

7. 拡充 3 正弦関数・余弦関数の冪の定積分

自然数 n に対して不定積分 $\int (\sin x)^n dx$ 及び $\int (\cos x)^n dx$ を考える.

自然数 n に対して不定積分 $\int (\sin x)^n dx$ 及び $\int (\cos x)^n dx$ を考える.

$S_n = \int (\sin x)^n dx$, $C_n = \int (\cos x)^n dx$ とおく. $n \geq 2$ とする.

$S_n = \int (\sin x)^n dx = \int (\sin x)^{n-1} \sin x dx$ として部分積分法を用いる.

$\frac{d}{dx}(\sin x)^{n-1} = (n-1)(\sin x)^{n-2} \cos x$. 積分定数を省き $\int \sin x dx = -\cos x$.

$S_n = \int (\sin x)^n dx = \int (\sin x)^{n-1} \sin x dx$ として部分積分法を用いる.

$\frac{d}{dx}(\sin x)^{n-1} = (n-1)(\sin x)^{n-2} \cos x$. 積分定数を省き $\int \sin x dx = -\cos x$.

$$S_n = \int (\sin x)^{n-1} \sin x dx$$

$S_n = \int (\sin x)^n dx = \int (\sin x)^{n-1} \sin x dx$ として部分積分法を用いる.

$\frac{d}{dx}(\sin x)^{n-1} = (n-1)(\sin x)^{n-2} \cos x$. 積分定数を省き $\int \sin x dx = -\cos x$.

$$S_n = \int (\sin x)^{n-1} \sin x dx$$

$$= (\sin x)^{n-1}(-\cos x) - \int (n-1)(\sin x)^{n-2} \cos x(-\cos x) dx$$

$$= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} \cos^2 x dx$$

$S_n = \int (\sin x)^n dx = \int (\sin x)^{n-1} \sin x dx$ として部分積分法を用いる.

$\frac{d}{dx}(\sin x)^{n-1} = (n-1)(\sin x)^{n-2} \cos x$. 積分定数を省き $\int \sin x dx = -\cos x$.

$$\begin{aligned} S_n &= \int (\sin x)^{n-1} \sin x dx \\ &= (\sin x)^{n-1}(-\cos x) - \int (n-1)(\sin x)^{n-2} \cos x(-\cos x) dx \\ &= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} \cos^2 x dx \\ &= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} (1 - \sin^2 x) dx \end{aligned}$$

$S_n = \int (\sin x)^n dx = \int (\sin x)^{n-1} \sin x dx$ として部分積分法を用いる.

$\frac{d}{dx}(\sin x)^{n-1} = (n-1)(\sin x)^{n-2} \cos x$. 積分定数を省き $\int \sin x dx = -\cos x$.

$$\begin{aligned} S_n &= \int (\sin x)^{n-1} \sin x dx \\ &= (\sin x)^{n-1}(-\cos x) - \int (n-1)(\sin x)^{n-2} \cos x(-\cos x) dx \\ &= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} \cos^2 x dx \\ &= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} (1 - \sin^2 x) dx \\ &= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int \{(\sin x)^{n-2} - (\sin x)^n\} dx \\ &= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \left\{ \int (\sin x)^{n-2} dx - \int (\sin x)^n dx \right\} \end{aligned}$$

$S_n = \int (\sin x)^n dx = \int (\sin x)^{n-1} \sin x dx$ として部分積分法を用いる。

$\frac{d}{dx}(\sin x)^{n-1} = (n-1)(\sin x)^{n-2} \cos x$. 積分定数を省き $\int \sin x dx = -\cos x$.

$$S_n = \int (\sin x)^{n-1} \sin x dx$$

$$= (\sin x)^{n-1}(-\cos x) - \int (n-1)(\sin x)^{n-2} \cos x(-\cos x) dx$$

$$= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} \cos^2 x dx$$

$$= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} (1 - \sin^2 x) dx$$

$$= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int \{(\sin x)^{n-2} - (\sin x)^n\} dx$$

$$= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \left\{ \int (\sin x)^{n-2} dx - \int (\sin x)^n dx \right\}$$

$$= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1)(S_{n-2} - S_n) \quad \int (\sin x)^{n-2} dx = S_{n-2}$$

$$\int (\sin x)^n dx = S_n$$

$S_n = \int (\sin x)^n dx = \int (\sin x)^{n-1} \sin x dx$ として部分積分法を用いる。

$\frac{d}{dx}(\sin x)^{n-1} = (n-1)(\sin x)^{n-2} \cos x$. 積分定数を省き $\int \sin x dx = -\cos x$.

$$\begin{aligned} S_n &= \int (\sin x)^{n-1} \sin x dx \\ &= (\sin x)^{n-1}(-\cos x) - \int (n-1)(\sin x)^{n-2} \cos x(-\cos x) dx \\ &= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} \cos^2 x dx \\ &= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} (1 - \sin^2 x) dx \\ &= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int \{(\sin x)^{n-2} - (\sin x)^n\} dx \\ &= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \left\{ \int (\sin x)^{n-2} dx - \int (\sin x)^n dx \right\} \\ &= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1)(S_{n-2} - S_n) \\ &= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1)S_{n-2} - (n-1)S_n , \end{aligned}$$

$S_n = \int (\sin x)^n dx = \int (\sin x)^{n-1} \sin x dx$ として部分積分法を用いる。

$\frac{d}{dx}(\sin x)^{n-1} = (n-1)(\sin x)^{n-2} \cos x$. 積分定数を省き $\int \sin x dx = -\cos x$.

$$\begin{aligned} S_n &= \int (\sin x)^{n-1} \sin x dx \\ &= (\sin x)^{n-1}(-\cos x) - \int (n-1)(\sin x)^{n-2} \cos x(-\cos x) dx \\ &= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} \cos^2 x dx \\ &= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} (1 - \sin^2 x) dx \\ &= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int \{(\sin x)^{n-2} - (\sin x)^n\} dx \\ &= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \left\{ \int (\sin x)^{n-2} dx - \int (\sin x)^n dx \right\} \\ &= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1)(S_{n-2} - S_n) \\ &= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1)S_{n-2} - (n-1)S_n , \end{aligned}$$

つまり

$$S_n = -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1)S_{n-2} - (n-1)S_n .$$

$$S_n = -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1)S_{n-2} - (n-1)S_n .$$

$$S_n = -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1)S_{n-2} - (n-1)S_n .$$

両辺に $(n-1)S_n$ を加えると

$$S_n + (n-1)S_n = -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1)S_{n-2} ,$$

$$nS_n = (n-1)S_{n-2} - (\sin x)^{n-1} \cos x ,$$

$$S_n = \frac{1}{n} \{ (n-1)S_{n-2} - (\sin x)^{n-1} \cos x \} .$$

$C_n = \int (\cos x)^n dx = \int (\cos x)^{n-1} \cos x dx$ として部分積分法を用いる.

$\frac{d}{dx}(\cos x)^{n-1} = (n-1)(\cos x)^{n-2}(-\sin x)$. 積分定数を省き $\int \cos x dx = \sin x$.

$C_n = \int (\cos x)^n dx = \int (\cos x)^{n-1} \cos x dx$ として部分積分法を用いる.

$\frac{d}{dx}(\cos x)^{n-1} = (n-1)(\cos x)^{n-2}(-\sin x)$. 積分定数を省き $\int \cos x dx = \sin x$.

$$C_n = \int (\cos x)^{n-1} \cos x dx$$

$C_n = \int (\cos x)^n dx = \int (\cos x)^{n-1} \cos x dx$ として部分積分法を用いる.

$\frac{d}{dx}(\cos x)^{n-1} = (n-1)(\cos x)^{n-2}(-\sin x)$. 積分定数を省き $\int \cos x dx = \sin x$.

$$\begin{aligned} C_n &= \int (\cos x)^{n-1} \cos x dx \\ &= (\cos x)^{n-1} \sin x - \int (n-1)(\cos x)^{n-2}(-\sin x) \sin x dx \\ &= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} \sin^2 x dx \end{aligned}$$

$C_n = \int (\cos x)^n dx = \int (\cos x)^{n-1} \cos x dx$ として部分積分法を用いる.

$\frac{d}{dx}(\cos x)^{n-1} = (n-1)(\cos x)^{n-2}(-\sin x)$. 積分定数を省き $\int \cos x dx = \sin x$.

$$\begin{aligned}C_n &= \int (\cos x)^{n-1} \cos x dx \\&= (\cos x)^{n-1} \sin x - \int (n-1)(\cos x)^{n-2}(-\sin x) \sin x dx \\&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} \sin^2 x dx \\&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} (1 - \cos^2 x) dx\end{aligned}$$

$C_n = \int (\cos x)^n dx = \int (\cos x)^{n-1} \cos x dx$ として部分積分法を用いる.

$\frac{d}{dx}(\cos x)^{n-1} = (n-1)(\cos x)^{n-2}(-\sin x)$. 積分定数を省き $\int \cos x dx = \sin x$.

$$\begin{aligned}C_n &= \int (\cos x)^{n-1} \cos x dx \\&= (\cos x)^{n-1} \sin x - \int (n-1)(\cos x)^{n-2}(-\sin x) \sin x dx \\&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} \sin^2 x dx \\&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} (1 - \cos^2 x) dx \\&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int \{(\cos x)^{n-2} - (\cos x)^n\} dx \\&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \left\{ \int (\cos x)^{n-2} dx - \int (\cos x)^n dx \right\}\end{aligned}$$

$C_n = \int (\cos x)^n dx = \int (\cos x)^{n-1} \cos x dx$ として部分積分法を用いる.

$\frac{d}{dx}(\cos x)^{n-1} = (n-1)(\cos x)^{n-2}(-\sin x)$. 積分定数を省き $\int \cos x dx = \sin x$.

$$C_n = \int (\cos x)^{n-1} \cos x dx$$

$$= (\cos x)^{n-1} \sin x - \int (n-1)(\cos x)^{n-2}(-\sin x) \sin x dx$$

$$= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} \sin^2 x dx$$

$$= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} (1 - \cos^2 x) dx$$

$$= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int \{(\cos x)^{n-2} - (\cos x)^n\} dx$$

$$= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \left\{ \int (\cos x)^{n-2} dx - \int (\cos x)^n dx \right\}$$

$$= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1)(C_{n-2} - C_n) \quad \int (\cos x)^{n-2} dx = C_{n-2}$$

$$\int (\cos x)^n dx = C_n$$

$C_n = \int (\cos x)^n dx = \int (\cos x)^{n-1} \cos x dx$ として部分積分法を用いる。

$\frac{d}{dx}(\cos x)^{n-1} = (n-1)(\cos x)^{n-2}(-\sin x)$. 積分定数を省き $\int \cos x dx = \sin x$.

$$\begin{aligned}C_n &= \int (\cos x)^{n-1} \cos x dx \\&= (\cos x)^{n-1} \sin x - \int (n-1)(\cos x)^{n-2}(-\sin x) \sin x dx \\&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} \sin^2 x dx \\&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} (1 - \cos^2 x) dx \\&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int \{(\cos x)^{n-2} - (\cos x)^n\} dx \\&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \left\{ \int (\cos x)^{n-2} dx - \int (\cos x)^n dx \right\} \\&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1)(C_{n-2} - C_n) \\&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1)C_{n-2} - (n-1)C_n ,\end{aligned}$$

$C_n = \int (\cos x)^n dx = \int (\cos x)^{n-1} \cos x dx$ として部分積分法を用いる。

$\frac{d}{dx}(\cos x)^{n-1} = (n-1)(\cos x)^{n-2}(-\sin x)$. 積分定数を省き $\int \cos x dx = \sin x$.

$$\begin{aligned}C_n &= \int (\cos x)^{n-1} \cos x dx \\&= (\cos x)^{n-1} \sin x - \int (n-1)(\cos x)^{n-2}(-\sin x) \sin x dx \\&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} \sin^2 x dx \\&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} (1 - \cos^2 x) dx \\&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int \{(\cos x)^{n-2} - (\cos x)^n\} dx \\&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \left\{ \int (\cos x)^{n-2} dx - \int (\cos x)^n dx \right\} \\&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1)(C_{n-2} - C_n) \\&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1)C_{n-2} - (n-1)C_n ,\end{aligned}$$

つまり

$$C_n = (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1)C_{n-2} - (n-1)C_n .$$

$$C_n = (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1)C_{n-2} - (n-1)C_n .$$

$$C_n = (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1)C_{n-2} - (n-1)C_n .$$

両辺に $(n-1)C_n$ を加えると

$$C_n + (n-1)C_n = (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1)C_{n-2} ,$$

$$nC_n = (n-1)C_{n-2} + (\cos x)^{n-1} \sin x ,$$

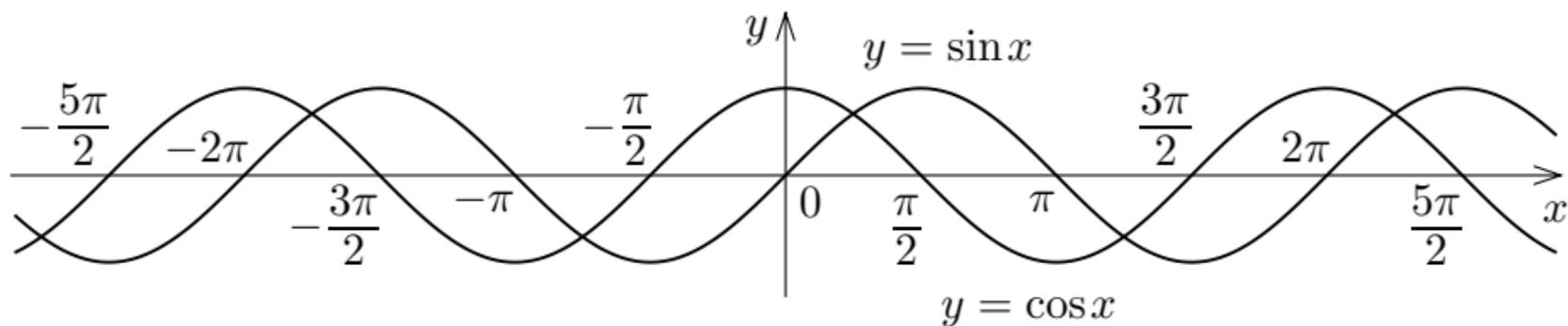
$$C_n = \frac{1}{n} \{ (n-1)C_{n-2} + (\cos x)^{n-1} \sin x \} .$$

[定理] 各自然数 n に対して $S_n = \int (\sin x)^n dx$, $C_n = \int (\cos x)^n dx$ とおくと, $n \geq 2$ である自然数 n に対して次の漸化式が成り立つ :

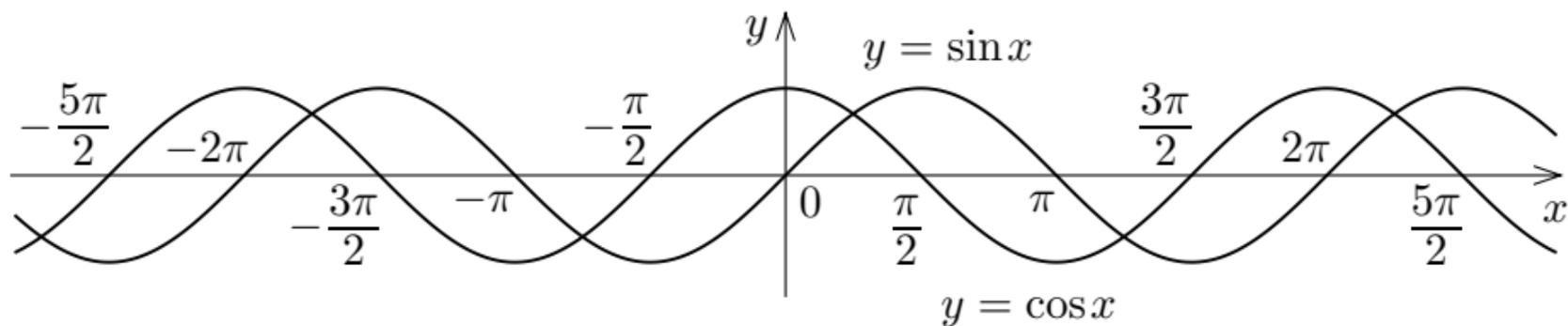
$$S_n = \frac{1}{n} \{ (n-1)S_{n-2} - (\sin x)^{n-1} \cos x \} ,$$

$$C_n = \frac{1}{n} \{ (n-1)C_{n-2} + (\cos x)^{n-1} \sin x \} .$$

xy 座標平面における $y = \sin x$ のグラフと $y = \cos x$ のグラフは次のようになる。



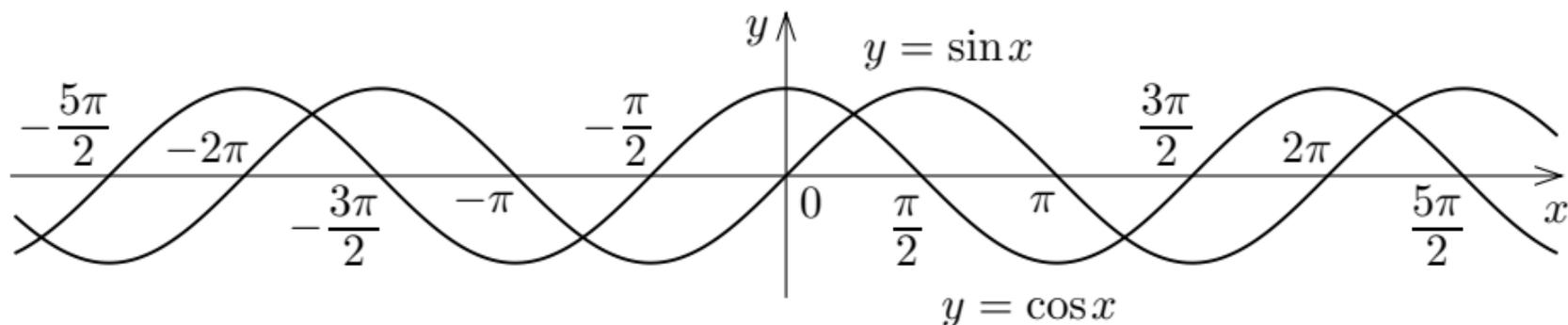
xy 座標平面における $y = \sin x$ のグラフと $y = \cos x$ のグラフは次のようになる。



これらのグラフを見ると次のことが分かる：

実数 x が $\frac{\pi}{2}$ の整数倍であるならば、 $\sin x = 0$ または $\cos x = 0$.

xy 座標平面における $y = \sin x$ のグラフと $y = \cos x$ のグラフは次のようになる。



これらのグラフを見ると次のことが分かる：

実数 x が $\frac{\pi}{2}$ の整数倍であるならば、 $\sin x = 0$ または $\cos x = 0$.

実数 a と b とは $\frac{\pi}{2}$ の整数倍であるとする。

$$\sin a = 0 \quad \text{または} \quad \cos a = 0 ,$$

$$\sin b = 0 \quad \text{または} \quad \cos b = 0 .$$

自然数 n について $n \geq 2$ とする. $S_n = \int (\sin x)^n dx$ について,

$$S_n = \frac{1}{n} \{(n-1)S_{n-2} - (\sin x)^{n-1} \cos x\} = \frac{n-1}{n} S_{n-2} - \frac{1}{n} (\sin x)^{n-1} \cos x .$$

自然数 n について $n \geq 2$ とする. $S_n = \int (\sin x)^n dx$ について,

$$S_n = \frac{1}{n} \{(n-1)S_{n-2} - (\sin x)^{n-1} \cos x\} = \frac{n-1}{n} S_{n-2} - \frac{1}{n} (\sin x)^{n-1} \cos x .$$

これより,

$$[S_n]_a^b = \left[\frac{n-1}{n} S_{n-2} - \frac{1}{n} (\sin x)^{n-1} \cos x \right]_a^b$$

自然数 n について $n \geq 2$ とする. $S_n = \int (\sin x)^n dx$ について,

$$S_n = \frac{1}{n} \{ (n-1)S_{n-2} - (\sin x)^{n-1} \cos x \} = \frac{n-1}{n} S_{n-2} - \frac{1}{n} (\sin x)^{n-1} \cos x .$$

これより,

$$\begin{aligned} [S_n]_a^b &= \left[\frac{n-1}{n} S_{n-2} - \frac{1}{n} (\sin x)^{n-1} \cos x \right]_a^b \\ &= \left[\frac{n-1}{n} S_{n-2} \right]_a^b - \left[\frac{1}{n} (\sin x)^{n-1} \cos x \right]_a^b \\ &= \frac{n-1}{n} [S_{n-2}]_a^b - \frac{1}{n} [(\sin x)^{n-1} \cos x]_a^b , \end{aligned}$$

$$[S_n]_a^b = \frac{n-1}{n} [S_{n-2}]_a^b - \frac{1}{n} [(\sin x)^{n-1} \cos x]_a^b .$$

$$[S_n]_a^b = \frac{n-1}{n} [S_{n-2}]_a^b - \frac{1}{n} [(\sin x)^{n-1} \cos x]_a^b .$$

右辺の $[(\sin x)^{n-1} \cos x]_a^b$ を計算する.

$$[S_n]_a^b = \frac{n-1}{n} [S_{n-2}]_a^b - \frac{1}{n} [(\sin x)^{n-1} \cos x]_a^b .$$

右辺の $[(\sin x)^{n-1} \cos x]_a^b$ を計算する. $n \geq 2$ なので $n-1 \geq 1$. $\sin b = 0$
または $\cos b = 0$ なので,

$$(\sin b)^{n-1} \cos b = 0 .$$

$\sin a = 0$ または $\cos a = 0$ なので,

$$(\sin a)^{n-1} \cos a = 0 .$$

$$[S_n]_a^b = \frac{n-1}{n} [S_{n-2}]_a^b - \frac{1}{n} [(\sin x)^{n-1} \cos x]_a^b .$$

右辺の $[(\sin x)^{n-1} \cos x]_a^b$ を計算する. $n \geq 2$ なので $n-1 \geq 1$. $\sin b = 0$
または $\cos b = 0$ なので,

$$(\sin b)^{n-1} \cos b = 0 .$$

$\sin a = 0$ または $\cos a = 0$ なので,

$$(\sin a)^{n-1} \cos a = 0 .$$

これらのことより

$$[(\sin x)^{n-1} \cos x]_a^b = (\sin b)^{n-1} \cos b - (\sin a)^{n-1} \cos a = 0 ,$$

$$[S_n]_a^b = \frac{n-1}{n} [S_{n-2}]_a^b - \frac{1}{n} [(\sin x)^{n-1} \cos x]_a^b .$$

右辺の $[(\sin x)^{n-1} \cos x]_a^b$ を計算する. $n \geq 2$ なので $n-1 \geq 1$. $\sin b = 0$ または $\cos b = 0$ なので,

$$(\sin b)^{n-1} \cos b = 0 .$$

$\sin a = 0$ または $\cos a = 0$ なので,

$$(\sin a)^{n-1} \cos a = 0 .$$

これらのことより

$$[(\sin x)^{n-1} \cos x]_a^b = (\sin b)^{n-1} \cos b - (\sin a)^{n-1} \cos a = 0 ,$$

従って

$$[S_n]_a^b = \frac{n-1}{n} [S_{n-2}]_a^b .$$

$$[S_n]_a^b = \frac{n-1}{n} [S_{n-2}]_a^b .$$

$$[S_n]_a^b = \frac{n-1}{n} [S_{n-2}]_a^b .$$

ここで,

$$[S_n]_a^b = \left[\int (\sin x)^n dx \right]_a^b = \int_a^b (\sin x)^n dx ,$$

$$[S_{n-2}]_a^b = \left[\int (\sin x)^{n-2} dx \right]_a^b = \int_a^b (\sin x)^{n-2} dx ,$$

実数 a と b とが属するある区間において関数 f が連続であるとき,

$$\left[\int f(x) dx \right]_{x=a}^{x=b} = \int_a^b f(x) dx .$$

$$[S_n]_a^b = \frac{n-1}{n} [S_{n-2}]_a^b .$$

ここで,

$$\begin{aligned} [S_n]_a^b &= \left[\int (\sin x)^n dx \right]_a^b = \int_a^b (\sin x)^n dx , \\ [S_{n-2}]_a^b &= \left[\int (\sin x)^{n-2} dx \right]_a^b = \int_a^b (\sin x)^{n-2} dx , \end{aligned}$$

故に

$$\int_a^b (\sin x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\sin x)^{n-2} dx .$$

$$[S_n]_a^b = \frac{n-1}{n} [S_{n-2}]_a^b .$$

ここで,

$$[S_n]_a^b = \left[\int (\sin x)^n dx \right]_a^b = \int_a^b (\sin x)^n dx ,$$

$$[S_{n-2}]_a^b = \left[\int (\sin x)^{n-2} dx \right]_a^b = \int_a^b (\sin x)^{n-2} dx ,$$

故に

$$\int_a^b (\sin x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\sin x)^{n-2} dx .$$

同様にして次の等式も導かれる：

$$\int_a^b (\cos x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\cos x)^{n-2} dx .$$

[定理] 実数 a と b とは $\frac{\pi}{2}$ の整数倍であるとする. $n \geq 2$ である自然数 n に対して,

$$\int_a^b (\sin x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\sin x)^{n-2} dx ,$$
$$\int_a^b (\cos x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\cos x)^{n-2} dx .$$

[定理] $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である実数 a と b 及び 2 以上の自然数 n に対して

$$\int_a^b (\sin x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\sin x)^{n-2} dx .$$

[例] 定積分 $\int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sin^4 x dx$ を計算する.

[定理] $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である実数 a と b 及び 2 以上の自然数 n に対して

$$\int_a^b (\sin x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\sin x)^{n-2} dx .$$

[例] 定積分 $\int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sin^4 x dx$ を計算する. この定積分の下端 0 も上端 $\frac{5\pi}{2}$ も $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である.

[定理] $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である実数 a と b 及び 2 以上の自然数 n に対して

$$\int_a^b (\sin x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\sin x)^{n-2} dx .$$

[例] 定積分 $\int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sin^4 x dx$ を計算する. この定積分の下端 0 も上端 $\frac{5\pi}{2}$ も $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である.

$$\int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{3}{4} \int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sin^2 x dx ,$$

[定理] $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である実数 a と b 及び 2 以上の自然数 n に対して

$$\int_a^b (\sin x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\sin x)^{n-2} dx .$$

[例] 定積分 $\int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sin^4 x dx$ を計算する. この定積分の下端 0 も上端 $\frac{5\pi}{2}$ も $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である.

$$\int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{3}{4} \int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sin^2 x dx ,$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sin^0 x dx ,$$

[定理] $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である実数 a と b 及び 2 以上の自然数 n に対して

$$\int_a^b (\sin x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\sin x)^{n-2} dx .$$

[例] 定積分 $\int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sin^4 x dx$ を計算する. この定積分の下端 0 も上端 $\frac{5\pi}{2}$ も $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である.

$$\int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{3}{4} \int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sin^2 x dx ,$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sin^0 x dx ,$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sin^0 x dx = \int_0^{\frac{5\pi}{2}} 1 dx = [x]_0^{\frac{5\pi}{2}} = \frac{5\pi}{2} .$$

[定理] $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である実数 a と b 及び 2 以上の自然数 n に対して

$$\int_a^b (\sin x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\sin x)^{n-2} dx .$$

[例] 定積分 $\int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sin^4 x dx$ を計算する. この定積分の下端 0 も上端 $\frac{5\pi}{2}$ も $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である.

$$\int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{3}{4} \int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sin^2 x dx ,$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sin^0 x dx ,$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sin^0 x dx = \int_0^{\frac{5\pi}{2}} 1 dx = [x]_0^{\frac{5\pi}{2}} = \frac{5\pi}{2} .$$

よって,

$$\int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{3}{4} \int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sin^0 x dx = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5\pi}{2} = \frac{15\pi}{16} . \quad \boxed{\text{終}}$$

[定理] $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である実数 a と b 及び 2 以上の自然数 n に対して

$$\int_a^b (\cos x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\cos x)^{n-2} dx .$$

問7.拡充3.1 定積分 $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\pi} \cos^6 x dx$ を計算せよ.

定積分 $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\pi} \cos^6 x dx$ の下端 $-\frac{3\pi}{2}$ も上端 π も $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である.

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\pi} \cos^6 x dx &= \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\pi} \cos^4 x dx = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 x dx \\ &= \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\pi} 1 dx = \end{aligned}$$

[定理] $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である実数 a と b 及び 2 以上の自然数 n に対して

$$\int_a^b (\cos x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\cos x)^{n-2} dx .$$

問7. 拡充3.1 定積分 $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\pi} \cos^6 x dx$ を計算せよ.

定積分 $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\pi} \cos^6 x dx$ の下端 $-\frac{3\pi}{2}$ も上端 π も $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である.

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\pi} \cos^6 x dx &= \frac{5}{6} \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\pi} \cos^4 x dx = \frac{5}{6} \frac{3}{4} \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 x dx \\ &= \frac{5}{6} \frac{3}{4} \frac{1}{2} \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\pi} 1 dx = \frac{5}{6} \frac{3}{4} \frac{1}{2} \left\{ \pi - \left(-\frac{3\pi}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{25\pi}{32} . \end{aligned}$$

終

[定理] $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である実数 a と b 及び 2 以上の自然数 n に対して

$$\int_a^b (\cos x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\cos x)^{n-2} dx .$$

[例] 定積分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 x dx$ を計算する.

[定理] $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である実数 a と b 及び 2 以上の自然数 n に対して

$$\int_a^b (\cos x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\cos x)^{n-2} dx .$$

[例] 定積分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 x dx$ を計算する. この定積分の下端 $\frac{\pi}{2}$ も上端 $\frac{3\pi}{2}$ も $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である.

[定理] $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である実数 a と b 及び 2 以上の自然数 n に対して

$$\int_a^b (\cos x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\cos x)^{n-2} dx .$$

[例] 定積分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 x dx$ を計算する. この定積分の下端 $\frac{\pi}{2}$ も上端 $\frac{3\pi}{2}$ も $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 x dx = \frac{4}{5} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3 x dx ,$$

[定理] $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である実数 a と b 及び 2 以上の自然数 n に対して

$$\int_a^b (\cos x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\cos x)^{n-2} dx .$$

[例] 定積分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 x dx$ を計算する. この定積分の下端 $\frac{\pi}{2}$ も上端 $\frac{3\pi}{2}$ も $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 x dx = \frac{4}{5} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3 x dx ,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3 x dx = \frac{2}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^1 x dx ,$$

[定理] $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である実数 a と b 及び 2 以上の自然数 n に対して

$$\int_a^b (\cos x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\cos x)^{n-2} dx .$$

[例] 定積分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 x dx$ を計算する. この定積分の下端 $\frac{\pi}{2}$ も上端 $\frac{3\pi}{2}$ も $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 x dx = \frac{4}{5} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3 x dx ,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3 x dx = \frac{2}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^1 x dx ,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^1 x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -1 - 1 = -2 .$$

[定理] $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である実数 a と b 及び 2 以上の自然数 n に対して

$$\int_a^b (\cos x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\cos x)^{n-2} dx .$$

[例] 定積分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 x dx$ を計算する. この定積分の下端 $\frac{\pi}{2}$ も上端 $\frac{3\pi}{2}$ も $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 x dx = \frac{4}{5} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3 x dx ,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3 x dx = \frac{2}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^1 x dx ,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^1 x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -1 - 1 = -2 .$$

よって,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 x dx = \frac{4}{5} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3 x dx = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^1 x dx = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-2) = -\frac{16}{15} . \quad \square$$

[定理] $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である実数 a と b 及び 2 以上の自然数 n に対して

$$\int_a^b (\sin x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\sin x)^{n-2} dx .$$

問7.拡充3.2 定積分 $\int_{-\pi}^{2\pi} \sin^7 x dx$ を計算せよ.

定積分 $\int_{-\pi}^{2\pi} \sin^7 x dx$ の下端 $-\pi$ も上端 2π も $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{2\pi} \sin^7 x dx &= \int_{-\pi}^{2\pi} \sin^5 x dx = \int_{-\pi}^{2\pi} \sin^3 x dx = \int_{-\pi}^{2\pi} \sin x dx \\ &= \end{aligned}$$

[定理] $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である実数 a と b 及び 2 以上の自然数 n に対して

$$\int_a^b (\sin x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\sin x)^{n-2} dx .$$

問7.拡充3.2 定積分 $\int_{-\pi}^{2\pi} \sin^7 x dx$ を計算せよ.

定積分 $\int_{-\pi}^{2\pi} \sin^7 x dx$ の下端 $-\pi$ も上端 2π も $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{2\pi} \sin^7 x dx &= \frac{6}{7} \int_{-\pi}^{2\pi} \sin^5 x dx = \frac{6}{7} \frac{4}{5} \int_{-\pi}^{2\pi} \sin^3 x dx = \frac{6}{7} \frac{4}{5} \frac{2}{3} \int_{-\pi}^{2\pi} \sin x dx \\ &= \frac{6}{7} \frac{4}{5} \frac{2}{3} [-\cos x]_{-\pi}^{2\pi} = \frac{6}{7} \frac{4}{5} \frac{2}{3} (-2) \\ &= -\frac{32}{35} . \end{aligned}$$

終