7.9 ある形の2次式の根号の積分法

正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2 - x^2}$ で表される関数を積分する.

　正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ で表される関数を積分する．無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ の値が実数である範囲で考えるので，

当分の間は関数の微分積は変数や式の値が実数である範囲で考える．

正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2 - x^2}$ で表される関数を積分する．無理式 $\sqrt{a^2 - x^2}$ の値が実数である範囲で考えるので， $a^2 - x^2 \geq 0$ ， $x^2 - a^2 \leq 0$ ， $(x + a)(x - a) \leq 0$ ， $-a \leq x \leq a$ ．

正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ で表される関数を積分する．無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ の値が実数である範囲で考えるので， $a^2-x^2 \geq 0$ ， $x^2-a^2 \leq 0$ ， $(x+a)(x-a) \leq 0$ ， $-a \leq x \leq a$ ． $-1 \leq \dfrac{x}{a} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ の値がある．

$-1 \leq X \leq 1$ である各実数 X に対して $\sin^{-1}X$ の値がある．

正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ で表される関数を積分する．無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ の値が実数である範囲で考えるので，$a^2-x^2 \geq 0$ ，$x^2-a^2 \leq 0$ ，$(x+a)(x-a) \leq 0$ ，$-a \leq x \leq a$ ．$-1 \leq \dfrac{x}{a} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ の値がある．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ とおく．

正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ で表される関数を積分する．無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ の値が実数である範囲で考えるので，$a^2-x^2 \geq 0$，$x^2-a^2 \leq 0$，$(x+a)(x-a) \leq 0$，$-a \leq x \leq a$．$-1 \leq \dfrac{x}{a} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ の値がある．変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ とおく．$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{a}\right) = \dfrac{x}{a}$ なので，

$-1 \leq X \leq 1$ である各実数 X について $\sin(\sin^{-1}X) = X$．

正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ で表される関数を積分する．無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ の値が実数である範囲で考えるので， $a^2-x^2 \geq 0$ ， $x^2-a^2 \leq 0$ ， $(x+a)(x-a) \leq 0$ ， $-a \leq x \leq a$ ． $-1 \leq \dfrac{x}{a} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ の値がある．変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ とおく． $\sin t=\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{a}\right)=\dfrac{x}{a}$ なので， $x=a\sin t$ ．

正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ で表される関数を積分する．無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ の値が実数である範囲で考えるので， $a^2-x^2 \geq 0$ ， $x^2-a^2 \leq 0$ ， $(x+a)(x-a) \leq 0$ ， $-a \leq x \leq a$ ． $-1 \leq \dfrac{x}{a} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ の値がある．変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ とおく． $\sin t=\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{a}\right)=\dfrac{x}{a}$ なので， $x=a\sin t$ ． $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ より $1-\sin^2 t=\cos^2 t$ なので，

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2-x^2} &= \sqrt{a^2-(a\sin t)^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=\sqrt{a^2}\sqrt{1-\sin^2 t}\\ &= a\sqrt{\cos^2 t}\ .\end{aligned}$$

　正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ で表される関数を積分する．無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ の値が実数である範囲で考えるので， $a^2-x^2 \geq 0$ ， $x^2-a^2 \leq 0$ ， $(x+a)(x-a) \leq 0$ ， $-a \leq x \leq a$ ． $-1 \leq \dfrac{x}{a} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ の値がある．変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ とおく． $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{a}\right) = \dfrac{x}{a}$ なので，$x = a\sin t$ ． $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ より $1-\sin^2 t = \cos^2 t$ なので，

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2-x^2} &= \sqrt{a^2-(a\sin t)^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} = \sqrt{a^2}\sqrt{1-\sin^2 t} \\ &= a\sqrt{\cos^2 t}\ .\end{aligned}$$

$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{a} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ ，

$-1 \leq X \leq 1$ である各実数 X について $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} X \leq \dfrac{\pi}{2}$ ．

　正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ で表される関数を積分する．無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ の値が実数である範囲で考えるので，$a^2-x^2 \geq 0$ ，$x^2-a^2 \leq 0$ ，$(x+a)(x-a) \leq 0$ ，$-a \leq x \leq a$ ．$-1 \leq \dfrac{x}{a} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ の値がある．変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ とおく．$\sin t=\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{a}\right)=\dfrac{x}{a}$ なので，$x=a\sin t$ ．$\sin^2 t+\cos^2 t=1$ より $1-\sin^2 t=\cos^2 t$ なので，

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2-x^2} &= \sqrt{a^2-(a\sin t)^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=\sqrt{a^2}\sqrt{1-\sin^2 t}\\ &= a\sqrt{\cos^2 t}\ .\end{aligned}$$

$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{a} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ ，よって $\cos t \geq 0$ なので，$\sqrt{\cos^2 t}=\cos t$ ．

正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ で表される関数を積分する．無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ の値が実数である範囲で考えるので， $a^2-x^2 \geq 0$ ， $x^2-a^2 \leq 0$ ， $(x+a)(x-a) \leq 0$ ， $-a \leq x \leq a$ ． $-1 \leq \dfrac{x}{a} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ の値がある．変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ とおく． $\sin t=\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{a}\right)=\dfrac{x}{a}$ なので， $x=a\sin t$ ． $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ より $1-\sin^2 t=\cos^2 t$ なので，

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2-x^2} &= \sqrt{a^2-(a\sin t)^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=\sqrt{a^2}\sqrt{1-\sin^2 t}\\ &= a\sqrt{\cos^2 t}\ .\end{aligned}$$

$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{a} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ ，よって $\cos t \geq 0$ なので， $\sqrt{\cos^2 t}=\cos t$ ．これより

$$\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t\ .$$

正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ で表される関数を積分する．無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ の値が実数である範囲で考えるので， $a^2-x^2 \geq 0$ ， $x^2-a^2 \leq 0$ ， $(x+a)(x-a) \leq 0$ ， $-a \leq x \leq a$ ． $-1 \leq \dfrac{x}{a} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ の値がある．変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ とおく． $\sin t=\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{a}\right)=\dfrac{x}{a}$ なので， $x=a\sin t$ ． $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ より $1-\sin^2 t=\cos^2 t$ なので，

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2-x^2} &= \sqrt{a^2-(a\sin t)^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=\sqrt{a^2}\sqrt{1-\sin^2 t}\\ &= a\sqrt{\cos^2 t}\ .\end{aligned}$$

$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{a} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ ，よって $\cos t \geq 0$ なので， $\sqrt{\cos^2 t}=\cos t$ ．これより

$$\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t\ .$$

また， $x=a\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt}=a\cos t$ なので， $dx=(a\cos t)\,dt$ ．

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ を計算する.

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ を計算する．$\sqrt{9-x^2}$ は実数なので，$9-x^2 \geq 0$ ，
$x^2-9 \leq 0$ ，$(x+\quad)(x-\quad) \leq 0$ ，$\qquad \leq x \leq \quad$.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ を計算する. $\sqrt{9-x^2}$ は実数なので, $9-x^2 \geq 0$, $x^2-9 \leq 0$, $(x+3)(x-3) \leq 0$, $-3 \leq x \leq 3$.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ を計算する．$\sqrt{9-x^2}$ は実数なので，$9-x^2 \geq 0$ ，
$x^2-9 \leq 0$ ， $(x+3)(x-3) \leq 0$ ， $-3 \leq x \leq 3$ ． $-1 \leq \dfrac{x}{3} \leq 1$ なので
$\sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ の値がある．

$-1 \leq X \leq 1$ である各実数 X に対して $\sin^{-1}X$ の値がある．

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ を計算する．$\sqrt{9-x^2}$ は実数なので，$9-x^2 \geq 0$ ，$x^2-9 \leq 0$ ，$(x+3)(x-3) \leq 0$ ，$-3 \leq x \leq 3$ ．$-1 \leq \dfrac{x}{3} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ の値がある．変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ （ $-3 \leq x \leq 3$ ）とおく．

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ を計算する． $\sqrt{9-x^2}$ は実数なので， $9-x^2 \geq 0$ ， $x^2-9 \leq 0$ ， $(x+3)(x-3) \leq 0$ ， $-3 \leq x \leq 3$ ． $-1 \leq \dfrac{x}{3} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ の値がある． 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ （ $-3 \leq x \leq 3$ ）とおく．

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$ ．

$-1 \leq X \leq 1$ である各実数 X について $\sin(\sin^{-1}X) = X$ ．

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ を計算する. $\sqrt{9-x^2}$ は実数なので, $9-x^2 \geq 0$, $x^2-9 \leq 0$, $(x+3)(x-3) \leq 0$, $-3 \leq x \leq 3$. $-1 \leq \dfrac{x}{3} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ の値がある. 変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ ($-3 \leq x \leq 3$) とおく.

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$,

$-1 \leq X \leq 1$ である各実数 X について $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} X \leq \dfrac{\pi}{2}$.

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ を計算する．$\sqrt{9-x^2}$ は実数なので，$9-x^2 \geq 0$ ，$x^2-9 \leq 0$ ，$(x+3)(x-3) \leq 0$ ，$-3 \leq x \leq 3$ ．$-1 \leq \dfrac{x}{3} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ の値がある．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ （$-3 \leq x \leq 3$ ）とおく．$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$ ．$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ ，よって $\cos t \geq 0$ なので，

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ を計算する．$\sqrt{9-x^2}$ は実数なので，$9-x^2 \geq 0$ ，$x^2-9 \leq 0$ ，$(x+3)(x-3) \leq 0$ ，$-3 \leq x \leq 3$ ．$-1 \leq \dfrac{x}{3} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ の値がある．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ （$-3 \leq x \leq 3$ ）とおく．$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$ ．$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ ，よって $\cos t \geq 0$ なので，

$$\begin{aligned}\sqrt{9-x^2} &= \sqrt{9-(3\sin t)^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = \sqrt{9}\sqrt{1-\sin^2 t} = 3\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 3\cos t\ .\end{aligned}$$

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ を計算する．$\sqrt{9-x^2}$ は実数なので，$9-x^2 \geq 0$ ，
$x^2-9 \leq 0$ ， $(x+3)(x-3) \leq 0$ ， $-3 \leq x \leq 3$ ． $-1 \leq \dfrac{x}{3} \leq 1$ なので
$\sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ の値がある．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ （ $-3 \leq x \leq 3$ ）とおく．
$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$ ． $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので
$-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ ，よって $\cos t \geq 0$ なので，

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(3\sin t)^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = \sqrt{9}\sqrt{1-\sin^2 t} = 3\sqrt{\cos^2 t}$$
$$= 3\cos t \ .$$

$x = 3\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 3\cos t$ なので， $dx = 3\cos t\,dt$ ．

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ を計算する．$\sqrt{9-x^2}$ は実数なので，$9-x^2 \geq 0$ ，$x^2-9 \leq 0$ ，$(x+3)(x-3) \leq 0$ ，$-3 \leq x \leq 3$ ．$-1 \leq \dfrac{x}{3} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ の値がある．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ （$-3 \leq x \leq 3$ ）とおく．

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$ ．$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ ，よって $\cos t \geq 0$ なので，

$$\begin{aligned}\sqrt{9-x^2} &= \sqrt{9-(3\sin t)^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = \sqrt{9}\sqrt{1-\sin^2 t} = 3\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 3\cos t\ .\end{aligned}$$

$x = 3\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 3\cos t$ なので，$dx = 3\cos t\,dt$ ．$x = 0$ のとき $t = \sin^{-1}0 = 0$ ．$x = 3$ のとき $t = \sin^{-1}1 = \dfrac{\pi}{2}$ ．

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ を計算する．$\sqrt{9-x^2}$ は実数なので，$9-x^2 \geq 0$ ，
$x^2-9 \leq 0$ ，$(x+3)(x-3) \leq 0$ ，$-3 \leq x \leq 3$ ．$-1 \leq \dfrac{x}{3} \leq 1$ なので
$\sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ の値がある．変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ （ $-3 \leq x \leq 3$ ）とおく．
$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$ ．$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので
$-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ ，よって $\cos t \geq 0$ なので，

$$\begin{aligned}\sqrt{9-x^2} &= \sqrt{9-(3\sin t)^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = \sqrt{9}\sqrt{1-\sin^2 t} = 3\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 3\cos t\ .\end{aligned}$$

$x = 3\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 3\cos t$ なので，$dx = 3\cos t\,dt$ ．$x=0$ のとき
$t = \sin^{-1}0 = 0$ ．$x=3$ のとき $t=\sin^{-1}1 = \dfrac{\pi}{2}$ ．よって

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \cdot 3\cos t\,dt = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt$$

$$\int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\, dx \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \cdot 3\cos t\, dt \;=\; 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt$$

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \cdot 3\cos t\,dt = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt$$

$$\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)$$

$$\begin{aligned}\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \cdot 3\cos t\,dt = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt \\ &= \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{9}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} - 0\right) \\ &= \frac{9\pi}{4}\ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{\text{問}7.9.1}$ 定積分 $\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ を計算せよ.

$4-x^2 \geq 0$ なので, $(\qquad)(\qquad) \leq 0$, $\qquad \leq x \leq \qquad$, $-1 \leq \qquad \leq 1$.

変数 t を $t = \qquad\qquad$ とおく. $\sin t = \sin\Big(\qquad\qquad\Big) = \qquad$ なので $x = \qquad\qquad$.

$\qquad \leq t \leq \qquad$ より $\cos t \quad 0$ なので,

$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(\qquad\quad)^2} =$

$x = 2\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = \qquad\qquad$ なので $dx = \qquad\qquad dt$. $x=1$ のとき

$t = \qquad\qquad = \qquad$. $x=2$ のとき $t = \qquad\qquad = \qquad$. よって

$$\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx =$$

$\boxed{\text{問}7.9.1}$ 定積分 $\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ を計算せよ.

$4-x^2 \geq 0$ なので, $(x+2)(x-2) \leq 0$, $-2 \leq x \leq 2$, $-1 \leq \dfrac{x}{2} \leq 1$.

変数 t を $t =$ とおく. $\sin t = \sin\Bigl(\qquad\Bigr) =$ なので $x =$.

$\leq t \leq$ より $\cos t$ 0 なので,

$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(\qquad)^2} =$

$x = 2\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} =$ なので $dx =$ dt . $x=1$ のとき

$t =$ $=$. $x=2$ のとき $t =$ $=$. よって

$$\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx =$$

$\boxed{\text{問}7.9.1}$ 定積分 $\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ を計算せよ.

$4-x^2 \geq 0$ なので, $(x+2)(x-2) \leq 0$, $-2 \leq x \leq 2$, $-1 \leq \dfrac{x}{2} \leq 1$.

変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{2}$ とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{x}{2}$ なので $x = 2\sin t$.

$\leq t \leq$ より $\cos t$ 0 なので,

$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(\qquad)^2} =$

$x = 2\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} =$ なので $dx =$ dt . $x = 1$ のとき

$t =$ $=$. $x = 2$ のとき $t =$ $=$. よって

$\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx =$

$\boxed{\text{問}7.9.1}$ **定積分** $\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ **を計算せよ．**

$$4-x^2 \geq 0 \text{ なので，} \quad (x+2)(x-2) \leq 0 \text{ ，} \quad -2 \leq x \leq 2 \text{ ，} \quad -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \text{ ．}$$

変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{2}$ とおく． $\sin t = \sin\!\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{x}{2}$ なので $x = 2\sin t$ ．

$-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので，

$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(2\sin t)^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\sqrt{\cos^2 t} = 2\cos t$ ．

$x = 2\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} =$ 　　　　 なので $dx =$ 　　　　 dt ． $x = 1$ のとき

$t =$ 　　　　 $=$ 　　 ． $x = 2$ のとき $t =$ 　　　　 $=$ 　　 ．よって

$$\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx =$$

$\boxed{問7.9.1}$ 定積分 $\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ を計算せよ.

$$4-x^2 \geq 0 \text{ なので, } (x+2)(x-2) \leq 0 \ , \quad -2 \leq x \leq 2 \ , \quad -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \ .$$

変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{2}$ とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{x}{2}$ なので $x = 2\sin t$.

$-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(2\sin t)^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\sqrt{\cos^2 t} = 2\cos t$.

$x = 2\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 2\cos t$ なので $dx = 2\cos t\,dt$. $x = 1$ のとき

$t = \sin^{-1}\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$. $x = 2$ のとき $t = \sin^{-1} 1 = \dfrac{\pi}{2}$. よって

$$\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx =$$

$\boxed{問7.9.1}$ 定積分 $\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ を計算せよ.

$$4-x^2 \geq 0 \text{ なので,}\quad (x+2)(x-2) \leq 0\ ,\quad -2 \leq x \leq 2\ ,\quad -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1\ .$$

変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{2}$ とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{x}{2}$ なので $x = 2\sin t$.

$-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(2\sin t)^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\sqrt{\cos^2 t} = 2\cos t$.

$x = 2\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 2\cos t$ なので $dx = 2\cos t\,dt$. $x=1$ のとき

$t = \sin^{-1}\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$. $x = 2$ のとき $t = \sin^{-1} 1 = \dfrac{\pi}{2}$. よって

$$\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \cdot 2\cos t\,dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t\,dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2(1+\cos 2t)\,dt$$

$\boxed{問7.9.1}$ **定積分** $\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ **を計算せよ．**

$$4-x^2 \geq 0 \text{ なので，} \quad (x+2)(x-2) \leq 0 \ , \quad -2 \leq x \leq 2 \ , \quad -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \ .$$

変数 t を $t = \sin^{-1}\frac{x}{2}$ とおく． $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$ なので $x = 2\sin t$ ．

$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので，

$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(2\sin t)^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\sqrt{\cos^2 t} = 2\cos t$ ．

$x = 2\sin t$ より $\frac{dx}{dt} = 2\cos t$ なので $dx = 2\cos t\,dt$ ． $x = 1$ のとき

$t = \sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ ． $x = 2$ のとき $t = \sin^{-1}1 = \frac{\pi}{2}$ ． よって

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \cdot 2\cos t\,dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t\,dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2(1+\cos 2t)\,dt \\
&= \Big[2t + \sin 2t\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi + \sin\pi - \frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \ .
\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

例 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2}\,dx$ を計算する.

例 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2}\,dx$ を計算する．$\sqrt{6-3x^2}$ は実数なので，$6-3x^2 \geq 0$ ，
$x^2-2 \leq 0$ ，$\left(x+ \qquad\right)\left(x- \qquad\right) \leq 0$ ，$\qquad \leq x \leq \qquad$ ．

例 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2}\,dx$ を計算する．$\sqrt{6-3x^2}$ は実数なので，$6-3x^2 \geq 0$ ，$x^2-2 \leq 0$ ，$\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right) \leq 0$ ，$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ ．

例 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2}\,dx$ を計算する. $\sqrt{6-3x^2}$ は実数なので, $6-3x^2 \geq 0$, $x^2-2 \leq 0$, $\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right) \leq 0$, $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. $-1 \leq \dfrac{x}{\sqrt{2}} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ の値がある.

$-1 \leq X \leq 1$ である各実数 X に対して $\sin^{-1}X$ の値がある.

例 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2}\,dx$ を計算する．$\sqrt{6-3x^2}$ は実数なので，$6-3x^2 \geq 0$ ，$x^2-2 \leq 0$ ，$\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right) \leq 0$ ，$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ ．$-1 \leq \dfrac{x}{\sqrt{2}} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ の値がある．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ （$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$）とおく．

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2}\,dx$ を計算する．$\sqrt{6-3x^2}$ は実数なので，$6-3x^2 \geq 0$，$x^2-2 \leq 0$，$\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right) \leq 0$，$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$．$-1 \leq \dfrac{x}{\sqrt{2}} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ の値がある．変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ （$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$）とおく．$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ なので $x=\sqrt{2}\sin t$．

$-1 \leq X \leq 1$ である各実数 X について $\sin(\sin^{-1}X) = X$．

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2}\,dx$ を計算する． $\sqrt{6-3x^2}$ は実数なので， $6-3x^2 \geq 0$ ， $x^2-2 \leq 0$ ， $\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right) \leq 0$ ， $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ ． $-1 \leq \dfrac{x}{\sqrt{2}} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ の値がある．変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ （ $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ ）とおく． $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ なので $x=\sqrt{2}\sin t$ ． $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ ，

$-1 \leq X \leq 1$ である各実数 X について $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}X \leq \dfrac{\pi}{2}$ ．

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2}\,dx$ を計算する．$\sqrt{6-3x^2}$ は実数なので，$6-3x^2 \geq 0$ ，$x^2-2 \leq 0$ ，$\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right) \leq 0$ ，$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ ．$-1 \leq \dfrac{x}{\sqrt{2}} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ の値がある．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ （$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ ）とおく．$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ なので $x = \sqrt{2}\sin t$ ．$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ ，よって $\cos t \geq 0$ なので，

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2}\,dx$ を計算する．$\sqrt{6-3x^2}$ は実数なので，$6-3x^2 \geq 0$ ，$x^2-2 \leq 0$ ，$\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right) \leq 0$ ，$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ ．$-1 \leq \dfrac{x}{\sqrt{2}} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ の値がある．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ （$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ ）とおく．$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ なので $x = \sqrt{2}\sin t$ ．$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ ，よって $\cos t \geq 0$ なので，

$$
\begin{aligned}
\sqrt{6-3x^2} &= \sqrt{6-3\left(\sqrt{2}\sin t\right)^2} = \sqrt{6-6\sin^2 t} = \sqrt{6}\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{6}\sqrt{\cos^2 t} \\
&= \sqrt{6}\cos t \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2}\,dx$ を計算する．$\sqrt{6-3x^2}$ は実数なので，$6-3x^2 \geq 0$ ，$x^2-2 \leq 0$ ，$\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right) \leq 0$ ，$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ ．$-1 \leq \dfrac{x}{\sqrt{2}} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ の値がある．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ （ $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ ）とおく．$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ なので $x = \sqrt{2}\sin t$ ．$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ ，よって $\cos t \geq 0$ なので，

$$\begin{aligned}\sqrt{6-3x^2} &= \sqrt{6-3\left(\sqrt{2}\sin t\right)^2} = \sqrt{6-6\sin^2 t} = \sqrt{6}\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{6}\sqrt{\cos^2 t} \\ &= \sqrt{6}\cos t \ .\end{aligned}$$

$x = \sqrt{2}\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = \sqrt{2}\cos t$ なので $dx = \sqrt{2}\cos t\,dt$ ．

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2}\,dx$ を計算する．$\sqrt{6-3x^2}$ は実数なので，$6-3x^2 \geq 0$ ，$x^2-2 \leq 0$ ，$\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right) \leq 0$ ，$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ ．$-1 \leq \dfrac{x}{\sqrt{2}} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ の値がある．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ （$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ ）とおく．$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ なので $x = \sqrt{2}\sin t$ ．$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ ，よって $\cos t \geq 0$ なので，

$$\begin{aligned}\sqrt{6-3x^2} &= \sqrt{6-3\left(\sqrt{2}\sin t\right)^2} = \sqrt{6-6\sin^2 t} = \sqrt{6}\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{6}\sqrt{\cos^2 t} \\ &= \sqrt{6}\cos t\ .\end{aligned}$$

$x = \sqrt{2}\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = \sqrt{2}\cos t$ なので $dx = \sqrt{2}\cos t\,dt$ ．$x = 0$ のとき $t = \sin^{-1}0 = 0$ ．$x = 1$ のとき $t = \sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{4}$ ．

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2}\,dx$ を計算する．$\sqrt{6-3x^2}$ は実数なので，$6-3x^2 \geq 0$ ，$x^2-2 \leq 0$ ，$\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right) \leq 0$ ，$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ ．$-1 \leq \dfrac{x}{\sqrt{2}} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ の値がある．変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ （ $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ ）とおく．$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ なので $x=\sqrt{2}\sin t$ ．$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ ，よって $\cos t \geq 0$ なので，

$$\sqrt{6-3x^2} = \sqrt{6-3\left(\sqrt{2}\sin t\right)^2} = \sqrt{6-6\sin^2 t} = \sqrt{6}\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{6}\sqrt{\cos^2 t}$$
$$= \sqrt{6}\cos t \ .$$

$x=\sqrt{2}\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt}=\sqrt{2}\cos t$ なので $dx=\sqrt{2}\cos t\,dt$ ．$x=0$ のとき $t=\sin^{-1}0=0$ ．$x=1$ のとき $t=\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\pi}{4}$ ．

$$\int_0^1 \sqrt{6-3x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{6}\cos t \cdot \sqrt{2}\cos t\,dt = 2\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,dt$$

$$\int_0^1 \sqrt{6-3x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{6}\,\cos t \cdot \sqrt{2}\,\cos t\,dt = 2\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,dt$$

$$\int_0^1 \sqrt{6-3x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{6}\cos t \cdot \sqrt{2}\cos t\,dt = 2\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,dt$$

$$= 2\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt \qquad \cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{6-3x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{6}\,\cos t \cdot \sqrt{2}\,\cos t\,dt = 2\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,dt \\ &= 2\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt = \sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)\,dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{6-3x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{6}\cos t\cdot\sqrt{2}\cos t\,dt = 2\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t\,dt \\
&= 2\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt = \sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)\,dt \\
&= \sqrt{3}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}(\pi+2)}{4}\ .
\end{aligned}
$$

終

$\boxed{\text{問}7.9.2}$ 定積分 $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2}\,dx$ を計算せよ.

≥ 0 なので, ≤ 0 , $(x \quad)(x \quad) \leq 0$, $\leq x \leq$, $-1 \leq \quad \leq 1$. 変数 t を $t =$ とおく. $\sin t = \sin\Big(\qquad \Big) =$ なので $x =$. $\leq t \leq$ より $\cos t \quad 0$ なので,

$$\sqrt{12-3x^2} =$$

$x =$ より $\dfrac{dx}{dt} =$ なので $dx = \qquad dt$. $x = -1$ のとき $t = \qquad = \quad$. $x = \sqrt{3}$ のとき $t = \qquad = \quad$.

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2}\,dx =$$

$\boxed{問 7.9.2}$ 定積分 $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2}\, dx$ を計算せよ.

$12-3x^2 \geq 0$ なので, $x^2-4 \leq 0$, $(x+2)(x-2) \leq 0$, $-2 \leq x \leq 2$, $-1 \leq \dfrac{x}{2} \leq 1$. 変数 t を $t =$ とおく. $\sin t = \sin\Bigl(\quad \Bigr) =$ なので $x =$. $\leq t \leq$ より $\cos t \quad 0$ なので,

$$\sqrt{12-3x^2} =$$

$x =$ より $\dfrac{dx}{dt} =$ なので $dx = \quad dt$. $x=-1$ のとき $t = \quad = \quad$. $x=\sqrt{3}$ のとき $t = \quad = \quad$.

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2}\, dx =$$

$\boxed{\text{問}7.9.2}$ **定積分** $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2}\,dx$ **を計算せよ.**

$12-3x^2 \geq 0$ なので, $x^2-4 \leq 0$, $(x+2)(x-2) \leq 0$, $-2 \leq x \leq 2$, $-1 \leq \dfrac{x}{2} \leq 1$. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{2}$ とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{x}{2}$ なので $x = 2\sin t$. $\qquad \leq t \leq \qquad$ より $\cos t \quad 0$ なので,

$$\sqrt{12-3x^2} =$$

$x =$ より $\dfrac{dx}{dt} =$ なので $dx = \qquad dt$. $x=-1$ のとき $t = \qquad = \qquad$. $x=\sqrt{3}$ のとき $t = \qquad = \qquad$.

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2}\,dx =$$

$\boxed{問7.9.2}$ 定積分 $\int_{-1}^{\sqrt{3}}\sqrt{12-3x^2}\,dx$ を計算せよ.

$12-3x^2 \geq 0$ なので, $x^2-4 \leq 0$, $(x+2)(x-2) \leq 0$, $-2 \leq x \leq 2$, $-1 \leq \dfrac{x}{2} \leq 1$. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{2}$ とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{x}{2}$ なので $x = 2\sin t$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{12-3x^2} &= \sqrt{12-3(2\sin t)^2} = \sqrt{12-12\sin^2 t} \\ &= \sqrt{12}\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\sqrt{3}\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 2\sqrt{3}\cos t\ .\end{aligned}$$

$x =$ 　　　　より $\dfrac{dx}{dt} =$ 　　　　なので $dx =$ 　　　　dt . $x=-1$ のとき

$t =$ 　　　　　　$=$ 　　. $x=\sqrt{3}$ のとき $t =$ 　　　　　　$=$ 　　.

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}}\sqrt{12-3x^2}\,dx =$$

$\boxed{問 7.9.2}$ 定積分 $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2}\,dx$ を計算せよ.

$12-3x^2 \geq 0$ なので, $x^2-4 \leq 0$, $(x+2)(x-2) \leq 0$, $-2 \leq x \leq 2$, $-1 \leq \dfrac{x}{2} \leq 1$. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{2}$ とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{x}{2}$ なので $x = 2\sin t$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{12-3x^2} &= \sqrt{12-3(2\sin t)^2} = \sqrt{12-12\sin^2 t} \\ &= \sqrt{12}\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\sqrt{3}\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 2\sqrt{3}\cos t \ .\end{aligned}$$

$x = 2\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 2\cos t$ なので $dx = 2\cos t\,dt$. $x = -1$ のとき $t = \sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$. $x = \sqrt{3}$ のとき $t = \sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$.

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2}\,dx =$$

$\boxed{問 7.9.2}$ **定積分** $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2}\,dx$ **を計算せよ.**

$12-3x^2 \geq 0$ なので, $x^2-4 \leq 0$, $(x+2)(x-2) \leq 0$, $-2 \leq x \leq 2$, $-1 \leq \dfrac{x}{2} \leq 1$. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{2}$ とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{x}{2}$ なので $x = 2\sin t$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{12-3x^2} &= \sqrt{12-3(2\sin t)^2} = \sqrt{12-12\sin^2 t} \\ &= \sqrt{12}\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\sqrt{3}\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 2\sqrt{3}\cos t\ .\end{aligned}$$

$x = 2\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 2\cos t$ なので $dx = 2\cos t\,dt$. $x=-1$ のとき $t = \sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$. $x = \sqrt{3}$ のとき $t = \sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$.

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{3}\cdot 2\cos t \cdot 2\cos t\,dt = 4\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t\,dt$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2}\,dx &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{3}\cdot 2\cos t\cdot 2\cos t\,dt = 4\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t\,dt \\
&= 2\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos 2t)\,dt = 2\sqrt{3}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= 2\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right) \\
&= 3+\sqrt{3}\pi\ .
\end{aligned}
$$

終

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16 - x^2}\, dx$ を計算する.

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx$ を計算する. $\sqrt{16-x^2}$ は実数なので, $16-x^2 \geq 0$,

$x^2-16 \leq 0$, $(x+\quad)(x-\quad) \leq 0$, $\qquad \leq x \leq \qquad$.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx$ を計算する．$\sqrt{16-x^2}$ は実数なので，$16-x^2 \geq 0$ ，$x^2-16 \leq 0$ ，$(x+4)(x-4) \leq 0$ ，$-4 \leq x \leq 4$ ．

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx$ を計算する．$\sqrt{16-x^2}$ は実数なので，$16-x^2 \geq 0$ ，$x^2-16 \leq 0$ ，$(x+4)(x-4) \leq 0$ ，$-4 \leq x \leq 4$ ．$-1 \leq \dfrac{x}{4} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{4}$ の値がある．

$-1 \leq X \leq 1$ である各実数 X に対して $\sin^{-1} X$ の値がある．

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx$ を計算する．$\sqrt{16-x^2}$ は実数なので，$16-x^2 \geq 0$ ，$x^2-16 \leq 0$ ，$(x+4)(x-4) \leq 0$ ，$-4 \leq x \leq 4$ ．$-1 \leq \dfrac{x}{4} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{4}$ の値がある．変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{4}$ （ $-4 \leq x \leq 4$ ）とおく．

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx$ を計算する． $\sqrt{16-x^2}$ は実数なので， $16-x^2 \geq 0$ ， $x^2-16 \leq 0$ ， $(x+4)(x-4) \leq 0$ ， $-4 \leq x \leq 4$ ． $-1 \leq \dfrac{x}{4} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{4}$ の値がある．変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{4}$ （ $-4 \leq x \leq 4$ ）とおく．

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{4}\right) = \dfrac{x}{4}$ なので $x = 4\sin t$ ．

$-1 \leq X \leq 1$ である各実数 X について $\sin(\sin^{-1}X) = X$ ．

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx$ を計算する．$\sqrt{16-x^2}$ は実数なので，$16-x^2 \geq 0$ ，$x^2-16 \leq 0$ ，$(x+4)(x-4) \leq 0$ ，$-4 \leq x \leq 4$ ．$-1 \leq \dfrac{x}{4} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{4}$ の値がある．変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{4}$ （$-4 \leq x \leq 4$）とおく．
$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{4}\right) = \dfrac{x}{4}$ なので $x = 4\sin t$ ．$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{4} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ ，

$-1 \leq X \leq 1$ である各実数 X について $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} X \leq \dfrac{\pi}{2}$ ．

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx$ を計算する．$\sqrt{16-x^2}$ は実数なので，$16-x^2 \geq 0$ ，$x^2-16 \leq 0$ ，$(x+4)(x-4) \leq 0$ ，$-4 \leq x \leq 4$ ．$-1 \leq \dfrac{x}{4} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{4}$ の値がある．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{4}$ （ $-4 \leq x \leq 4$ ）とおく．

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{4}\right) = \dfrac{x}{4}$ なので $x = 4\sin t$ ．$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{4} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ ，よって $\cos t \geq 0$ なので，

$\boxed{例}$ **定積分** $\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx$ を計算する．$\sqrt{16-x^2}$ は実数なので，$16-x^2 \geq 0$ ，$x^2-16 \leq 0$ ，$(x+4)(x-4) \leq 0$ ，$-4 \leq x \leq 4$ ．$-1 \leq \dfrac{x}{4} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{4}$ の値がある．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{4}$ （$-4 \leq x \leq 4$ ）とおく．$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{4}\right) = \dfrac{x}{4}$ なので $x = 4\sin t$ ．$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{4} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ ，よって $\cos t \geq 0$ なので，

$$\begin{aligned}\sqrt{16-x^2} &= \sqrt{16-\left(4\sin t\right)^2} = \sqrt{16-16\sin^2 t} = \sqrt{16}\sqrt{1-\sin^2 t} = 4\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 4\cos t\ .\end{aligned}$$

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx$ を計算する．$\sqrt{16-x^2}$ は実数なので，$16-x^2 \geq 0$ ，$x^2-16 \leq 0$ ，$(x+4)(x-4) \leq 0$ ，$-4 \leq x \leq 4$ ．$-1 \leq \dfrac{x}{4} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{4}$ の値がある．変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{4}$ （ $-4 \leq x \leq 4$ ）とおく．
$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{4}\right) = \dfrac{x}{4}$ なので $x = 4\sin t$ ．$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{4} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ ，よって $\cos t \geq 0$ なので，

$$\begin{aligned}\sqrt{16-x^2} &= \sqrt{16-\left(4\sin t\right)^2} = \sqrt{16-16\sin^2 t} = \sqrt{16}\sqrt{1-\sin^2 t} = 4\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 4\cos t \ .\end{aligned}$$

$x = 4\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 4\cos t$ なので $dx = 4\cos t\,dt$ ．

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx$ を計算する．$\sqrt{16-x^2}$ は実数なので，$16-x^2 \geq 0$ ，$x^2-16 \leq 0$ ，$(x+4)(x-4) \leq 0$ ，$-4 \leq x \leq 4$ ．$-1 \leq \dfrac{x}{4} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{4}$ の値がある．変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{4}$ （$-4 \leq x \leq 4$ ）とおく．

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{4}\right) = \dfrac{x}{4}$ なので $x = 4\sin t$ ．$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{4} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ ，よって $\cos t \geq 0$ なので，

$$\begin{aligned}\sqrt{16-x^2} &= \sqrt{16-\left(4\sin t\right)^2} = \sqrt{16-16\sin^2 t} = \sqrt{16}\sqrt{1-\sin^2 t} = 4\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 4\cos t\ .\end{aligned}$$

$x = 4\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 4\cos t$ なので $dx = 4\cos t\,dt$ ．$x=0$ のとき $t = \sin^{-1}0 = 0$ ．$x=3$ のとき $t=\sin^{-1}\dfrac{3}{4}$ ．この式は簡単にできない．

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx$ を計算する．$\sqrt{16-x^2}$ は実数なので，$16-x^2 \geq 0$ ，
$x^2-16 \leq 0$ ， $(x+4)(x-4) \leq 0$ ， $-4 \leq x \leq 4$ ． $-1 \leq \dfrac{x}{4} \leq 1$ なので
$\sin^{-1}\dfrac{x}{4}$ の値がある．変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{4}$ （ $-4 \leq x \leq 4$ ）とおく．
$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{4}\right) = \dfrac{x}{4}$ なので $x = 4\sin t$ ． $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{4} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので
$-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ ，よって $\cos t \geq 0$ なので，

$$\begin{aligned}\sqrt{16-x^2} &= \sqrt{16-\left(4\sin t\right)^2} = \sqrt{16-16\sin^2 t} = \sqrt{16}\sqrt{1-\sin^2 t} = 4\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 4\cos t\ .\end{aligned}$$

$x = 4\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 4\cos t$ なので $dx = 4\cos t\,dt$ ． $x=0$ のとき
$t = \sin^{-1}0 = 0$ ． $x=3$ のとき $t = \sin^{-1}\dfrac{3}{4}$ ．

$$\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx = \int_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}} 4\cos t \cdot 4\cos t\,dt = 16\int_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}} \cos^2 t\,dt$$

$$\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx = \int_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}} 4\cos t \cdot 4\cos t\,dt = 16\int_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}} \cos^2 t\,dt$$

$$= 16\int_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt \qquad \cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)$$

$$\begin{aligned}\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx &= \int_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}} 4\cos t \cdot 4\cos t\,dt = 16\int_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}} \cos^2 t\,dt \\ &= 16\int_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt = 8\int_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}} (1+\cos 2t)\,dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx &= \int_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}} 4\cos t \cdot 4\cos t\,dt = 16\int_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}} \cos^2 t\,dt \\
&= 16\int_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt = 8\int_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}} (1+\cos 2t)\,dt \\
&= 8\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}} = 8\left\{\sin^{-1}\frac{3}{4} + \frac{\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)}{2} - 0\right\} \\
&= 8\sin^{-1}\frac{3}{4} + 4\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \quad .
\end{aligned}
$$

$$\int_0^3 \sqrt{16 - x^2}\, dx \;=\; 8 \sin^{-1} \frac{3}{4} \;+ 4 \sin\!\left(2 \sin^{-1} \frac{3}{4}\right) \quad .$$

$$\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx \;=\; 8\sin^{-1}\frac{3}{4} + 4\sin\!\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \quad .$$

$\sin\!\left(2\sin^{-1}\dfrac{3}{4}\right)$ を計算する.

$$\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\, dx \;=\; 8\sin^{-1}\frac{3}{4} + 4\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;.$$

$\sin\left(2\sin^{-1}\dfrac{3}{4}\right)$ を計算する.

$$\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;=\; 2\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;.$$

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$

$$\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx \;=\; 8\sin^{-1}\frac{3}{4} + 4\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \quad .$$

$\sin\left(2\sin^{-1}\dfrac{3}{4}\right)$ を計算する.

$$\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;=\; 2\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \quad .$$

まず

$$\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;=\; \frac{3}{4} \quad .$$

$$\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx \;=\; 8\sin^{-1}\frac{3}{4} + 4\sin\!\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;\; .$$

$\sin\!\left(2\sin^{-1}\dfrac{3}{4}\right)$ を計算する.

$$\sin\!\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;=\; 2\sin\!\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\cos\!\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;\; .$$

まず

$$\sin\!\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;=\; \frac{3}{4} \;\; .$$

更に,

$$\cos^2\!\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;=\; 1-\sin^2\!\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;=\; 1-\left(\frac{3}{4}\right)^2 \;=\; \frac{7}{16} \;\; ,$$

$$\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx \;=\; 8\sin^{-1}\frac{3}{4} + 4\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;\;.$$

$\sin\left(2\sin^{-1}\dfrac{3}{4}\right)$ を計算する.

$$\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;=\; 2\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;\;.$$

まず

$$\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;=\; \frac{3}{4} \;\;.$$

更に,

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;=\; 1-\sin^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;=\; 1-\left(\frac{3}{4}\right)^2 \;=\; \frac{7}{16} \;\;,$$

$-\dfrac{\pi}{2} \le \sin^{-1}\dfrac{3}{4} \le \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{3}{4}\right) \ge 0$ なので

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;=\; \sqrt{\frac{7}{16}} \;=\; \frac{\sqrt{7}}{4} \;\;.$$

$$\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx \;=\; 8\sin^{-1}\frac{3}{4} + 4\sin\!\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;.$$

$\sin\!\left(2\sin^{-1}\dfrac{3}{4}\right)$ を計算する.

$$\sin\!\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;=\; 2\sin\!\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\cos\!\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;.$$

まず

$$\sin\!\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;=\; \frac{3}{4} \;.$$

更に,

$$\cos^2\!\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;=\; 1-\sin^2\!\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;=\; 1-\left(\frac{3}{4}\right)^2 \;=\; \frac{7}{16} \;,$$

$-\dfrac{\pi}{2} \le \sin^{-1}\dfrac{3}{4} \le \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\!\left(\sin^{-1}\dfrac{3}{4}\right) \ge 0$ なので

$$\cos\!\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;=\; \sqrt{\frac{7}{16}} \;=\; \frac{\sqrt{7}}{4} \;.$$

よって

$$\sin\!\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;=\; 2\sin\!\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\cos\!\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;=\; 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4} \;=\; \frac{3}{8}\sqrt{7} \;.$$

故に

$$\begin{aligned}\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx &= 8\sin^{-1}\frac{3}{4} + 4\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \\ &= 8\sin^{-1}\frac{3}{4} + 4\cdot\frac{3}{8}\sqrt{7} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{7} + 8\sin^{-1}\frac{3}{4} \quad .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問7.9.3}$ 定積分 $\int_0^4 \sqrt{25-x^2}\,dx$ を計算せよ.

≥ 0 なので, ≤ 0 , $(x+\quad)(x-\quad) \leq 0$, $\leq x \leq$,
$-1 \leq \quad \leq 1$. 変数 t を $t =$ とおく. $\sin t = \sin\left(\qquad \right) =$ なので $x =$. $\leq t \leq$ より $\cos t \quad 0$ なので,

$\sqrt{25-x^2} =$

$x =$ より $\dfrac{dx}{dt} =$ なので $dx = \qquad dt$. $x = 0$ のとき
$t = \qquad = \quad$. $x = 4$ のとき $t =$.

$\int_0^4 \sqrt{25-x^2}\,dx =$

$\boxed{\text{問}7.9.3}$ **定積分** $\int_0^4 \sqrt{25-x^2}\,dx$ **を計算せよ.**

$25-x^2 \geq 0$ なので, $x^2-25 \leq 0$, $(x+5)(x-5) \leq 0$, $-5 \leq x \leq 5$, $-1 \leq \dfrac{x}{5} \leq 1$. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{5}$ とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{5}\right) = \dfrac{x}{5}$ なので $x = 5\sin t$. $\qquad \leq t \leq \qquad$ より $\cos t \quad 0$ なので,

$$\sqrt{25-x^2} =$$

$x =$ より $\dfrac{dx}{dt} =$ なので $dx = \qquad dt$. $x=0$ のとき $t = \qquad = \quad$. $x=4$ のとき $t = \qquad$.

$$\int_0^4 \sqrt{25-x^2}\,dx =$$

$\boxed{\text{問}7.9.3}$ 定積分 $\int_0^4 \sqrt{25-x^2}\,dx$ を計算せよ.

$25-x^2 \geq 0$ なので, $x^2-25 \leq 0$, $(x+5)(x-5) \leq 0$, $-5 \leq x \leq 5$, $-1 \leq \dfrac{x}{5} \leq 1$. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{5}$ とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{5}\right) = \dfrac{x}{5}$ なので $x = 5\sin t$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$\sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-(5\sin t)^2} = \sqrt{25-25\sin^2 t} = 5\sqrt{1-\sin^2 t} = 5\sqrt{\cos^2 t}$$
$$= 5\cos t\ .$$

$x =$ 　　　　 より $\dfrac{dx}{dt} =$ 　　　　 なので $dx =$ 　　　　 dt . $x = 0$ のとき $t =$ 　　　　 $=$ 　 . $x = 4$ のとき $t =$ 　　　　 .

$$\int_0^4 \sqrt{25-x^2}\,dx =$$

$\boxed{問7.9.3}$ 定積分 $\int_0^4 \sqrt{25-x^2}\,dx$ を計算せよ.

$25-x^2 \geq 0$ なので, $x^2-25 \leq 0$, $(x+5)(x-5) \leq 0$, $-5 \leq x \leq 5$, $-1 \leq \dfrac{x}{5} \leq 1$. 変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{5}$ とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{5}\right) = \dfrac{x}{5}$ なので $x = 5\sin t$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$\sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-(5\sin t)^2} = \sqrt{25-25\sin^2 t} = 5\sqrt{1-\sin^2 t} = 5\sqrt{\cos^2 t}$$
$$= 5\cos t \ .$$

$x = 5\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 5\cos t$ なので $dx = 5\cos t\,dt$. $x=0$ のとき $t = \sin^{-1} 0 = 0$. $x=4$ のとき $t = \sin^{-1}\dfrac{4}{5}$.

$$\int_0^4 \sqrt{25-x^2}\,dx = \int_0^{\sin^{-1}\frac{4}{5}} 5\cos t \cdot 5\cos t\,dt = 25\int_0^{\sin^{-1}\frac{4}{5}} \cos^2 t\,dt$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^4 \sqrt{25-x^2}\,dx &= \int_0^{\sin^{-1}\frac{4}{5}} 5\cos t \cdot 5\cos t\,dt = 25\int_0^{\sin^{-1}\frac{4}{5}} \cos^2 t\,dt \\
&= 25\int_0^{\sin^{-1}\frac{4}{5}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{25}{2}\int_0^{\sin^{-1}\frac{4}{5}} (1+\cos 2t)\,dt \\
&= \frac{25}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\sin^{-1}\frac{4}{5}} = \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} + \frac{25}{4}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{4}{5}\right) \\
&= \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} + \frac{25}{2}\sin\left(\sin^{-1}\frac{4}{5}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{4}{5}\right) \quad .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^4 \sqrt{25-x^2}\,dx &= \int_0^{\sin^{-1}\frac{4}{5}} 5\cos t\cdot 5\cos t\,dt = 25\int_0^{\sin^{-1}\frac{4}{5}} \cos^2 t\,dt \\
&= 25\int_0^{\sin^{-1}\frac{4}{5}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{25}{2}\int_0^{\sin^{-1}\frac{4}{5}} (1+\cos 2t)\,dt \\
&= \frac{25}{2}\Big[t+\frac{1}{2}\sin 2t\Big]_0^{\sin^{-1}\frac{4}{5}} = \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} + \frac{25}{4}\sin\Big(2\sin^{-1}\frac{4}{5}\Big) \\
&= \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} + \frac{25}{2}\sin\Big(\sin^{-1}\frac{4}{5}\Big)\cos\Big(\sin^{-1}\frac{4}{5}\Big)\ .
\end{aligned}
$$

ここで， $\sin\Big(\sin^{-1}\frac{4}{5}\Big) = \frac{4}{5}$ ， また，

$$
\cos^2\Big(\sin^{-1}\frac{4}{5}\Big) = 1-\Big\{\sin\Big(\sin^{-1}\frac{4}{5}\Big)\Big\}^2 = 1-\Big(\frac{4}{5}\Big)^2 = \frac{9}{25}\ ,
$$

$-\frac{\pi}{2} \le \sin^{-1}\frac{4}{5} \le \frac{\pi}{2}$ より $\cos\Big(\sin^{-1}\frac{4}{5}\Big) \ge 0$ なので

$$
\cos\Big(\sin^{-1}\frac{4}{5}\Big) = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}\ .
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5}+\frac{25}{2}\sin\left(\sin^{-1}\frac{4}{5}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{4}{5}\right) &= \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5}+\frac{25}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} \\
&= \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5}+6\ \ .
\end{aligned}
$$

故に $\int_0^4\sqrt{25-x^2}\,dx=6+\dfrac{25}{2}\sin^{-1}\dfrac{4}{5}$.

終