

7. 拡充2 指数関数と正弦関数・余弦関数との積の積分法

定数 a, b に対して不定積分 $\int e^{ax} \sin bx dx$ 及び $\int e^{ax} \cos bx dx$ を考える.

例 不定積分 $\int e^{3x} \sin 4x dx$ と $\int e^{3x} \cos 4x dx$ とを計算する.

例 不定積分 $\int e^{3x} \sin 4x dx$ と $\int e^{3x} \cos 4x dx$ とを計算する. 部分積分法により $\int e^{3x} \sin 4x dx$ を計算する.

例 不定積分 $\int e^{3x} \sin 4x dx$ と $\int e^{3x} \cos 4x dx$ とを計算する. 部分積分法により $\int e^{3x} \sin 4x dx$ を計算する. $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x}$ (積分定数略), $\frac{d}{dx} \sin 4x = 4 \cos 4x$ なので,

例 不定積分 $\int e^{3x} \sin 4x dx$ と $\int e^{3x} \cos 4x dx$ とを計算する. 部分積分法により $\int e^{3x} \sin 4x dx$ を計算する. $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x}$ (積分定数略), $\frac{d}{dx} \sin 4x = 4 \cos 4x$ なので,

$$\begin{aligned}\int e^{3x} \sin 4x dx &= \frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{1}{3} \int e^{3x} 4 \cos 4x dx \\ &= \frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \int e^{3x} \cos 4x dx .\end{aligned}$$

例 不定積分 $\int e^{3x} \sin 4x dx$ と $\int e^{3x} \cos 4x dx$ とを計算する. 部分積分法により $\int e^{3x} \sin 4x dx$ を計算する. $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x}$ (積分定数略), $\frac{d}{dx} \sin 4x = 4 \cos 4x$ なので,

$$\begin{aligned} \int e^{3x} \sin 4x dx &= \frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{1}{3} \int e^{3x} 4 \cos 4x dx \\ &= \frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \int e^{3x} \cos 4x dx . \end{aligned}$$

部分積分法により $\int e^{3x} \cos 4x dx$ を計算する.

【例】不定積分 $\int e^{3x} \sin 4x dx$ と $\int e^{3x} \cos 4x dx$ とを計算する. 部分積分法により $\int e^{3x} \sin 4x dx$ を計算する. $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x}$ (積分定数略), $\frac{d}{dx} \sin 4x = 4 \cos 4x$ なので,

$$\begin{aligned}\int e^{3x} \sin 4x dx &= \frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{1}{3} \int e^{3x} 4 \cos 4x dx \\ &= \frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \int e^{3x} \cos 4x dx .\end{aligned}$$

部分積分法により $\int e^{3x} \cos 4x dx$ を計算する. $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x}$ (積分定数略), $\frac{d}{dx} \cos 4x = -4 \sin 4x$ なので,

【例】不定積分 $\int e^{3x} \sin 4x dx$ と $\int e^{3x} \cos 4x dx$ とを計算する. 部分積分法により $\int e^{3x} \sin 4x dx$ を計算する. $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x}$ (積分定数略), $\frac{d}{dx} \sin 4x = 4 \cos 4x$ なので,

$$\begin{aligned}\int e^{3x} \sin 4x dx &= \frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{1}{3} \int e^{3x} 4 \cos 4x dx \\ &= \frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \int e^{3x} \cos 4x dx .\end{aligned}$$

部分積分法により $\int e^{3x} \cos 4x dx$ を計算する. $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x}$ (積分定数略), $\frac{d}{dx} \cos 4x = -4 \sin 4x$ なので,

$$\begin{aligned}\int e^{3x} \cos 4x dx &= \frac{1}{3}e^{3x} \cos 4x - \frac{1}{3} \int e^{3x} (-4 \sin 4x) dx \\ &= \frac{1}{3}e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{3} \int e^{3x} \sin 4x dx .\end{aligned}$$

こうして次の2つの等式が導かれる：

$$\int e^{3x} \sin 4x dx = \frac{1}{3} e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \int e^{3x} \cos 4x dx ,$$

$$\int e^{3x} \cos 4x dx = \frac{1}{3} e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{3} \int e^{3x} \sin 4x dx .$$

こうして次の2つの等式が導かれる：

$$\int e^{3x} \sin 4x dx = \frac{1}{3} e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \int e^{3x} \cos 4x dx ,$$

$$\int e^{3x} \cos 4x dx = \frac{1}{3} e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{3} \int e^{3x} \sin 4x dx .$$

これらの等式より,

$$\int e^{3x} \sin 4x dx = \frac{1}{3} e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \int e^{3x} \cos 4x dx$$

こうして次の2つの等式が導かれる：

$$\int e^{3x} \sin 4x dx = \frac{1}{3} e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \int e^{3x} \cos 4x dx ,$$

$$\int e^{3x} \cos 4x dx = \frac{1}{3} e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{3} \int e^{3x} \sin 4x dx .$$

これらの等式より,

$$\begin{aligned} \int e^{3x} \sin 4x dx &= \frac{1}{3} e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \int e^{3x} \cos 4x dx \\ &= \frac{1}{3} e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3} e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{3} \int e^{3x} \sin 4x dx \right) \end{aligned}$$

こうして次の2つの等式が導かれる：

$$\int e^{3x} \sin 4x dx = \frac{1}{3} e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \int e^{3x} \cos 4x dx ,$$

$$\int e^{3x} \cos 4x dx = \frac{1}{3} e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{3} \int e^{3x} \sin 4x dx .$$

これらの等式より,

$$\begin{aligned} \int e^{3x} \sin 4x dx &= \frac{1}{3} e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \int e^{3x} \cos 4x dx \\ &= \frac{1}{3} e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3} e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{3} \int e^{3x} \sin 4x dx \right) \\ &= \frac{1}{3} e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{9} e^{3x} \cos 4x - \frac{16}{9} \int e^{3x} \sin 4x dx . \end{aligned}$$

$$\int e^{3x} \sin 4x dx = \frac{1}{3} e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{9} e^{3x} \cos 4x - \frac{16}{9} \int e^{3x} \sin 4x dx .$$

$$\int e^{3x} \sin 4x dx = \frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{9}e^{3x} \cos 4x - \frac{16}{9} \int e^{3x} \sin 4x dx .$$

この等式の両辺に $\frac{16}{9} \int e^{3x} \sin 4x dx$ を加える．積分定数を B_1, C_1 とおく．

$$\int e^{3x} \sin 4x dx + \frac{16}{9} \int e^{3x} \sin 4x dx = \frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{9}e^{3x} \cos 4x + B_1 ,$$

$$\int e^{3x} \sin 4x dx = \frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{9}e^{3x} \cos 4x - \frac{16}{9} \int e^{3x} \sin 4x dx .$$

この等式の両辺に $\frac{16}{9} \int e^{3x} \sin 4x dx$ を加える．積分定数を B_1, C_1 とおく．

$$\int e^{3x} \sin 4x dx + \frac{16}{9} \int e^{3x} \sin 4x dx = \frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{9}e^{3x} \cos 4x + B_1 ,$$

$$\frac{25}{9} \int e^{3x} \sin 4x dx = e^{3x} \left(\frac{1}{3} \sin 4x - \frac{4}{9} \cos 4x \right) + B_1 ,$$

$$\int e^{3x} \sin 4x dx = \frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{9}e^{3x} \cos 4x - \frac{16}{9} \int e^{3x} \sin 4x dx .$$

この等式の両辺に $\frac{16}{9} \int e^{3x} \sin 4x dx$ を加える．積分定数を B_1, C_1 とおく．

$$\int e^{3x} \sin 4x dx + \frac{16}{9} \int e^{3x} \sin 4x dx = \frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{9}e^{3x} \cos 4x + B_1 ,$$

$$\frac{25}{9} \int e^{3x} \sin 4x dx = e^{3x} \left(\frac{1}{3} \sin 4x - \frac{4}{9} \cos 4x \right) + B_1 ,$$

$$\begin{aligned} \int e^{3x} \sin 4x dx &= \frac{9}{25} \cdot e^{3x} \left(\frac{1}{3} \sin 4x - \frac{4}{9} \cos 4x \right) + C_1 \\ &= \frac{e^{3x}}{25} (3 \sin 4x - 4 \cos 4x) + C_1 . \end{aligned}$$

また、先に導かれた 2 つの等式

$$\int e^{3x} \sin 4x dx = \frac{1}{3} e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \int e^{3x} \cos 4x dx ,$$

$$\int e^{3x} \cos 4x dx = \frac{1}{3} e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{3} \int e^{3x} \sin 4x dx$$

より,

また、先に導かれた 2 つの等式

$$\int e^{3x} \sin 4x dx = \frac{1}{3} e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \int e^{3x} \cos 4x dx ,$$

$$\int e^{3x} \cos 4x dx = \frac{1}{3} e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{3} \int e^{3x} \sin 4x dx$$

より,

$$\int e^{3x} \cos 4x dx = \frac{1}{3} e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{3} \int e^{3x} \sin 4x dx$$

また、先に導かれた 2 つの等式

$$\int e^{3x} \sin 4x dx = \frac{1}{3} e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \int e^{3x} \cos 4x dx ,$$

$$\int e^{3x} \cos 4x dx = \frac{1}{3} e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{3} \int e^{3x} \sin 4x dx$$

より,

$$\begin{aligned} \int e^{3x} \cos 4x dx &= \frac{1}{3} e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{3} \int e^{3x} \sin 4x dx \\ &= \frac{1}{3} e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3} e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \int e^{3x} \cos 4x dx \right) \end{aligned}$$

また、先に導かれた 2 つの等式

$$\int e^{3x} \sin 4x dx = \frac{1}{3} e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \int e^{3x} \cos 4x dx ,$$

$$\int e^{3x} \cos 4x dx = \frac{1}{3} e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{3} \int e^{3x} \sin 4x dx$$

より,

$$\begin{aligned} \int e^{3x} \cos 4x dx &= \frac{1}{3} e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{3} \int e^{3x} \sin 4x dx \\ &= \frac{1}{3} e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3} e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \int e^{3x} \cos 4x dx \right) \\ &= \frac{1}{3} e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{9} e^{3x} \sin 4x - \frac{16}{9} \int e^{3x} \cos 4x dx . \end{aligned}$$

$$\int e^{3x} \cos 4x dx = \frac{1}{3} e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{9} e^{3x} \sin 4x - \frac{16}{9} \int e^{3x} \cos 4x dx .$$

$$\int e^{3x} \cos 4x dx = \frac{1}{3}e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{9}e^{3x} \sin 4x - \frac{16}{9} \int e^{3x} \cos 4x dx .$$

この等式の両辺に $\frac{16}{9} \int e^{3x} \cos 4x dx$ を加える．積分定数を B_2, C_2 とおく．

$$\int e^{3x} \cos 4x dx + \frac{16}{9} \int e^{3x} \cos 4x dx = \frac{1}{3}e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{9}e^{3x} \sin 4x + B_2 ,$$

$$\int e^{3x} \cos 4x dx = \frac{1}{3}e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{9}e^{3x} \sin 4x - \frac{16}{9} \int e^{3x} \cos 4x dx .$$

この等式の両辺に $\frac{16}{9} \int e^{3x} \cos 4x dx$ を加える．積分定数を B_2, C_2 とおく．

$$\int e^{3x} \cos 4x dx + \frac{16}{9} \int e^{3x} \cos 4x dx = \frac{1}{3}e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{9}e^{3x} \sin 4x + B_2 ,$$

$$\frac{25}{9} \int e^{3x} \cos 4x dx = e^{3x} \left(\frac{4}{9} \sin 4x + \frac{1}{3} \cos 4x \right) + B_2 ,$$

$$\int e^{3x} \cos 4x dx = \frac{1}{3}e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{9}e^{3x} \sin 4x - \frac{16}{9} \int e^{3x} \cos 4x dx .$$

この等式の両辺に $\frac{16}{9} \int e^{3x} \cos 4x dx$ を加える．積分定数を B_2, C_2 とおく．

$$\int e^{3x} \cos 4x dx + \frac{16}{9} \int e^{3x} \cos 4x dx = \frac{1}{3}e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{9}e^{3x} \sin 4x + B_2 ,$$

$$\frac{25}{9} \int e^{3x} \cos 4x dx = e^{3x} \left(\frac{4}{9} \sin 4x + \frac{1}{3} \cos 4x \right) + B_2 ,$$

$$\begin{aligned} \int e^{3x} \cos 4x dx &= \frac{9}{25} \cdot e^{3x} \left(\frac{4}{9} \sin 4x + \frac{1}{3} \cos 4x \right) + C_2 \\ &= \frac{e^{3x}}{25} (4 \sin 4x + 3 \cos 4x) + C_2 . \end{aligned}$$

終

問7.拡充2 不定積分 $\int e^{2x} \sin 3x dx$ と $\int e^{2x} \cos 3x dx$ とを計算せよ.

$$\int e^{2x} \sin 3x dx = e^{2x} \sin 3x - \int e^{2x} \cos 3x dx = e^{2x} \sin 3x + \int e^{2x} \cos 3x dx .$$

$$\int e^{2x} \cos 3x dx = e^{2x} \cos 3x - \int e^{2x} (-\sin 3x) dx = e^{2x} \cos 3x - \int e^{2x} \sin 3x dx .$$

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \sin 3x dx &= e^{2x} \sin 3x + \int e^{2x} \cos 3x dx \\ &= e^{2x} \sin 3x + \left(e^{2x} \cos 3x - \int e^{2x} \sin 3x dx \right) \\ &= e^{2x} \sin 3x + e^{2x} \cos 3x - \int e^{2x} \sin 3x dx . \end{aligned}$$

積分定数を B_1, C_1 とおく.

$$\int e^{2x} \sin 3x dx = e^{2x} \left(\sin 3x + \cos 3x \right) + B_1 ,$$

$$\int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{e^{2x}}{2} \left(\sin 3x - \cos 3x \right) + C_1 .$$

問7.拡充2 不定積分 $\int e^{2x} \sin 3x dx$ と $\int e^{2x} \cos 3x dx$ とを計算せよ.

$$\int e^{2x} \sin 3x dx = \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{1}{2} \int e^{2x} 3 \cos 3x dx = \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{2} \int e^{2x} \cos 3x dx .$$

$$\int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x - \frac{1}{2} \int e^{2x} (-3 \sin 3x) dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{2} \int e^{2x} \sin 3x dx .$$

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \sin 3x dx &= e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{2} \int e^{2x} \cos 3x dx \\ &= e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{2} \left(e^{2x} \cos 3x - \frac{3}{2} \int e^{2x} \sin 3x dx \right) \\ &= e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{9}{4} \int e^{2x} \sin 3x dx . \end{aligned}$$

積分定数を B_1, C_1 とおく.

$$\int e^{2x} \sin 3x dx = e^{2x} \left(\sin 3x - \frac{3}{2} \cos 3x \right) + B_1 ,$$

$$\int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{e^{2x}}{2} \left(\sin 3x + \cos 3x \right) + C_1 .$$

問7.拡充2 不定積分 $\int e^{2x} \sin 3x dx$ と $\int e^{2x} \cos 3x dx$ とを計算せよ.

$$\int e^{2x} \sin 3x dx = \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{1}{2} \int e^{2x} 3 \cos 3x dx = \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{2} \int e^{2x} \cos 3x dx .$$

$$\int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x - \frac{1}{2} \int e^{2x} (-3 \sin 3x) dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{2} \int e^{2x} \sin 3x dx .$$

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \sin 3x dx &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{2} \int e^{2x} \cos 3x dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{2} \int e^{2x} \sin 3x dx \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{4} e^{2x} \cos 3x - \frac{9}{4} \int e^{2x} \sin 3x dx . \end{aligned}$$

積分定数を B_1, C_1 とおく.

$$\int e^{2x} \sin 3x dx = e^{2x} \begin{pmatrix} \sin 3x & \cos 3x \end{pmatrix} + B_1 ,$$

$$\int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{e^{2x}}{4} \begin{pmatrix} \sin 3x & \cos 3x \end{pmatrix} + C_1 .$$

問7.拡充2 不定積分 $\int e^{2x} \sin 3x dx$ と $\int e^{2x} \cos 3x dx$ とを計算せよ.

$$\int e^{2x} \sin 3x dx = \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{1}{2} \int e^{2x} 3 \cos 3x dx = \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{2} \int e^{2x} \cos 3x dx .$$

$$\int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x - \frac{1}{2} \int e^{2x} (-3 \sin 3x) dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{2} \int e^{2x} \sin 3x dx .$$

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \sin 3x dx &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{2} \int e^{2x} \cos 3x dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{2} \int e^{2x} \sin 3x dx \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{4} e^{2x} \cos 3x - \frac{9}{4} \int e^{2x} \sin 3x dx . \end{aligned}$$

積分定数を B_1, C_1 とおく.

$$\frac{13}{4} \int e^{2x} \sin 3x dx = e^{2x} \left(\frac{1}{2} \sin 3x - \frac{3}{4} \cos 3x \right) + B_1 ,$$

$$\int e^{2x} \sin 3x dx = \frac{e^{2x}}{13} (2 \sin 3x - 3 \cos 3x) + C_1 .$$

また,

$$\begin{aligned}\int e^{2x} \cos 3x dx &= \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{2} \int e^{2x} \sin 3x dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{2} \int e^{2x} \cos 3x dx \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{4} e^{2x} \sin 3x - \frac{9}{4} \int e^{2x} \cos 3x dx .\end{aligned}$$

積分定数を B_2, C_2 とおく.

$$\frac{13}{4} \int e^{2x} \cos 3x dx = e^{2x} \left(\frac{3}{4} \sin 3x + \frac{1}{2} \cos 3x \right) + B_2 ,$$

$$\int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{e^{2x}}{13} (3 \sin 3x + 2 \cos 3x) + C_2 .$$

終

このような方法で次の積分公式が導かれる.

[公式] 定数 a, b について $a \neq 0$ または $b \neq 0$ のとき,

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C_1 \quad (C_1 \text{ は積分定数}),$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b \sin bx + a \cos bx) + C_2 \quad (C_2 \text{ は積分定数}).$$