

8.1 関数のリーマン和

定積分の定義を復習する.

定義 実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり,

$$\delta_n = x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \delta_k$$

とおく. S_n を表す式を f のリーマン和という. $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \rightarrow \infty$ のとき収束して極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば, 関数 f は a から b まで (定) 積分可能であるといい, リーマン和 S_n の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を a から b までの f の定積分といい, $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す: $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

定義 実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

とおく. S_n を表す式を f のリーマン和という. $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \rightarrow \infty$ のとき収束して極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば, 関数 f は a から b まで (定) 積分可能であるといい, リーマン和 S_n の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を a から b までの f の定積分といい, $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す: $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

関数 f が a から b まで積分可能であるとき, 関数 f は b から a まで積分可能であるといい, f の b から a までの定積分 $\int_b^a f(x) dx$ を次のように定義する: $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$.

実数 a と b について $a \leq b$ で, 関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含み, f は a から b まで定積分可能であるとする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとる.

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

について $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ とする.

実数 a と b について $a \leq b$ で, 関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含み, f は a から b まで定積分可能であるとする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとる.

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

について $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ とする. 定積分の定義より, $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して, $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ は変わらない.

関数 f が a から b まで定積分可能であるとき、定積分の定義より、 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して、 $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ は変わらない。

関数 f が a から b まで定積分可能であるとき、定積分の定義より、 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して、 $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ は変わらない。そこで、 $\xi_k = x_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) とすると、リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

関数 f が a から b まで定積分可能であるとき、定積分の定義より、 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して、 $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ は変わらない。そこで、 $\xi_k = x_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) とすると、リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

また別に、 $\xi_k = x_{k-1}$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) とすると、リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} .$$

関数 f が a から b まで定積分可能であるとき、定積分の定義より、 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して、 $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ は変わらない。そこで、 $\xi_k = x_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) とすると、リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

また別に、 $\xi_k = x_{k-1}$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) とすると、リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} .$$

f のリーマン和として $\sum_{k=1}^n \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\}$ 或いは $\sum_{k=1}^n \{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ をしばしばを用いる。