

7. 拡充1 指数関数が現れる式の積分法

指数関数 e^x が現れる式を積分するには、 e^x あるいは e^x の 1 次式を別の変数に置換する. 定数 a, b に対して $y = ae^x + b$ とおくと、 $\frac{dy}{dx} = ae^x = y - b$

なので、 $dx = \frac{dy}{y - b}$.

例 不定積分 $\int \frac{2}{3e^x + 2} dx$ を計算する.

例 不定積分 $\int \frac{2}{3e^x + 2} dx$ を計算する. $e^x > 0$ なので $3e^x + 2 > 0$.

例 不定積分 $\int \frac{2}{3e^x + 2} dx$ を計算する. $e^x > 0$ なので $3e^x + 2 > 0$. 変数 y

を $y = 3e^x + 2$ とおく.

例 不定積分 $\int \frac{2}{3e^x + 2} dx$ を計算する. $e^x > 0$ なので $3e^x + 2 > 0$. 変数 y を $y = 3e^x + 2$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 3e^x = y - 2$ なので $dx = \frac{1}{y-2} dy$.

例 不定積分 $\int \frac{2}{3e^x + 2} dx$ を計算する. $e^x > 0$ なので $3e^x + 2 > 0$. 変数 y を $y = 3e^x + 2$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 3e^x = y - 2$ なので $dx = \frac{1}{y-2} dy$. 積分定数を C_0, C とおく.

$$\int \frac{2}{3e^x + 2} dx = \int \frac{2}{y} \frac{1}{y-2} dy$$

例 不定積分 $\int \frac{2}{3e^x + 2} dx$ を計算する. $e^x > 0$ なので $3e^x + 2 > 0$. 変数 y を $y = 3e^x + 2$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 3e^x = y - 2$ なので $dx = \frac{1}{y-2} dy$. 積分定数を C_0, C とおく.

$$\int \frac{2}{3e^x + 2} dx = \int \frac{2}{y} \frac{1}{y-2} dy = \int \left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y} \right) dy$$

等式 $\frac{1}{y} \frac{2}{y-2} = \frac{a}{y} + \frac{b}{y-2}$ が y に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定めると $a = -1$ かつ $b = 1$.

例 不定積分 $\int \frac{2}{3e^x + 2} dx$ を計算する. $e^x > 0$ なので $3e^x + 2 > 0$. 変数 y を $y = 3e^x + 2$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 3e^x = y - 2$ なので $dx = \frac{1}{y-2} dy$. 積分定数を C_0, C とおく.

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{3e^x + 2} dx &= \int \frac{2}{y} \frac{1}{y-2} dy = \int \left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y} \right) dy \\ &= \ln|y-2| - \ln|y| + C_0 \\ &= \ln|3e^x| - \ln|3e^x + 2| + C_0 \\ &= \ln(3e^x) - \ln(3e^x + 2) + C_0\end{aligned}$$

任意の実数 x について, $3e^x + 2 > 0$ なので $|3e^x + 2| = 3e^x + 2$.

例 不定積分 $\int \frac{2}{3e^x + 2} dx$ を計算する. $e^x > 0$ なので $3e^x + 2 > 0$. 変数 y を $y = 3e^x + 2$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 3e^x = y - 2$ なので $dx = \frac{1}{y-2} dy$. 積分定数を C_0, C とおく.

$$\int \frac{2}{3e^x + 2} dx = \int \frac{2}{y} \frac{1}{y-2} dy = \int \left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y} \right) dy$$

$$= \ln|y-2| - \ln|y| + C_0$$

$$= \ln|3e^x| - \ln|3e^x + 2| + C_0$$

$$= \ln(3e^x) - \ln(3e^x + 2) + C_0$$

$$= \ln 3 + \ln e^x - \ln(3e^x + 2) + C_0 \quad \ln e^x = \log_e e^x = x$$

$$= x - \ln(3e^x + 2) + C \quad \ln 3 + C_0 \text{ の値は一定なので定数 } C \text{ に置き換える.}$$

例 不定積分 $\int \frac{2}{3e^x + 2} dx$ を計算する. $e^x > 0$ なので $3e^x + 2 > 0$. 変数 y を $y = 3e^x + 2$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 3e^x = y - 2$ なので $dx = \frac{1}{y-2} dy$. 積分定数を C_0, C とおく.

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{3e^x + 2} dx &= \int \frac{2}{y} \frac{1}{y-2} dy = \int \left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y} \right) dy \\ &= \ln|y-2| - \ln|y| + C_0 \\ &= \ln|3e^x| - \ln|3e^x + 2| + C_0 \\ &= \ln(3e^x) - \ln(3e^x + 2) + C_0 \\ &= \ln 3 + \ln e^x - \ln(3e^x + 2) + C_0 \\ &= x - \ln(3e^x + 2) + C .\end{aligned}$$

終

問7.拡充1 不定積分 $\int \frac{6}{4e^x + 3e^{-x}} dx$ を計算せよ.

変数 y を $y =$ とおく. $\frac{dy}{dx} =$ = なので $dx =$ dy . 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{6}{4e^x + 3e^{-x}} dx =$$

問7.拡充1 不定積分 $\int \frac{6}{4e^x + 3e^{-x}} dx$ を計算せよ.

変数 y を $y = e^x$ とおく. $\frac{dy}{dx} = e^x = y$ なので $dx = \frac{1}{y} dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{6}{4e^x + 3e^{-x}} dx =$$

問7.拡充1 不定積分 $\int \frac{6}{4e^x + 3e^{-x}} dx$ を計算せよ.

変数 y を $y = e^x$ とおく. $\frac{dy}{dx} = e^x = y$ なので $dx = \frac{1}{y} dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{6}{4e^x + 3e^{-x}} dx = \int \frac{6}{4y + \frac{3}{y}} \frac{1}{y} dy = \int \frac{6}{4y^2 + 3} dy$$
$$=$$

問7.拡充1 不定積分 $\int \frac{6}{4e^x + 3e^{-x}} dx$ を計算せよ.

変数 y を $y = e^x$ とおく. $\frac{dy}{dx} = e^x = y$ なので $dx = \frac{1}{y} dy$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \frac{6}{4e^x + 3e^{-x}} dx &= \int \frac{6}{4y + \frac{3}{y}} \frac{1}{y} dy = \int \frac{6}{4y^2 + 3} dy \\ &= \frac{6}{4} \int \frac{1}{y^2 + \frac{3}{4}} dy = \frac{3}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2y}{\sqrt{3}} + C \\ &= \sqrt{3} \tan^{-1} \frac{2e^x}{\sqrt{3}} + C .\end{aligned}$$

終