7. 補遺 1　指数関数が現れる式の積分法

指数関数 e^x が現れる式を積分するには，e^x あるいは e^x の 1 次式を別の変数に置換する．定数 a, b に対して $y = ae^x + b$ とおくと，$\dfrac{dy}{dx} = ae^x = y - b$ なので，$dx = \dfrac{dy}{y-b}$ ．

$\boxed{例}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2}{3e^x + 2}\,dx$ を計算する.

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2}{3e^x+2}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y = 3e^x + 2$ とおく.

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2}{3e^x+2}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y=3e^x+2$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=3e^x=y-2$ なので $dx=\dfrac{1}{y-2}\,dy$.

$\boxed{例}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2}{3e^x+2}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y=3e^x+2$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=3e^x=y-2$ なので $dx=\dfrac{1}{y-2}dy$.

$e^x>0$ なので $3e^x+2>0$.

$\boxed{例}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2}{3e^x+2}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y=3e^x+2$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=3e^x=y-2$ なので $dx=\dfrac{1}{y-2}\,dy$.
$e^x>0$ なので $3e^x+2>0$. 積分定数を C_0, C とおく.

$$\int \frac{2}{3e^x+2}\,dx=\int \frac{1}{y}\frac{2}{y-2}\,dy=$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2}{3e^x+2}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y = 3e^x + 2$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 3e^x = y - 2$ なので $dx = \dfrac{1}{y-2}\,dy$.
$e^x > 0$ なので $3e^x + 2 > 0$. 積分定数を C_0, C とおく.

$$\int \frac{2}{3e^x+2}\,dx = \int \frac{1}{y}\frac{2}{y-2}\,dy = \int \left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y}\right) dy$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2}{3e^x+2}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y=3e^x+2$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=3e^x=y-2$ なので $dx=\dfrac{1}{y-2}dy$.
$e^x>0$ なので $3e^x+2>0$. 積分定数を C_0, C とおく.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2}{3e^x+2}\,dx &= \int \frac{1}{y}\frac{2}{y-2}\,dy = \int \left(\frac{1}{y-2}-\frac{1}{y}\right)dy \\
&= \ln|y-2|-\ln|y|+C_0 \\
&= \ln|3e^x|-\ln|3e^x+2|+C_0 \\
&= \ln(3e^x)-\ln(3e^x+2)+C_0
\end{aligned}
$$

任意の実数 x について, $e^x>0$ なので $3e^x+2>2>0$, よって
$|3e^x+2|=3e^x+2$.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2}{3e^x+2}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y=3e^x+2$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=3e^x=y-2$ なので $dx=\dfrac{1}{y-2}dy$.
$e^x>0$ なので $3e^x+2>0$. 積分定数を C_0, C とおく.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2}{3e^x+2}\,dx &= \int \frac{1}{y}\frac{2}{y-2}\,dy = \int \left(\frac{1}{y-2}-\frac{1}{y}\right)dy \\
&= \ln|y-2| - \ln|y| + C_0 \\
&= \ln|3e^x| - \ln|3e^x+2| + C_0 \\
&= \ln(3e^x) - \ln(3e^x+2) + C_0 \\
&= \ln 3 + \ln e^x - \ln(3e^x+2) + C_0 \\
&= x - \ln(3e^x+2) + C \ .
\end{aligned}
$$

定数 $\ln 3 + C_0$ を C に置き換える.

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2}{3e^x+2}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y=3e^x+2$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=3e^x=y-2$ なので $dx=\dfrac{1}{y-2}dy$. $e^x>0$ なので $3e^x+2>0$. 積分定数を C_0, C とおく.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2}{3e^x+2}\,dx &= \int \frac{1}{y}\frac{2}{y-2}\,dy = \int \left(\frac{1}{y-2}-\frac{1}{y}\right)dy \\
&= \ln|y-2| - \ln|y| + C_0 \\
&= \ln|3e^x| - \ln|3e^x+2| + C_0 \\
&= \ln(3e^x) - \ln(3e^x+2) + C_0 \\
&= \ln 3 + \ln e^x - \ln(3e^x+2) + C_0 \\
&= x - \ln(3e^x+2) + C \ .
\end{aligned}
$$

終

$\boxed{\text{問7.補遺1}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6}{4e^{x}+3e^{-x}}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y=$ 　 とおく. $\dfrac{dy}{dx}=$ 　 $=$ 　 なので $dx=$ 　 dy . 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{6}{4e^{x}+3e^{-x}}\,dx=$$

$\boxed{\text{問 7.補遺1}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6}{4e^x + 3e^{-x}}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y = e^x$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = e^x = y$ なので $dx = \dfrac{1}{y}\,dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{6}{4e^x + 3e^{-x}}\,dx =$$

$\boxed{\text{問7.補遺1}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6}{4e^x + 3e^{-x}}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y = e^x$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = e^x = y$ なので $dx = \dfrac{1}{y}\,dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{6}{4e^x + 3e^{-x}}\,dx = \int \frac{6}{4y + \dfrac{3}{y}}\,\frac{1}{y}\,dy = \int \frac{6}{4y^2 + 3}\,dy$$

$\boxed{\text{問 7.補遺1}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6}{4e^x + 3e^{-x}}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y = e^x$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = e^x = y$ なので $dx = \dfrac{1}{y}\,dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{6}{4e^x + 3e^{-x}}\,dx = \int \frac{6}{4y + \frac{3}{y}}\,\frac{1}{y}\,dy = \int \frac{6}{4y^2 + 3}\,dy$$

$$= \frac{6}{4}\int \frac{1}{y^2 + \frac{3}{4}}\,dy = \frac{3}{2}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2y}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \sqrt{3}\tan^{-1}\frac{2e^x}{\sqrt{3}} + C \ .$$

$\boxed{\text{終}}$