7. 補遺 2　指数関数と正弦関数・余弦関数との積の積分法

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int e^{3x} \sin 4x \, dx$ と $\int e^{3x} \cos 4x \, dx$ とを計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int e^{3x}\sin 4x\,dx$ と $\int e^{3x}\cos 4x\,dx$ とを計算する.

部分積分法により $\int e^{3x}\sin 4x\,dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int e^{3x}\sin 4x\,dx$ と $\int e^{3x}\cos 4x\,dx$ とを計算する．

部分積分法により $\int e^{3x}\sin 4x\,dx$ を計算する． $\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}$（積分定数略）， $\frac{d}{dx}\sin 4x = 4\cos 4x$ なので，

$\boxed{例}$ 不定積分 $\int e^{3x}\sin 4x\,dx$ と $\int e^{3x}\cos 4x\,dx$ とを計算する.

部分積分法により $\int e^{3x}\sin 4x\,dx$ を計算する. $\int e^{3x}dx = \dfrac{1}{3}e^{3x}$ (積分定数略), $\dfrac{d}{dx}\sin 4x = 4\cos 4x$ なので,

$$\begin{aligned}\int e^{3x}\sin 4x\,dx &= \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{1}{3}\int e^{3x}4\cos 4x\,dx \\ &= \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{3}\int e^{3x}\cos 4x\,dx\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int e^{3x}\sin 4x\,dx$ と $\int e^{3x}\cos 4x\,dx$ とを計算する.

部分積分法により $\int e^{3x}\sin 4x\,dx$ を計算する. $\int e^{3x}dx = \dfrac{1}{3}e^{3x}$ (積分定数略), $\dfrac{d}{dx}\sin 4x = 4\cos 4x$ なので,

$$\begin{aligned}\int e^{3x}\sin 4x\,dx &= \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{1}{3}\int e^{3x}4\cos 4x\,dx \\ &= \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{3}\int e^{3x}\cos 4x\,dx\ .\end{aligned}$$

部分積分法により $\int e^{3x}\cos 4x\,dx$ を計算する.

例 不定積分 $\int e^{3x}\sin 4x\,dx$ と $\int e^{3x}\cos 4x\,dx$ とを計算する.

部分積分法により $\int e^{3x}\sin 4x\,dx$ を計算する. $\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}$（積分定数略）, $\frac{d}{dx}\sin 4x = 4\cos 4x$ なので,

$$\int e^{3x}\sin 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{1}{3}\int e^{3x}4\cos 4x\,dx$$
$$= \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{3}\int e^{3x}\cos 4x\,dx\ .$$

部分積分法により $\int e^{3x}\cos 4x\,dx$ を計算する. $\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}$（積分定数略）, $\frac{d}{dx}\cos 4x = -4\sin 4x$ なので,

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int e^{3x}\sin 4x\,dx$ と $\int e^{3x}\cos 4x\,dx$ とを計算する.

部分積分法により $\int e^{3x}\sin 4x\,dx$ を計算する. $\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}$（積分定数略）, $\frac{d}{dx}\sin 4x = 4\cos 4x$ なので,

$$\int e^{3x}\sin 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{1}{3}\int e^{3x}4\cos 4x\,dx$$
$$= \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{3}\int e^{3x}\cos 4x\,dx \ .$$

部分積分法により $\int e^{3x}\cos 4x\,dx$ を計算する. $\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}$（積分定数略）, $\frac{d}{dx}\cos 4x = -4\sin 4x$ なので,

$$\int e^{3x}\cos 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x - \frac{1}{3}\int e^{3x}(-4\sin 4x)\,dx$$
$$= \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{3}\int e^{3x}\sin 4x\,dx \ .$$

こうして次の 2 つの等式が導かれる：

$$\int e^{3x}\sin 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{3}\int e^{3x}\cos 4x\,dx \ ,$$

$$\int e^{3x}\cos 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{3}\int e^{3x}\sin 4x\,dx \ .$$

こうして次の 2 つの等式が導かれる：

$$\int e^{3x}\sin 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{3}\int e^{3x}\cos 4x\,dx \ ,$$

$$\int e^{3x}\cos 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{3}\int e^{3x}\sin 4x\,dx \ .$$

これらの等式より,

$$\int e^{3x}\sin 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{3}\int e^{3x}\cos 4x\,dx$$

こうして次の 2 つの等式が導かれる：

$$\int e^{3x}\sin 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{3}\int e^{3x}\cos 4x\,dx \ ,$$

$$\int e^{3x}\cos 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{3}\int e^{3x}\sin 4x\,dx \ .$$

これらの等式より,

$$\begin{aligned}\int e^{3x}\sin 4x\,dx &= \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{3}\int e^{3x}\cos 4x\,dx \\ &= \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{3}\int e^{3x}\sin 4x\,dx\right)\end{aligned}$$

こうして次の 2 つの等式が導かれる：

$$\int e^{3x}\sin 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{3}\int e^{3x}\cos 4x\,dx \ ,$$

$$\int e^{3x}\cos 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{3}\int e^{3x}\sin 4x\,dx \ .$$

これらの等式より,

$$\begin{aligned}\int e^{3x}\sin 4x\,dx &= \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{3}\int e^{3x}\cos 4x\,dx \\ &= \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{3}\int e^{3x}\sin 4x\,dx\right) \\ &= \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{9}e^{3x}\cos 4x - \frac{16}{9}\int e^{3x}\sin 4x\,dx \ .\end{aligned}$$

$$\int e^{3x}\sin 4x\,dx \;=\; \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{9}e^{3x}\cos 4x - \frac{16}{9}\int e^{3x}\sin 4x\,dx \quad .$$

$$\int e^{3x}\sin 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{9}e^{3x}\cos 4x - \frac{16}{9}\int e^{3x}\sin 4x\,dx \ .$$

この等式の両辺に $\dfrac{16}{9}\int e^{3x}\sin 4x\,dx$ を加える．積分定数を $B_1\,,C_1$ とおく．

$$\int e^{3x}\sin 4x\,dx + \frac{16}{9}\int e^{3x}\sin 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{9}e^{3x}\cos 4x + B_1 \ ,$$

$$\int e^{3x}\sin 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{9}e^{3x}\cos 4x - \frac{16}{9}\int e^{3x}\sin 4x\,dx \ .$$

この等式の両辺に $\dfrac{16}{9}\displaystyle\int e^{3x}\sin 4x\,dx$ を加える．積分定数を B_1, C_1 とおく．

$$\int e^{3x}\sin 4x\,dx + \frac{16}{9}\int e^{3x}\sin 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{9}e^{3x}\cos 4x + B_1 \ ,$$

$$\frac{25}{9}\int e^{3x}\sin 4x\,dx = e^{3x}\left(\frac{1}{3}\sin 4x - \frac{4}{9}\cos 4x\right) + B_1 \ ,$$

$$\int e^{3x}\sin 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{9}e^{3x}\cos 4x - \frac{16}{9}\int e^{3x}\sin 4x\,dx \ .$$

この等式の両辺に $\dfrac{16}{9}\int e^{3x}\sin 4x\,dx$ を加える．積分定数を B_1, C_1 とおく．

$$\int e^{3x}\sin 4x\,dx + \frac{16}{9}\int e^{3x}\sin 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{9}e^{3x}\cos 4x + B_1 \ ,$$

$$\frac{25}{9}\int e^{3x}\sin 4x\,dx = e^{3x}\left(\frac{1}{3}\sin 4x - \frac{4}{9}\cos 4x\right) + B_1 \ ,$$

$$\begin{aligned}\int e^{3x}\sin 4x\,dx &= \frac{9}{25}\cdot e^{3x}\left(\frac{1}{3}\sin 4x - \frac{4}{9}\cos 4x\right) + C_1 \\ &= \frac{e^{3x}}{25}(3\sin 4x - 4\cos 4x) + C_1 \ .\end{aligned}$$

また，先に導かれた 2 つの等式

$$\int e^{3x}\sin 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{3}\int e^{3x}\cos 4x\,dx \ ,$$

$$\int e^{3x}\cos 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{3}\int e^{3x}\sin 4x\,dx$$

より，

また，先に導かれた 2 つの等式

$$\int e^{3x}\sin 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{3}\int e^{3x}\cos 4x\,dx \;,$$

$$\int e^{3x}\cos 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{3}\int e^{3x}\sin 4x\,dx$$

より，

$$\int e^{3x}\cos 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{3}\int e^{3x}\sin 4x\,dx$$

また，先に導かれた 2 つの等式

$$\int e^{3x}\sin 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{3}\int e^{3x}\cos 4x\,dx \ ,$$

$$\int e^{3x}\cos 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{3}\int e^{3x}\sin 4x\,dx$$

より，

$$\begin{aligned}\int e^{3x}\cos 4x\,dx &= \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{3}\int e^{3x}\sin 4x\,dx \\ &= \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{3}\int e^{3x}\cos 4x\,dx\right)\end{aligned}$$

また，先に導かれた 2 つの等式

$$\int e^{3x}\sin 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{3}\int e^{3x}\cos 4x\,dx \ ,$$

$$\int e^{3x}\cos 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{3}\int e^{3x}\sin 4x\,dx$$

より，

$$\begin{aligned}\int e^{3x}\cos 4x\,dx &= \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{3}\int e^{3x}\sin 4x\,dx \\ &= \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{3}\int e^{3x}\cos 4x\,dx\right) \\ &= \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{9}e^{3x}\sin 4x - \frac{16}{9}\int e^{3x}\cos 4x\,dx \ .\end{aligned}$$

$$\int e^{3x}\cos 4x\,dx \;=\; \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x+\frac{4}{9}e^{3x}\sin 4x-\frac{16}{9}\int e^{3x}\cos 4x\,dx \quad .$$

$$\int e^{3x}\cos 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{9}e^{3x}\sin 4x - \frac{16}{9}\int e^{3x}\cos 4x\,dx \ .$$

この等式の両辺に $\frac{16}{9}\int e^{3x}\cos 4x\,dx$ を加える．積分定数を B_2, C_2 とおく．

$$\int e^{3x}\cos 4x\,dx + \frac{16}{9}\int e^{3x}\cos 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{9}e^{3x}\sin 4x + B_2 \ ,$$

$$\int e^{3x}\cos 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{9}e^{3x}\sin 4x - \frac{16}{9}\int e^{3x}\cos 4x\,dx \ .$$

この等式の両辺に $\dfrac{16}{9}\int e^{3x}\cos 4x\,dx$ を加える．積分定数を B_2, C_2 とおく．

$$\int e^{3x}\cos 4x\,dx + \frac{16}{9}\int e^{3x}\cos 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{9}e^{3x}\sin 4x + B_2 \ ,$$

$$\frac{25}{9}\int e^{3x}\cos 4x\,dx = e^{3x}\left(\frac{4}{9}\sin 4x + \frac{1}{3}\cos 4x\right) + B_2 \ ,$$

$$\int e^{3x}\cos 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{9}e^{3x}\sin 4x - \frac{16}{9}\int e^{3x}\cos 4x\,dx \ .$$

この等式の両辺に $\dfrac{16}{9}\int e^{3x}\cos 4x\,dx$ を加える．積分定数を B_2, C_2 とおく．

$$\int e^{3x}\cos 4x\,dx + \frac{16}{9}\int e^{3x}\cos 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{9}e^{3x}\sin 4x + B_2 \ ,$$

$$\frac{25}{9}\int e^{3x}\cos 4x\,dx = e^{3x}\left(\frac{4}{9}\sin 4x + \frac{1}{3}\cos 4x\right) + B_2 \ ,$$

$$\begin{aligned}\int e^{3x}\cos 4x\,dx &= \frac{9}{25}\cdot e^{3x}\left(\frac{4}{9}\sin 4x + \frac{1}{3}\cos 4x\right) + C_2 \\ &= \frac{e^{3x}}{25}(4\sin 4x + 3\cos 4x) + C_2 \ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{\text{問7.補遺2}}$ 不定積分 $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$ と $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$ とを計算せよ.

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \quad e^{2x}\sin 3x - \quad \int e^{2x} \quad \cos 3x\,dx = \quad e^{2x}\sin 3x \qquad \int e^{2x}\cos 3x\,dx \ .$$

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \quad e^{2x}\cos 3x - \quad \int e^{2x}(\qquad \sin 3x)\,dx = \quad e^{2x}\cos 3x \qquad \int e^{2x}\sin 3x\,dx \ .$$

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\sin 3x\,dx &= \quad e^{2x}\sin 3x \qquad \int e^{2x}\cos 3x\,dx \\ &= \quad e^{2x}\sin 3x \qquad \left(\quad e^{2x}\cos 3x \qquad \int e^{2x}\sin 3x\,dx \right) \\ &= \quad e^{2x}\sin 3x \qquad e^{2x}\cos 3x \qquad \int e^{2x}\sin 3x\,dx \ .\end{aligned}$$

積分定数を $B_1\,,C_1$ とおく.

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = e^{2x}\left(\quad \sin 3x \qquad \cos 3x \right) + B_1 \ ,$$

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \frac{e^{2x}}{\quad}(\quad \sin 3x \qquad \cos 3x) + C_1 \ .$$

$\boxed{\text{問7.補遺2}}$ 不定積分 $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$ と $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$ とを計算せよ.

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{1}{2}\int e^{2x}3\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x\,dx\ .$$

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x - \frac{1}{2}\int e^{2x}(-3\sin 3x)\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x\,dx\ .$$

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\sin 3x\,dx &= \qquad e^{2x}\sin 3x \qquad\qquad \int e^{2x}\cos 3x\,dx \\ &= \qquad e^{2x}\sin 3x \qquad\qquad \left(\qquad e^{2x}\cos 3x \qquad\qquad \int e^{2x}\sin 3x\,dx\right) \\ &= \qquad e^{2x}\sin 3x \qquad\qquad e^{2x}\cos 3x \qquad\qquad \int e^{2x}\sin 3x\,dx\ .\end{aligned}$$

積分定数を $B_1\,,C_1$ とおく.

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = e^{2x}\left(\qquad \sin 3x \qquad\qquad \cos 3x\right) + B_1\ ,$$

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \frac{e^{2x}}{\qquad}(\qquad \sin 3x \qquad\qquad \cos 3x) + C_1\ .$$

$\boxed{\text{問7.補遺2}}$ 不定積分 $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$ と $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$ とを計算せよ.

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{1}{2}\int e^{2x}3\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x\,dx\ .$$

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x - \frac{1}{2}\int e^{2x}(-3\sin 3x)\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x\,dx\ .$$

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\sin 3x\,dx &= \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x\,dx \\ &= \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x\,dx\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x - \frac{9}{4}\int e^{2x}\sin 3x\,dx\ .\end{aligned}$$

積分定数を B_1, C_1 とおく.

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = e^{2x}\left(\quad \sin 3x \qquad \cos 3x\right) + B_1\ ,$$

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \frac{e^{2x}}{\qquad}(\quad \sin 3x \qquad \cos 3x) + C_1\ .$$

$\boxed{\text{問7.補遺2}}$ 不定積分 $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$ と $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$ とを計算せよ.

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{1}{2}\int e^{2x}3\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x\,dx\ .$$

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x - \frac{1}{2}\int e^{2x}(-3\sin 3x)\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x\,dx\ .$$

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\sin 3x\,dx &= \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x\,dx \\ &= \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x\,dx\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x - \frac{9}{4}\int e^{2x}\sin 3x\,dx\ .\end{aligned}$$

積分定数を B_1, C_1 とおく.

$$\frac{13}{4}\int e^{2x}\sin 3x\,dx = e^{2x}\left(\frac{1}{2}\sin 3x - \frac{3}{4}\cos 3x\right) + B_1\ ,$$

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \frac{e^{2x}}{13}(2\sin 3x - 3\cos 3x) + C_1\ .$$

また,

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\cos 3x\,dx &= \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x\,dx \\ &= \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x\,dx\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x - \frac{9}{4}\int e^{2x}\cos 3x\,dx \quad .\end{aligned}$$

積分定数を B_2, C_2 とおく.

$$\frac{13}{4}\int e^{2x}\cos 3x\,dx = e^{2x}\left(\frac{3}{4}\sin 3x + \frac{1}{2}\cos 3x\right) + B_2 \quad ,$$

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x + 2\cos 3x) + C_2 \quad .$$

終

このような方法で次の積分公式が導かれる.

定理　定数 a, b について $a \neq 0$ または $b \neq 0$ のとき,

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C_1 \quad \text{（}C_1\text{ は積分定数）},$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C_2 \quad \text{（}C_2\text{ は積分定数）}.$$