x+2)(x-2) \leq 0$, $-2 \leq x \leq 2$. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{2}$ ($-2 \leq x \leq 2$) とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$ なの

で $x = 2\sin t$. $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{12-3x^2} &= \sqrt{12-3(2\sin t)^2} = \sqrt{12-12\sin^2 t} \\ &= \sqrt{12} \sqrt{1-\sin^2 t} = 2\sqrt{3} \sqrt{\cos^2 t} \\ &= 2\sqrt{3} \cos t.\end{aligned}$$

$x =$ より $\frac{dx}{dt} =$ なので $dx =$ dt . $x = -1$ のとき

$t =$ $=$. $x = \sqrt{3}$ のとき $t =$ $=$.

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2} dx = \int \quad \quad \quad dt = \int \quad \quad \quad dt$$

問7.9.2 定積分 $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2} dx$ を計算せよ.

$12-3x^2 \geq 0$ なので, $x^2-4 \leq 0$, $(x+2)(x-2) \leq 0$, $-2 \leq x \leq 2$. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{2}$ ($-2 \leq x \leq 2$) とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$ なの

で $x = 2\sin t$. $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{12-3x^2} &= \sqrt{12-3(2\sin t)^2} = \sqrt{12-12\sin^2 t} \\ &= \sqrt{12} \sqrt{1-\sin^2 t} = 2\sqrt{3} \sqrt{\cos^2 t} \\ &= 2\sqrt{3} \cos t.\end{aligned}$$

$x = 2\sin t$ より $\frac{dx}{dt} = 2\cos t$ なので $dx = 2\cos t dt$. $x = -1$ のとき

$$t = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}. \quad x = \sqrt{3} \text{ のとき } t = \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{3} \cdot 2\cos t \cdot 2\cos t dt = 4\sqrt{3} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t dt$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2} dx &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{3} \cdot 2 \cos t \cdot 2 \cos t dt = 4\sqrt{3} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t dt \\ &= 2\sqrt{3} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2t) dt = 2\sqrt{3} \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= 2\sqrt{3} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 3 + \sqrt{3}\pi .\end{aligned}$$

終

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16 - x^2} dx$ を計算する.

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{16-x^2}$ は実数なので, $16-x^2 \geq 0$, $x^2-16 \leq 0$, $(x+4)(x-4) \leq 0$,
 $-4 \leq x \leq 4$.

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{16-x^2}$ は実数なので, $16-x^2 \geq 0$, $x^2-16 \leq 0$, $(x+4)(x-4) \leq 0$,
 $-4 \leq x \leq 4$.

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{16-x^2}$ は実数なので, $16-x^2 \geq 0$, $x^2-16 \leq 0$, $(x+4)(x-4) \leq 0$,
 $-4 \leq x \leq 4$. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{4}$ ($-4 \leq x \leq 4$) とおく.

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{16-x^2}$ は実数なので, $16-x^2 \geq 0$, $x^2-16 \leq 0$, $(x+4)(x-4) \leq 0$,
 $-4 \leq x \leq 4$. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{4}$ ($-4 \leq x \leq 4$) とおく.

$-4 \leq x \leq 4$ より $-1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$ なので $\sin^{-1} \frac{x}{4}$ の値がある.

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{16-x^2}$ は実数なので, $16-x^2 \geq 0$, $x^2-16 \leq 0$, $(x+4)(x-4) \leq 0$,
 $-4 \leq x \leq 4$. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{4}$ ($-4 \leq x \leq 4$) とおく. $\sin t =$

$\sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{4}\right) = \frac{x}{4}$ なので $x = 4\sin t$.

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{16-x^2}$ は実数なので, $16-x^2 \geq 0$, $x^2-16 \leq 0$, $(x+4)(x-4) \leq 0$,
 $-4 \leq x \leq 4$. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{4}$ ($-4 \leq x \leq 4$) とおく. $\sin t =$

$\sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{4}\right) = \frac{x}{4}$ なので $x = 4 \sin t$. $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ より

$-1 \leq X \leq 1$ である各実数 X について $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} X \leq \frac{\pi}{2}$.

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{16-x^2}$ は実数なので, $16-x^2 \geq 0$, $x^2-16 \leq 0$, $(x+4)(x-4) \leq 0$,
 $-4 \leq x \leq 4$. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{4}$ ($-4 \leq x \leq 4$) とおく. $\sin t =$
 $\sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{4}\right) = \frac{x}{4}$ なので $x = 4 \sin t$. $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{16-x^2}$ は実数なので, $16-x^2 \geq 0$, $x^2-16 \leq 0$, $(x+4)(x-4) \leq 0$,
 $-4 \leq x \leq 4$. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{4}$ ($-4 \leq x \leq 4$) とおく. $\sin t =$

$\sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{4}\right) = \frac{x}{4}$ なので $x = 4\sin t$. $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{16-x^2} &= \sqrt{16-(4\sin t)^2} = \sqrt{16-16\sin^2 t} = \sqrt{16} \sqrt{1-\sin^2 t} = 4\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 4\cos t.\end{aligned}$$

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{16-x^2}$ は実数なので, $16-x^2 \geq 0$, $x^2-16 \leq 0$, $(x+4)(x-4) \leq 0$,
 $-4 \leq x \leq 4$. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{4}$ ($-4 \leq x \leq 4$) とおく. $\sin t =$

$\sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{4}\right) = \frac{x}{4}$ なので $x = 4\sin t$. $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{16-x^2} &= \sqrt{16-(4\sin t)^2} = \sqrt{16-16\sin^2 t} = \sqrt{16} \sqrt{1-\sin^2 t} = 4\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 4\cos t.\end{aligned}$$

$x = 4\sin t$ より $\frac{dx}{dt} = 4\cos t$ なので $dx = 4\cos t dt$.

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{16-x^2}$ は実数なので, $16-x^2 \geq 0$, $x^2-16 \leq 0$, $(x+4)(x-4) \leq 0$,
 $-4 \leq x \leq 4$. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{4}$ ($-4 \leq x \leq 4$) とおく. $\sin t =$

$\sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{4}\right) = \frac{x}{4}$ なので $x = 4\sin t$. $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{16-x^2} &= \sqrt{16-(4\sin t)^2} = \sqrt{16-16\sin^2 t} = \sqrt{16} \sqrt{1-\sin^2 t} = 4\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 4\cos t.\end{aligned}$$

$x = 4\sin t$ より $\frac{dx}{dt} = 4\cos t$ なので $dx = 4\cos t dt$. $x = 0$ のとき

$t = \sin^{-1} 0 = 0$. $x = 3$ のとき $t = \sin^{-1} \frac{3}{4}$. この式は簡単にできない.

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx$ を計算する.

$\sqrt{16-x^2}$ は実数なので, $16-x^2 \geq 0$, $x^2-16 \leq 0$, $(x+4)(x-4) \leq 0$,
 $-4 \leq x \leq 4$. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{4}$ ($-4 \leq x \leq 4$) とおく. $\sin t =$

$\sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{4}\right) = \frac{x}{4}$ なので $x = 4\sin t$. $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{16-x^2} &= \sqrt{16-(4\sin t)^2} = \sqrt{16-16\sin^2 t} = \sqrt{16} \sqrt{1-\sin^2 t} = 4\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 4\cos t.\end{aligned}$$

$x = 4\sin t$ より $\frac{dx}{dt} = 4\cos t$ なので $dx = 4\cos t dt$. $x = 0$ のとき

$t = \sin^{-1} 0 = 0$. $x = 3$ のとき $t = \sin^{-1} \frac{3}{4}$.

$$\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx = \int_0^{\sin^{-1} \frac{3}{4}} 4\cos t \cdot 4\cos t dt = 16 \int_0^{\sin^{-1} \frac{3}{4}} \cos^2 t dt$$

$$\begin{aligned}\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx &= \int_0^{\sin^{-1} \frac{3}{4}} 4 \cos t \cdot 4 \cos t dt = 16 \int_0^{\sin^{-1} \frac{3}{4}} \cos^2 t dt \\ &= 16 \int_0^{\sin^{-1} \frac{3}{4}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt \quad \cos^2 t = \frac{1}{2} (1 + \cos 2t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^3 \sqrt{16-x^2} \, dx &= \int_0^{\sin^{-1} \frac{3}{4}} 4 \cos t \cdot 4 \cos t \, dt = 16 \int_0^{\sin^{-1} \frac{3}{4}} \cos^2 t \, dt \\ &= 16 \int_0^{\sin^{-1} \frac{3}{4}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) \, dt = 8 \int_0^{\sin^{-1} \frac{3}{4}} (1 + \cos 2t) \, dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx &= \int_0^{\sin^{-1} \frac{3}{4}} 4 \cos t \cdot 4 \cos t dt = 16 \int_0^{\sin^{-1} \frac{3}{4}} \cos^2 t dt \\ &= 16 \int_0^{\sin^{-1} \frac{3}{4}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt = 8 \int_0^{\sin^{-1} \frac{3}{4}} (1 + \cos 2t) dt \\ &= 8 \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\sin^{-1} \frac{3}{4}} = 8 \left\{ \sin^{-1} \frac{3}{4} + \frac{\sin \left(2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right)}{2} - 0 \right\} \\ &= 8 \sin^{-1} \frac{3}{4} + 4 \sin \left(2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) .\end{aligned}$$

$$\int_0^3 \sqrt{16 - x^2} \, dx = 8 \sin^{-1} \frac{3}{4} + 4 \sin \left(2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) .$$

$$\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx = 8 \sin^{-1} \frac{3}{4} + 4 \sin \left(2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) .$$

$\sin \left(2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right)$ を計算する.

$$\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx = 8 \sin^{-1} \frac{3}{4} + 4 \sin \left(2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) .$$

$\sin \left(2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right)$ を計算する.

$$\sin \left(2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = 2 \sin \left(\sin^{-1} \frac{3}{4} \right) \cos \left(\sin^{-1} \frac{3}{4} \right) .$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx = 8 \sin^{-1} \frac{3}{4} + 4 \sin \left(2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) .$$

$\sin \left(2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right)$ を計算する.

$$\sin \left(2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = 2 \sin \left(\sin^{-1} \frac{3}{4} \right) \cos \left(\sin^{-1} \frac{3}{4} \right) .$$

まず

$$\sin \left(\sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = \frac{3}{4} .$$

$$\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx = 8 \sin^{-1} \frac{3}{4} + 4 \sin \left(2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) .$$

$\sin \left(2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right)$ を計算する.

$$\sin \left(2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = 2 \sin \left(\sin^{-1} \frac{3}{4} \right) \cos \left(\sin^{-1} \frac{3}{4} \right) .$$

まず

$$\sin \left(\sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = \frac{3}{4} .$$

更に,

$$\cos^2 \left(\sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = 1 - \sin^2 \left(\sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = 1 - \left(\frac{3}{4} \right)^2 = \frac{7}{16} ,$$

$$\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx = 8 \sin^{-1} \frac{3}{4} + 4 \sin \left(2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) .$$

$\sin \left(2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right)$ を計算する.

$$\sin \left(2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = 2 \sin \left(\sin^{-1} \frac{3}{4} \right) \cos \left(\sin^{-1} \frac{3}{4} \right) .$$

まず

$$\sin \left(\sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = \frac{3}{4} .$$

更に,

$$\cos^2 \left(\sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = 1 - \sin^2 \left(\sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = 1 - \left(\frac{3}{4} \right)^2 = \frac{7}{16} ,$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{3}{4} \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos \left(\sin^{-1} \frac{3}{4} \right) \geq 0$ なので

$$\cos \left(\sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4} .$$

$$\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx = 8 \sin^{-1} \frac{3}{4} + 4 \sin \left(2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) .$$

$\sin \left(2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right)$ を計算する.

$$\sin \left(2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = 2 \sin \left(\sin^{-1} \frac{3}{4} \right) \cos \left(\sin^{-1} \frac{3}{4} \right) .$$

まず

$$\sin \left(\sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = \frac{3}{4} .$$

更に,

$$\cos^2 \left(\sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = 1 - \sin^2 \left(\sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = 1 - \left(\frac{3}{4} \right)^2 = \frac{7}{16} ,$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{3}{4} \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos \left(\sin^{-1} \frac{3}{4} \right) \geq 0$ なので

$$\cos \left(\sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4} .$$

よって

$$\sin \left(2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = 2 \sin \left(\sin^{-1} \frac{3}{4} \right) \cos \left(\sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3}{8} \sqrt{7} .$$

故に

$$\begin{aligned}\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx &= 8 \sin^{-1} \frac{3}{4} + 4 \sin \left(2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) \\ &= 8 \sin^{-1} \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{3}{8} \sqrt{7} \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{7} + 8 \sin^{-1} \frac{3}{4} .\end{aligned}$$

終

問7.9.3 定積分 $\int_0^4 \sqrt{25-x^2} dx$ を計算せよ.

≥ 0 なので, ≤ 0 , $(x+)(x-)\leq 0$, $\leq x \leq$. 変数 t を $t=$ ($\leq x \leq$) とおく. $\sin t = \sin(\quad) =$ なの

で $x=$. $\leq t \leq$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$\sqrt{25-x^2} =$$

$x=$ より $\frac{dx}{dt} =$ なので $dx = dt$. $x=0$ のとき

$t=$ $=$. $x=4$ のとき $t=$.

$$\int_0^4 \sqrt{25-x^2} dx = \int dt = \int dt$$

問7.9.3 定積分 $\int_0^4 \sqrt{25-x^2} dx$ を計算せよ.

$25-x^2 \geq 0$ なので, $x^2-25 \leq 0$, $(x+5)(x-5) \leq 0$, $-5 \leq x \leq 5$. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{5}$ ($-5 \leq x \leq 5$) とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{5}\right) = \frac{x}{5}$ なの

で $x = 5 \sin t$. $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$\sqrt{25-x^2} =$$

$x =$ より $\frac{dx}{dt} =$ なので $dx =$ dt . $x = 0$ のとき

$t =$ $=$. $x = 4$ のとき $t =$.

$$\int_0^4 \sqrt{25-x^2} dx = \int \quad \quad \quad dt = \int \quad \quad \quad dt$$

問7.9.3 定積分 $\int_0^4 \sqrt{25-x^2} dx$ を計算せよ.

$25-x^2 \geq 0$ なので, $x^2-25 \leq 0$, $(x+5)(x-5) \leq 0$, $-5 \leq x \leq 5$. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{5}$ ($-5 \leq x \leq 5$) とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{5}\right) = \frac{x}{5}$ なの

で $x = 5 \sin t$. $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{25-x^2} &= \sqrt{25-(5\sin t)^2} = \sqrt{25-25\sin^2 t} = 5\sqrt{1-\sin^2 t} = 5\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 5\cos t.\end{aligned}$$

$x =$ より $\frac{dx}{dt} =$ なので $dx =$ dt . $x = 0$ のとき

$t =$ $=$. $x = 4$ のとき $t =$.

$$\int_0^4 \sqrt{25-x^2} dx = \int \quad \quad \quad dt = \int \quad \quad \quad dt$$

問7.9.3 定積分 $\int_0^4 \sqrt{25-x^2} dx$ を計算せよ.

$25-x^2 \geq 0$ なので, $x^2-25 \leq 0$, $(x+5)(x-5) \leq 0$, $-5 \leq x \leq 5$. 変数 t を $t = \sin^{-1} \frac{x}{5}$ ($-5 \leq x \leq 5$) とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{5}\right) = \frac{x}{5}$ なの

で $x = 5 \sin t$. $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{25-x^2} &= \sqrt{25-(5 \sin t)^2} = \sqrt{25-25 \sin^2 t} = 5\sqrt{1-\sin^2 t} = 5\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 5 \cos t.\end{aligned}$$

$x = 5 \sin t$ より $\frac{dx}{dt} = 5 \cos t$ なので $dx = 5 \cos t dt$. $x = 0$ のとき

$t = \sin^{-1} 0 = 0$. $x = 4$ のとき $t = \sin^{-1} \frac{4}{5}$.

$$\int_0^4 \sqrt{25-x^2} dx = \int_0^{\sin^{-1} \frac{4}{5}} 5 \cos t \cdot 5 \cos t dt = 25 \int_0^{\sin^{-1} \frac{4}{5}} \cos^2 t dt$$

$$\begin{aligned}\int_0^4 \sqrt{25 - x^2} \, dx &= \int_0^{\sin^{-1} \frac{4}{5}} 5 \cos t \cdot 5 \cos t \, dt = 25 \int_0^{\sin^{-1} \frac{4}{5}} \cos^2 t \, dt \\ &= 25 \int_0^{\sin^{-1} \frac{4}{5}} \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = \frac{25}{2} \int_0^{\sin^{-1} \frac{4}{5}} (1 + \cos 2t) \, dt \\ &= \frac{25}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\sin^{-1} \frac{4}{5}} = \frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{4}{5} + \frac{25}{4} \sin \left(2 \sin^{-1} \frac{4}{5} \right) \\ &= \frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{4}{5} + \frac{25}{2} \sin \left(\sin^{-1} \frac{4}{5} \right) \cos \left(\sin^{-1} \frac{4}{5} \right) .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \sqrt{25-x^2} dx &= \int_0^{\sin^{-1} \frac{4}{5}} 5 \cos t \cdot 5 \cos t dt = 25 \int_0^{\sin^{-1} \frac{4}{5}} \cos^2 t dt \\
&= 25 \int_0^{\sin^{-1} \frac{4}{5}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{25}{2} \int_0^{\sin^{-1} \frac{4}{5}} (1 + \cos 2t) dt \\
&= \frac{25}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\sin^{-1} \frac{4}{5}} = \frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{4}{5} + \frac{25}{4} \sin \left(2 \sin^{-1} \frac{4}{5} \right) \\
&= \frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{4}{5} + \frac{25}{2} \sin \left(\sin^{-1} \frac{4}{5} \right) \cos \left(\sin^{-1} \frac{4}{5} \right) .
\end{aligned}$$

ここで、 $\sin \left(\sin^{-1} \frac{4}{5} \right) = \frac{4}{5}$, また、

$$\cos^2 \left(\sin^{-1} \frac{4}{5} \right) = 1 - \left\{ \sin \left(\sin^{-1} \frac{4}{5} \right) \right\}^2 = 1 - \left(\frac{4}{5} \right)^2 = \frac{9}{25} ,$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{4}{5} \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos \left(\sin^{-1} \frac{4}{5} \right) \geq 0$ なので

$$\cos \left(\sin^{-1} \frac{4}{5} \right) = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} .$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{4}{5} + \frac{25}{2} \sin\left(\sin^{-1} \frac{4}{5}\right) \cos\left(\sin^{-1} \frac{4}{5}\right) &= \frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{4}{5} + \frac{25}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} \\ &= \frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{4}{5} + 6 .\end{aligned}$$

故に $\int_0^4 \sqrt{25-x^2} dx = 6 + \frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{4}{5} .$

終