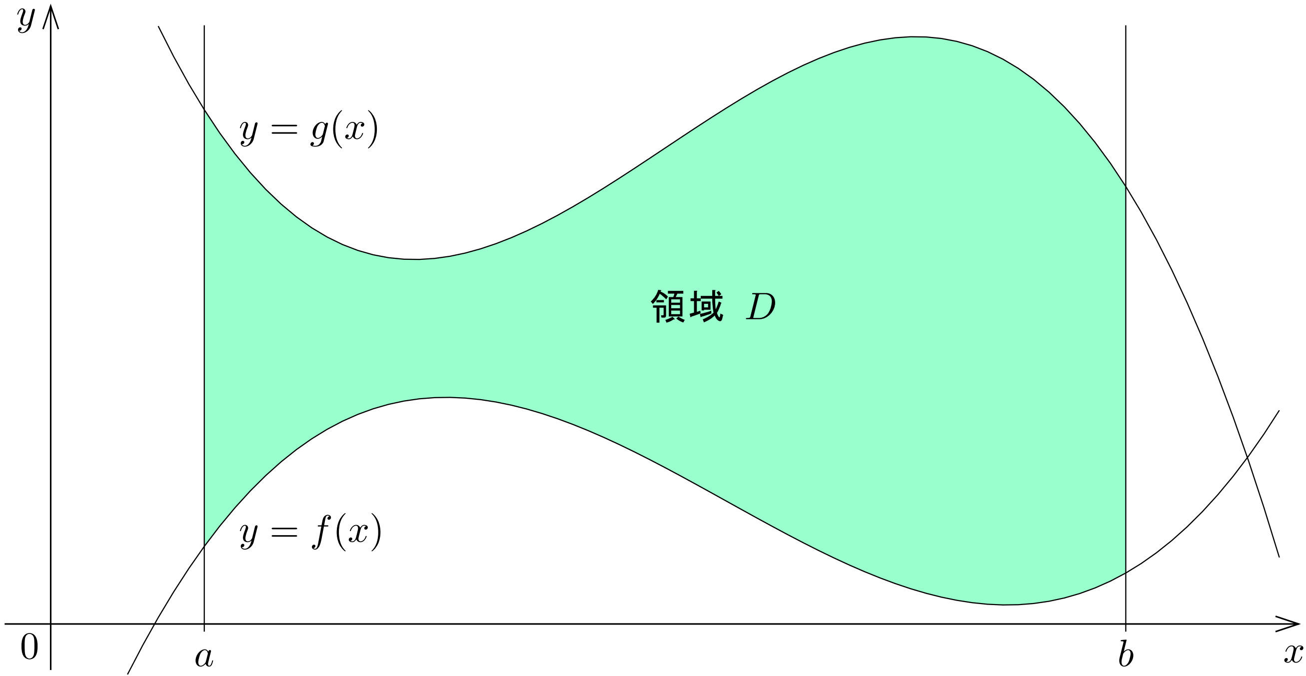
8.2　平面領域の面積

実数 a と b とについて $a \leq b$ とする．また，関数 f と g とは a から b まで積分可能であり，区間 $[a, b]$ の各実数 x について $f(x) \leq g(x)$ とする．xy 座標平面において，連立不等式

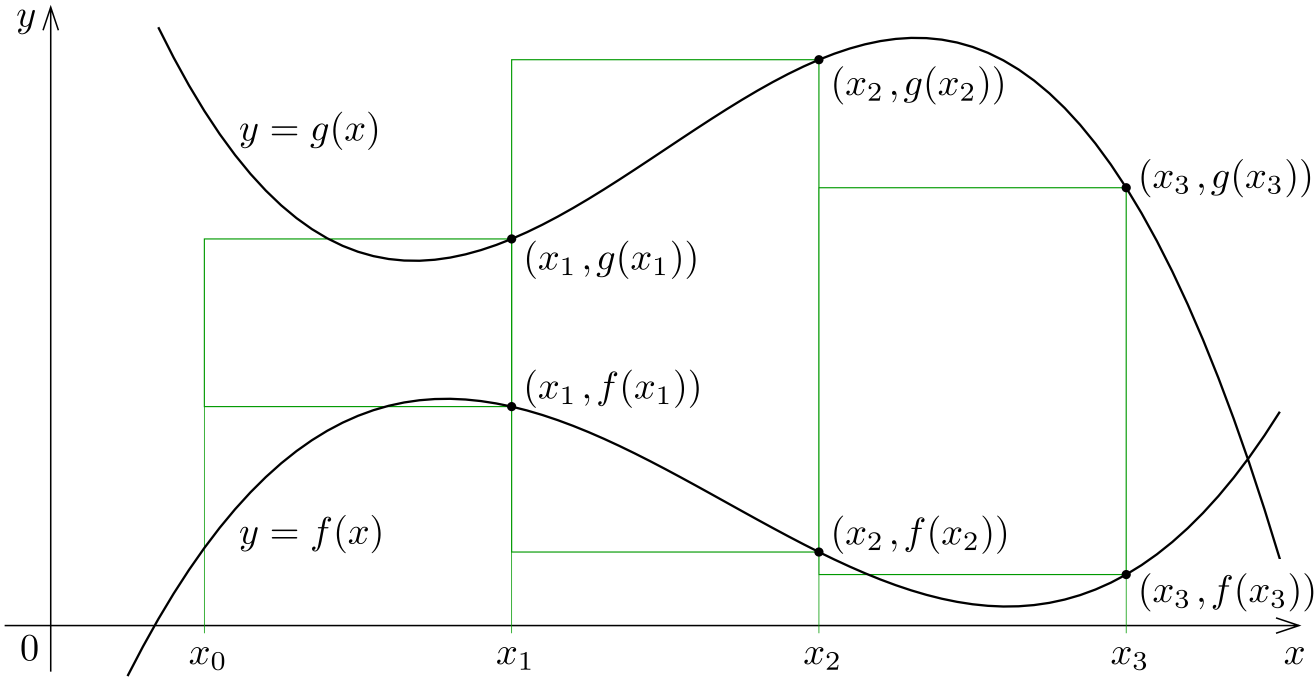
$$a \leq x \leq b \text{ かつ } f(x) \leq y \leq g(x)$$

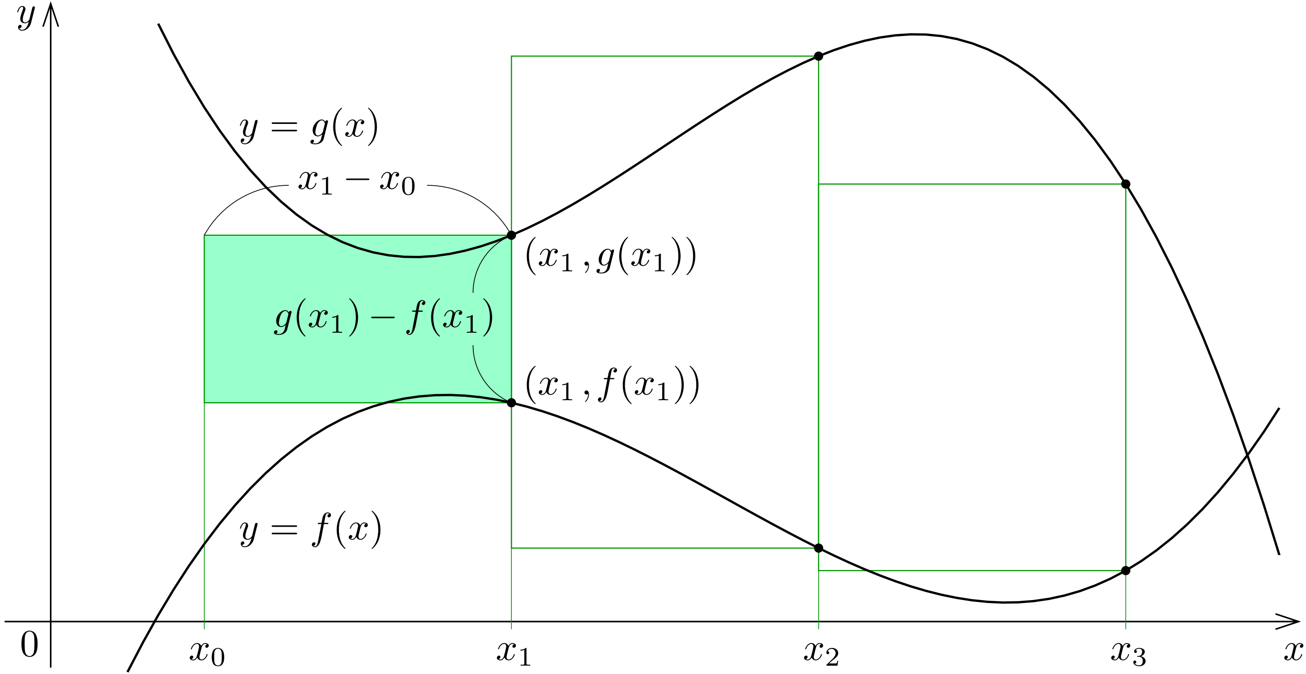
で表される領域を D の面積を考える．

例えば領域 D が下図の明緑色の図形であるとする.



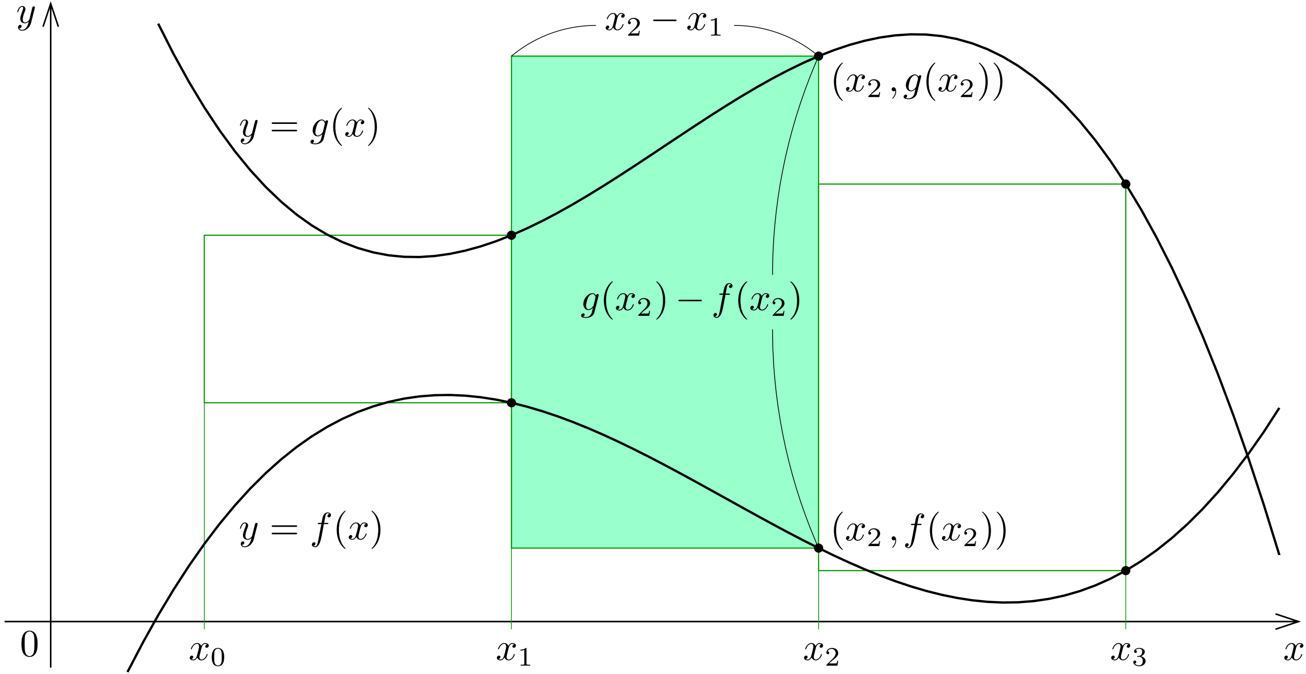
$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 = b$ である実数 x_0, x_1, x_2, x_3 に対して下図の状況を考える.





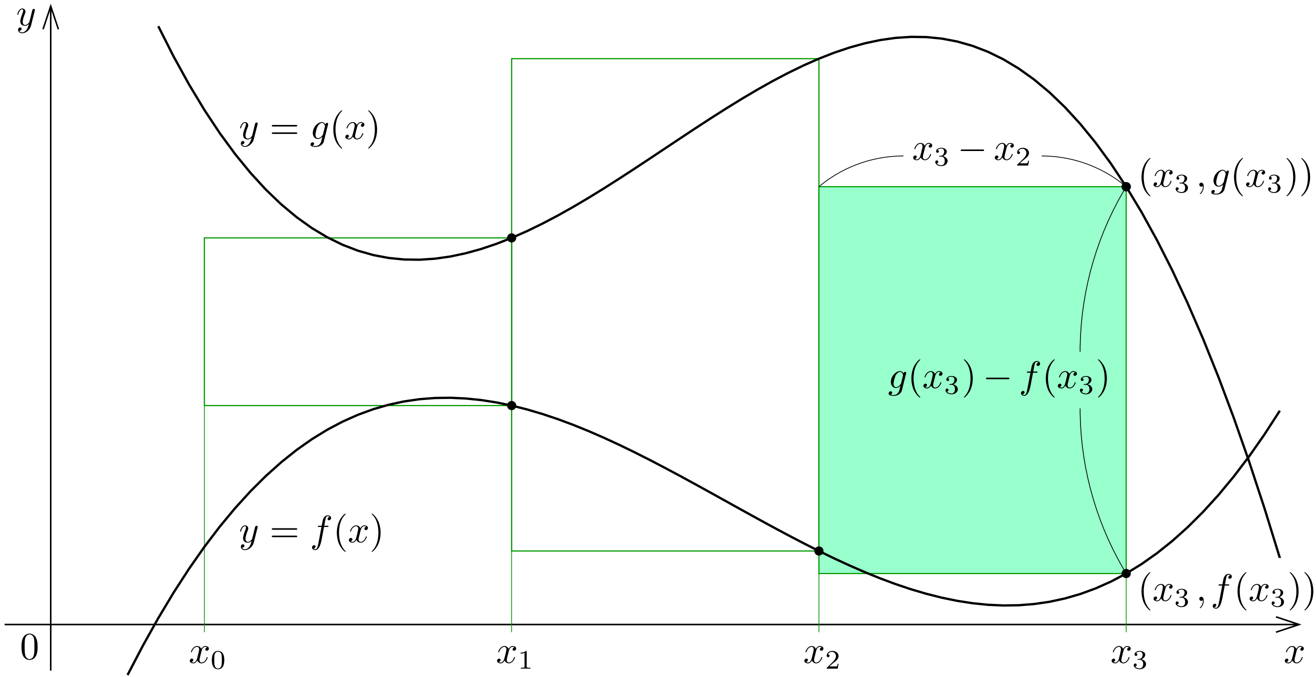
上図の明緑色の長方形の面積は

$$\{g(x_1) - f(x_1)\}(x_1 - x_0)\ .$$



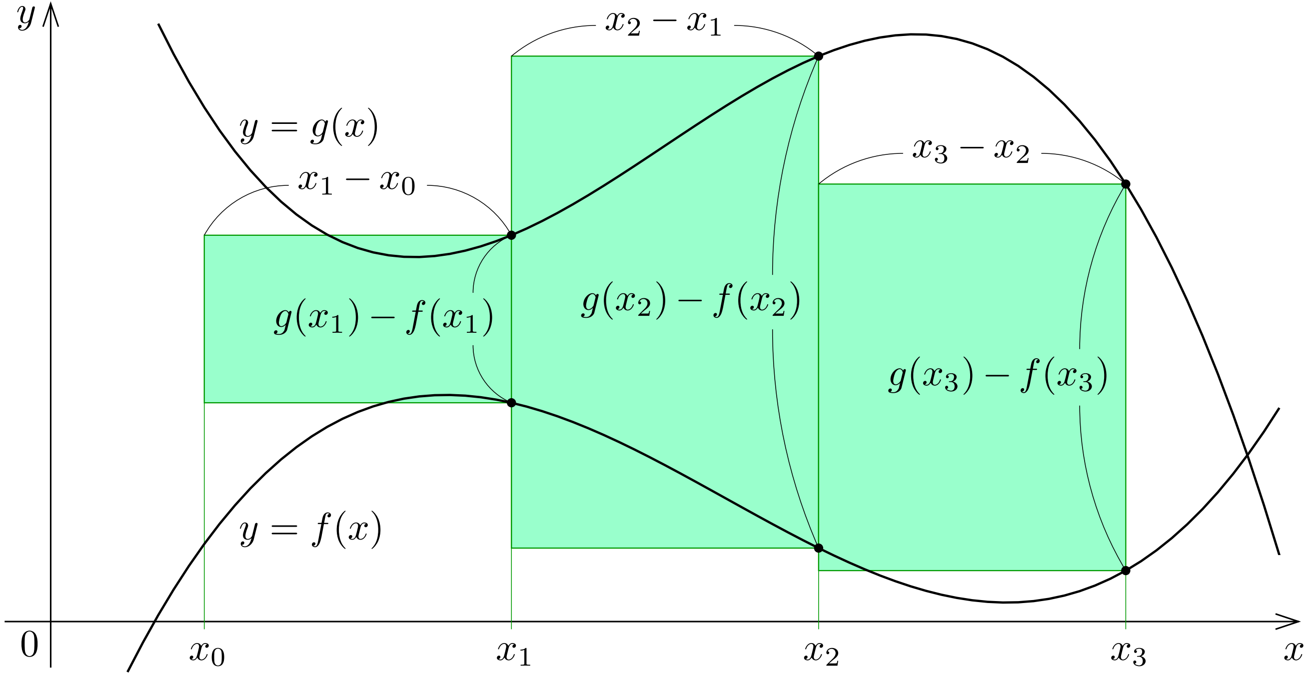
上図の明緑色の長方形の面積は

$$\{g(x_2) - f(x_2)\}(x_2 - x_1)\ .$$



上図の明緑色の長方形の面積は

$$\{g(x_3) - f(x_3)\}(x_3 - x_2)\ .$$



上図の 3 個の長方形を併せた図形（明緑色の部分の図形）の面積は

$$\{g(x_1) - f(x_1)\}(x_1 - x_0) + \{g(x_2) - f(x_2)\}(x_2 - x_1) + \{g(x_3) - f(x_3)\}(x_3 - x_2)\ .$$

このような 3 個の長方形を併せた図形の面積は

$$\{g(x_1) - f(x_1)\}(x_1 - x_0) + \{g(x_2) - f(x_2)\}(x_2 - x_1) + \{g(x_3) - f(x_3)\}(x_3 - x_2)$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \left[\{g(x_k) - f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})\right] \ .$$

このような 3 個の長方形を併せた図形の面積は

$$\{g(x_1)-f(x_1)\}(x_1-x_0)+\{g(x_2)-f(x_2)\}(x_2-x_1)+\{g(x_3)-f(x_3)\}(x_3-x_2)$$

$$=\sum_{k=1}^{3}\Big[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})\Big]\ .$$

これは関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和である.

このような長方形を増やして個々の長方形を細くしていく.

このような長方形を増やして個々の長方形を細くしていく.

正の各自然数 n に対して

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとり,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\{ g(x_k) - f(x_k) \} (x_k - x_{k-1}) \right]$$

を考える；これは関数 $g(x) - f(x)$ のリーマン和である.

このような長方形を増やして個々の長方形を細くしていく.

正の各自然数 n に対して

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとり,

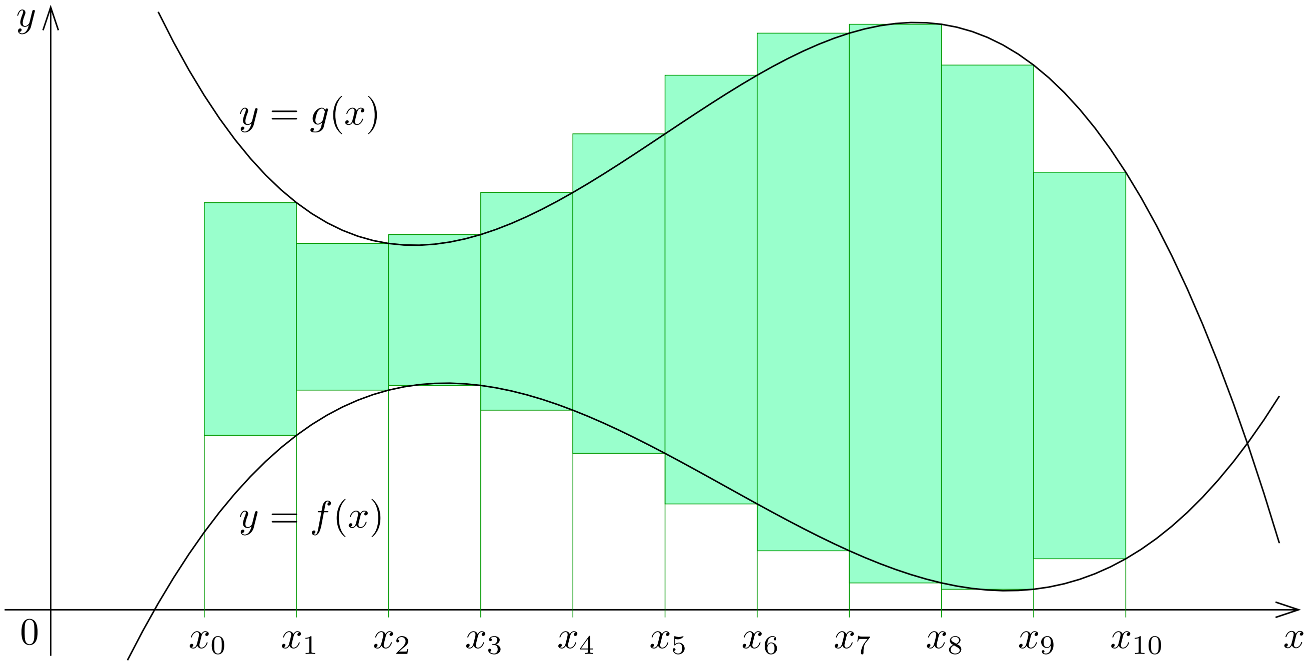
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} [\{g(x_k) - f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})]$$

を考える ; これは関数 $g(x) - f(x)$ のリーマン和である.

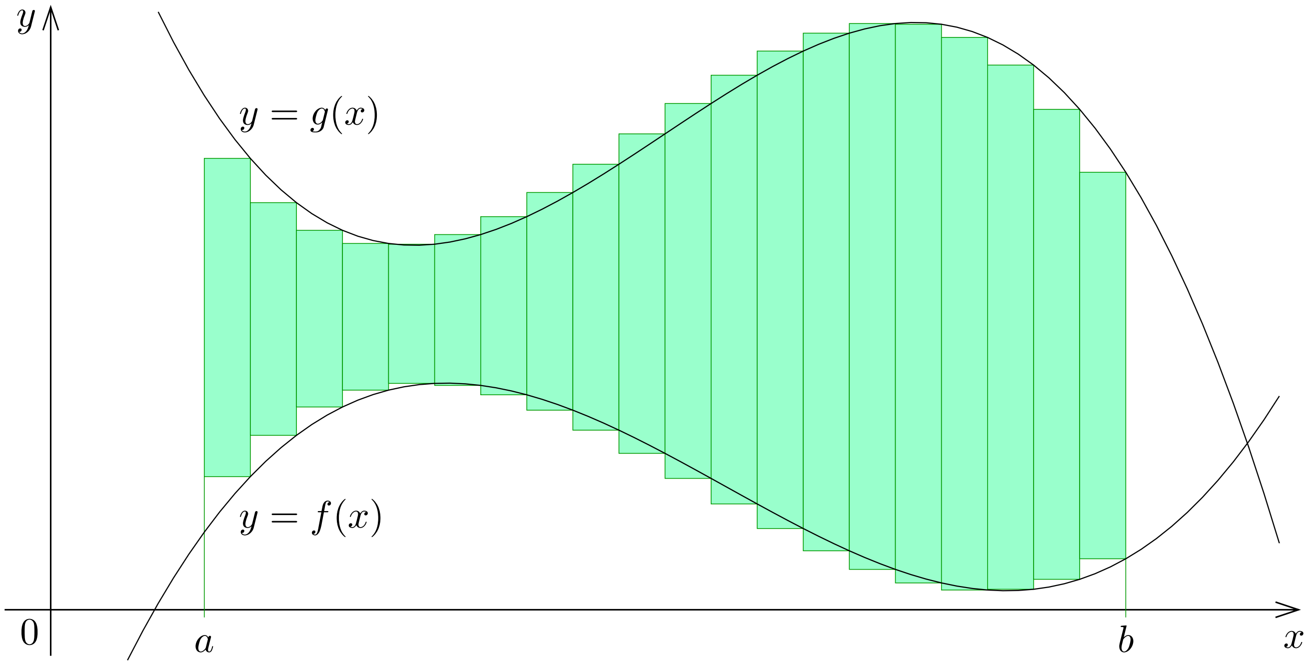
$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$$

について, $n \to \infty$ のとき $\delta_n \to 0$ とする. つまり, $n \to \infty$ のとき $x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n$ の間隔は 0 に限りなく近づくとする.

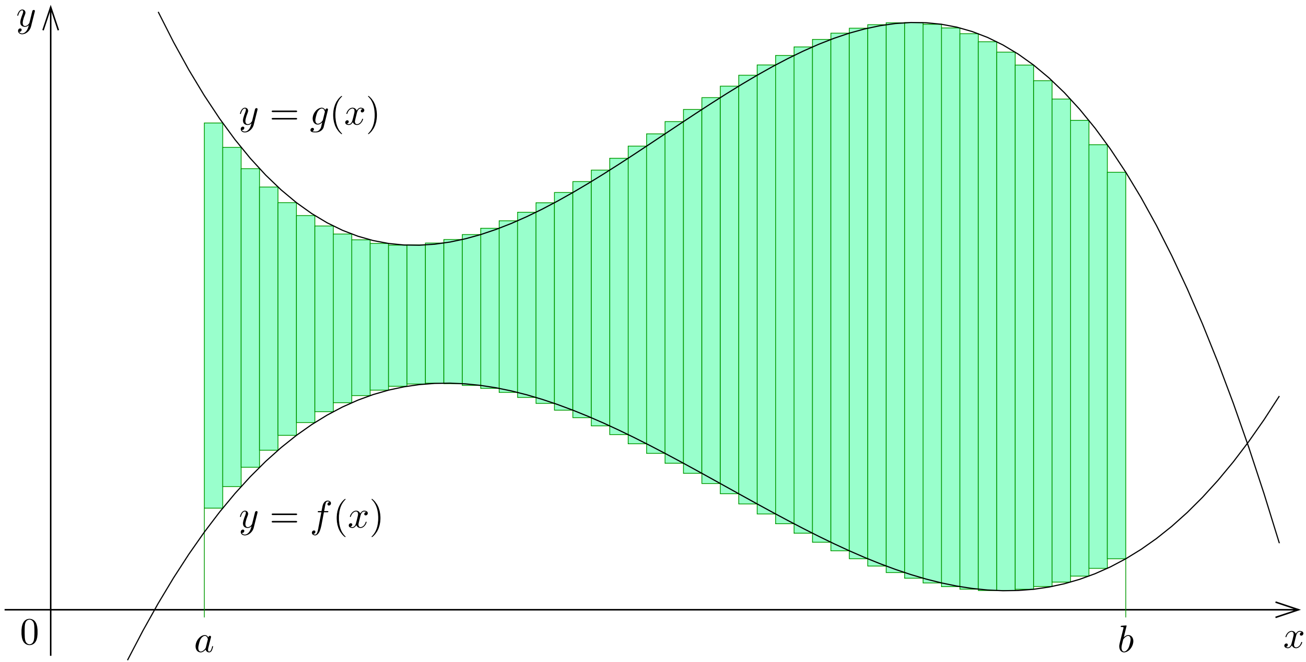
$n=10$ のとき，下図の 10 個の明緑色の長方形を併せた図形の面積は関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_{10}=\sum_{k=1}^{10}[\{g(x_k)-f(y_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ である．



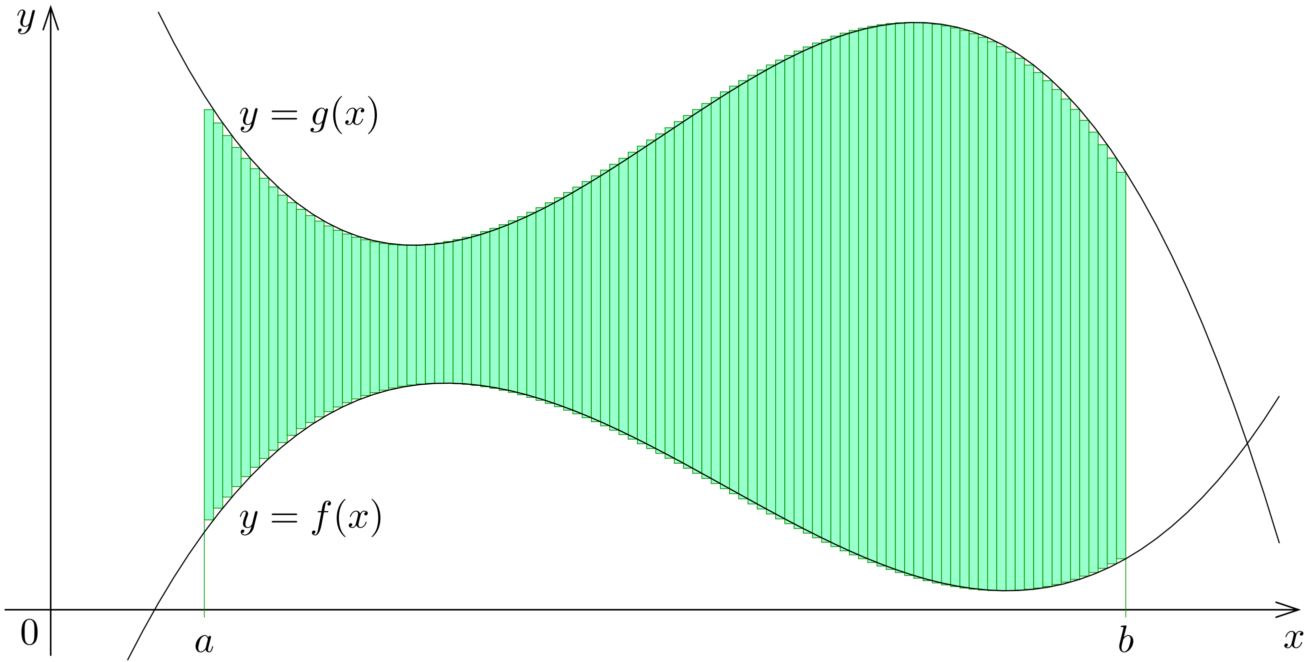
$n = 20$ のとき，下図の 20 個の明緑色の長方形を併せた図形の面積は関数 $g(x) - f(x)$ のリーマン和 $S_{20} = \sum_{k=1}^{20} [\{g(x_k) - f(y_k)\}(x_k - x_{k-1})]$ である.



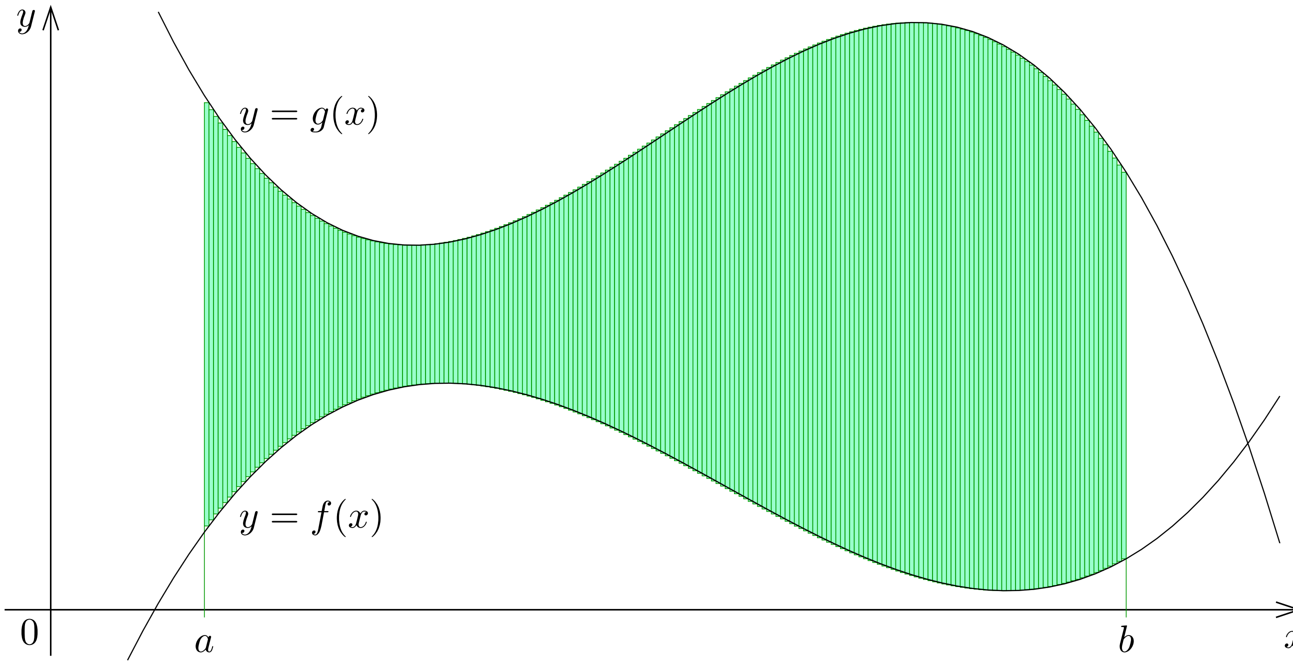
$n=50$ のとき，下図の 50 個の明緑色の長方形を併せた図形の面積は関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_{50}=\sum_{k=1}^{50}[\{g(x_k)-f(y_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ である．



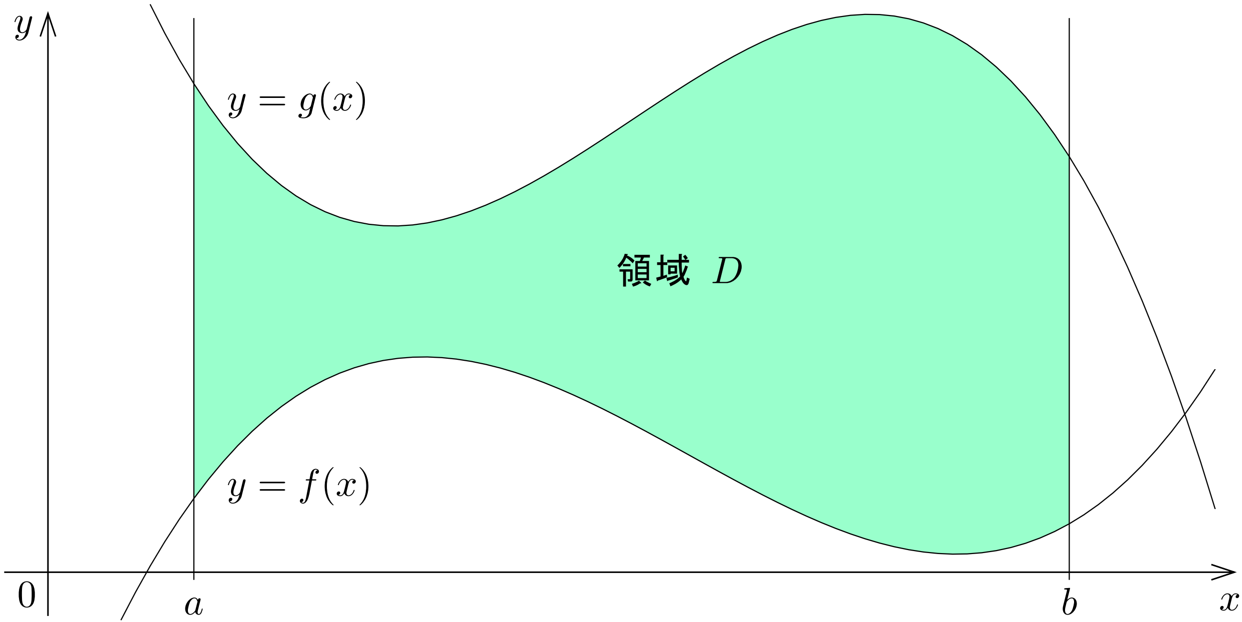
$n=100$ のとき，下図の 100 個の明緑色の長方形を併せた図形の面積は関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_{100}=\sum_{k=1}^{100}\left[\{g(x_k)-f(y_k)\}(x_k-x_{k-1})\right]$ である．

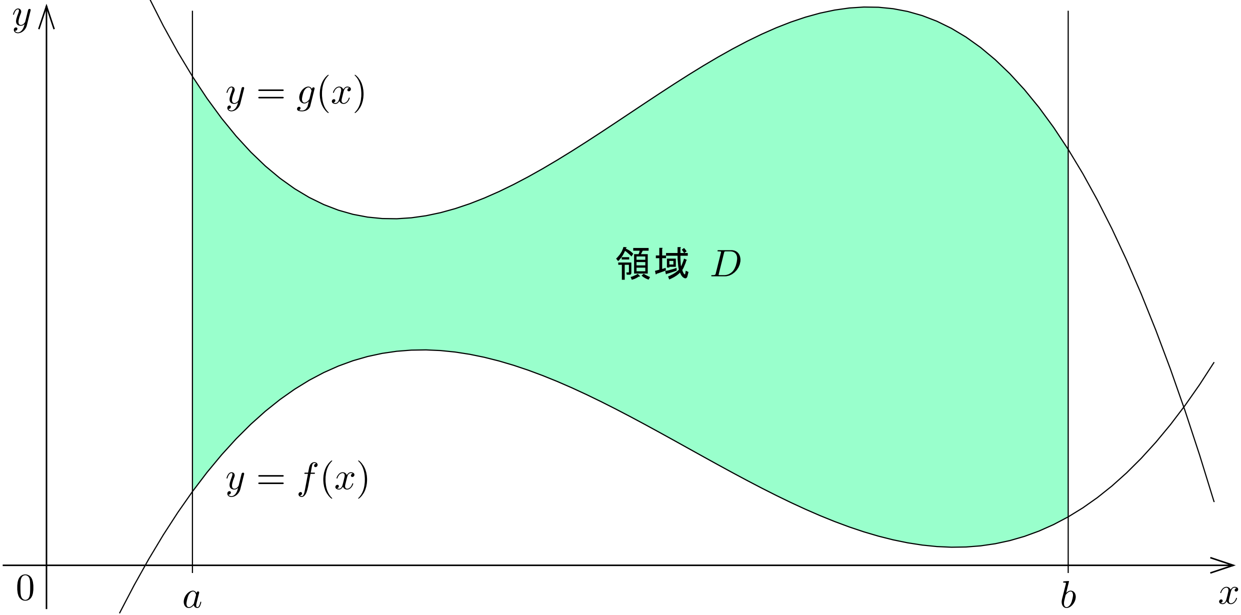


$n = 200$ のとき，下図の 200 個の明緑色の長方形を併せた図形の面積は関数 $g(x) - f(x)$ のリーマン和 $S_{200} = \sum_{k=1}^{200} [\{g(x_k) - f(y_k)\}(x_k - x_{k-1})]$ である．



このような n 個の長方形を併せた図形の面積は関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})\right]$ であり，長方形を限りなく増やして個々の長方形を限りなく細くすると元の領域 D の面積に限りなく近づく.





関数 $g(x) - f(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} [\{g(x_k) - f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})]$ は $n \to \infty$ のとき領域 D の面積に限りなく近づく. 故に領域 D の面積はリーマン和 S_n の $n \to \infty$ のときの極限値である.

領域 D の面積は関数 $g(x) - f(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} [\{g(x_k) - f(x_k)\} (x_k - x_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n \to \infty} S_n$ である.

領域 D の面積は関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ である．関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが a から b まで積分可能なので，関数 $g(x)-f(x)$ も a から b まで積分可能である．

領域 D の面積は関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ である．関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが a から b まで積分可能なので，関数 $g(x)-f(x)$ も a から b まで積分可能である． $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ なので，関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ は $n\to\infty$ のとき定積分 $\int_a^b\{g(x)-f(x)\}dx$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\int_a^b\{g(x)-f(x)\}dx\ .$$

領域 D の面積は関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} [\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ である．関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが a から b まで積分可能なので，関数 $g(x)-f(x)$ も a から b まで積分可能である． $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ なので，関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} [\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})]$ は $n \to \infty$ のとき定積分 $\int_a^b \{g(x)-f(x)\}\,dx$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b \{g(x)-f(x)\}\,dx\ .$$

故に，領域 D の面積は関数 $g(x)-f(x)$ の定積分 $\int_a^b \{g(x)-f(x)\}\,dx$ である．

領域 D の面積は関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ である．関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが a から b まで積分可能なので，関数 $g(x)-f(x)$ も a から b まで積分可能である． $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ なので，関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ は $n\to\infty$ のとき定積分 $\int_a^b\{g(x)-f(x)\}\,dx$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_a^b\{g(x)-f(x)\}\,dx\ .$$

故に，領域 D の面積は関数 $g(x)-f(x)$ の定積分 $\int_a^b\{g(x)-f(x)\}\,dx$ である．

このようにして次の定理が成り立つ．

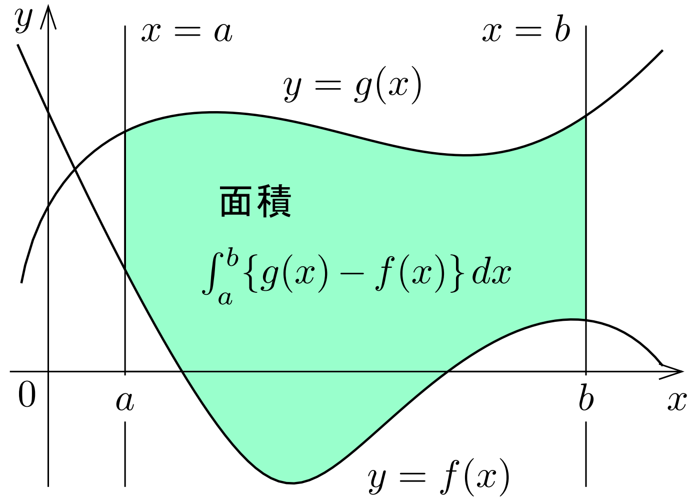
定理　実数 a と b とについて $a \leq b$ とする．また，関数 f と g とは a から b まで積分可能で，区間 $[a, b]$ の各実数 x について $f(x) \leq g(x)$ とする．xy 座標平面において連立不等式

$$a \leq x \leq b \text{ かつ } f(x) \leq y \leq g(x)$$

で表される領域の面積は

$$\int_a^b \{g(x) - f(x)\}\, dx$$

である．



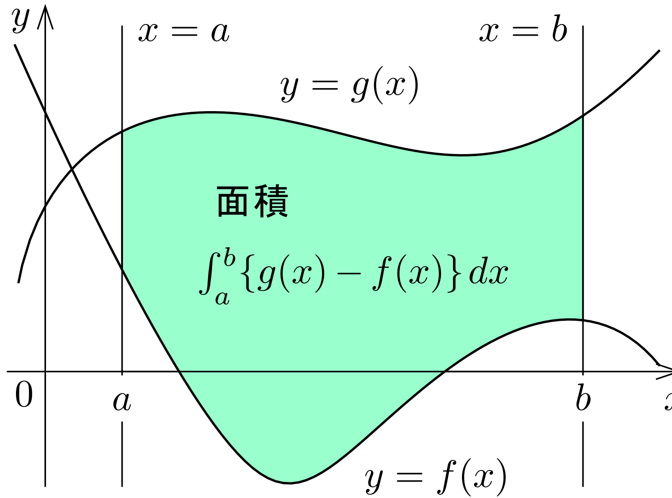
定理　実数 a と b とについて $a \leq b$ とする．また，関数 f と g とは a から b まで積分可能で，区間 $[a,b]$ の各実数 x について $f(x) \leq g(x)$ とする．xy 座標平面において連立不等式

$$a \leq x \leq b \text{ かつ } f(x) \leq y \leq g(x)$$

で表される領域の面積は

$$\int_a^b \{g(x) - f(x)\}\,dx$$

である．

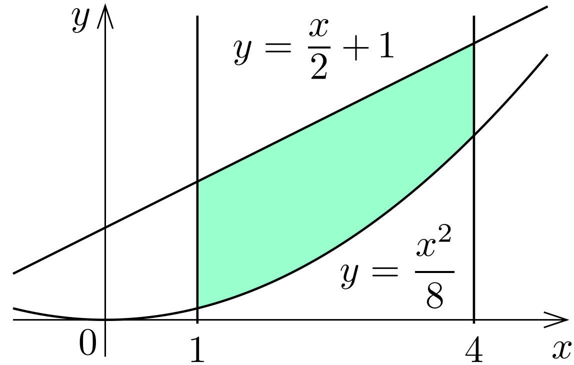


　この定理を用いる際には，領域の点の x 座標の範囲と，その範囲で $f(x) \leq g(x)$ であるかどうかに注意すること．

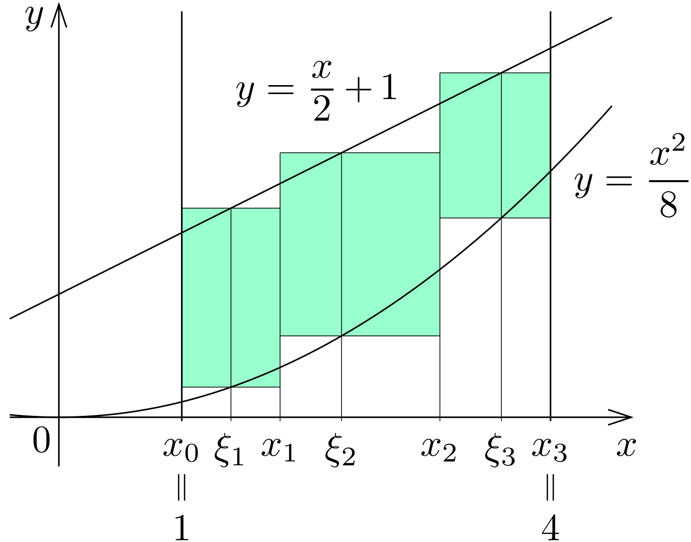
$\boxed{問 8.2.1}$ xy 座標平面において連立不等式

$$1 \leq x \leq 4 \text{ かつ } \frac{x^2}{8} \leq y \leq \frac{x}{2} + 1$$

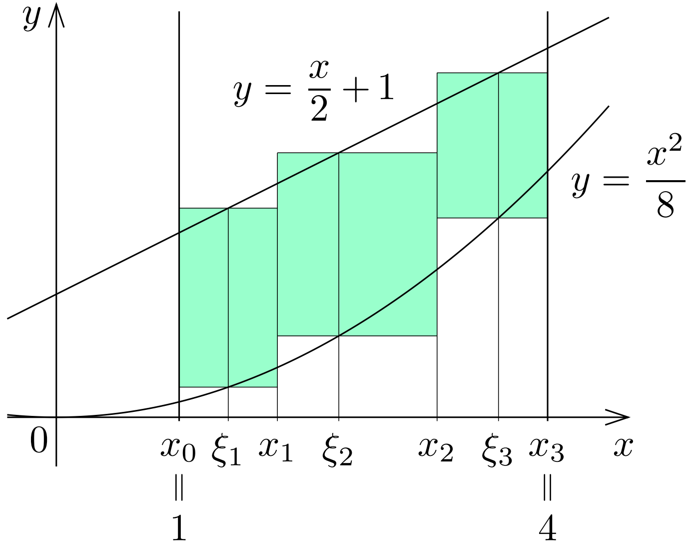
で表される領域 D の面積を求める.



(1) $1 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 = 4$ である実数 x_0, x_1, x_2, x_3 及び $x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3$ である実数 ξ_1, ξ_2, ξ_3 に対して，右図の網掛けされた 3 個の長方形を併せた領域の面積 S_3 を表す式を記せ．



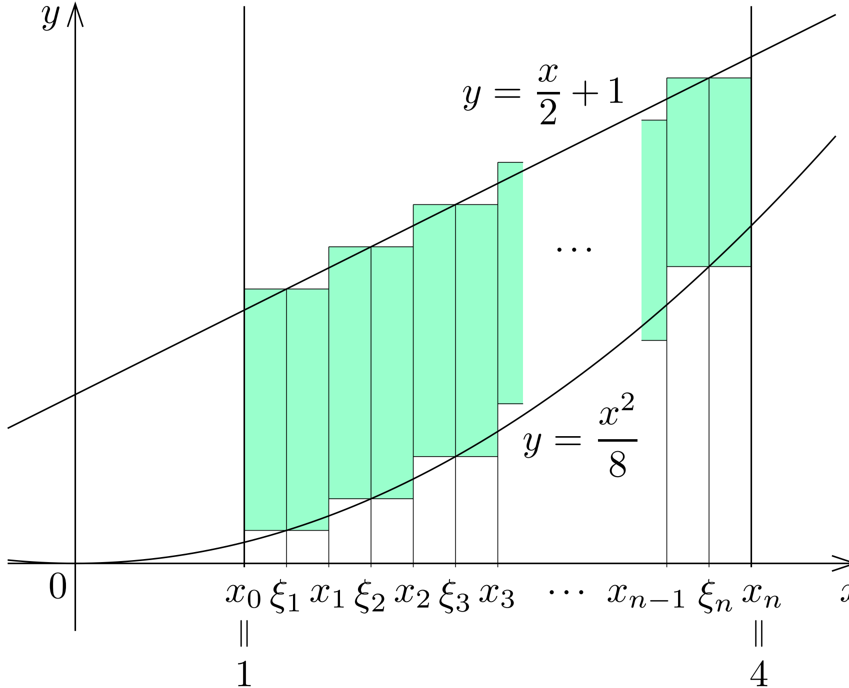
(1) $1 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 = 4$ である実数 x_0, x_1, x_2, x_3 及び $x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3$ である実数 ξ_1, ξ_2, ξ_3 に対して，右図の網掛けされた 3 個の長方形を併せた領域の面積 S_3 を表す式を記せ．



$$S_3 = \left(\frac{\xi_1}{2} + 1 - \frac{{\xi_1}^2}{8}\right)(x_1 - x_0) + \left(\frac{\xi_2}{2} + 1 - \frac{{\xi_2}^2}{8}\right)(x_2 - x_1) + \left(\frac{\xi_3}{2} + 1 - \frac{{\xi_3}^2}{8}\right)(x_3 - x_2)$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\xi_k}{2} + 1 - \frac{{\xi_k}^2}{8}\right)(x_k - x_{k-1}) \ .$$

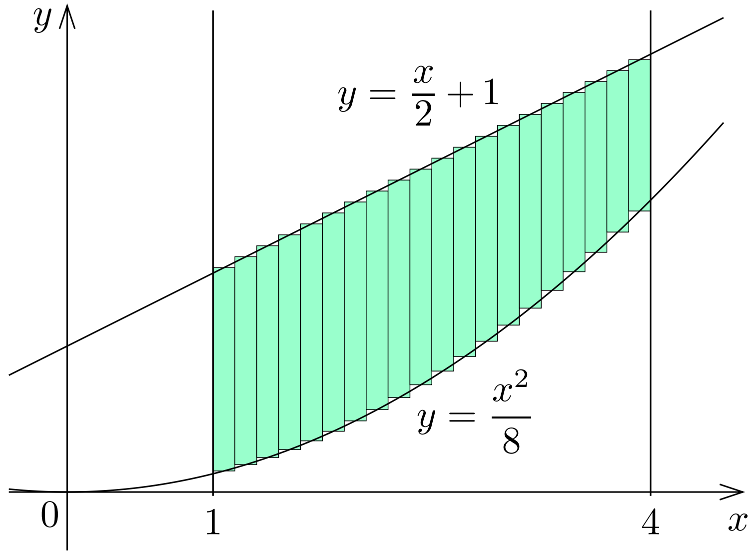
(2)　変数 n を正の自然数とする．$1 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 4$ である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ に対して，右図のような網掛けされた n 個の長方形を併せた領域の面積 S_n を表す式を記せ．またこの式を何というか記せ．



$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left(\frac{\xi_k}{2} + 1 - \frac{{\xi_k}^2}{8} \right) (x_k - x_{k-1}) \right\} .$$

これは関数 $\dfrac{x}{2} + 1 - \dfrac{x^2}{8}$ のリーマン和である.

(3) $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ について $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とする；つまり $n \to \infty$ のとき $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ の間隔は総て 0 に限りなく近付くとする．$n \to \infty$ のとき S_n は右図のように領域 D の面積に限りなく近付く；つまり S_n の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ が領域 D の面積になる．このことを用いて，定積分によって領域 D の面積を求めよ．

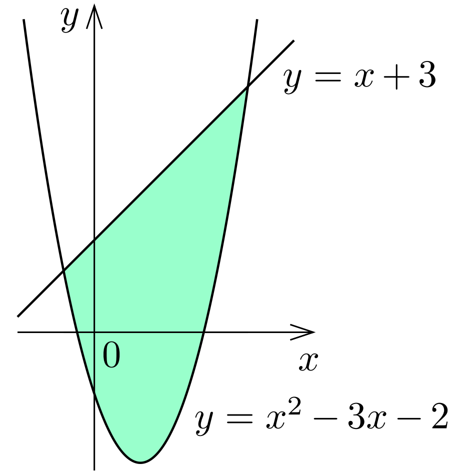


$\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$ なので，関数 $\dfrac{x}{2}+1-\dfrac{x^2}{8}$ のリーマン和 S_n は定積分 $\displaystyle\int_1^4\left(\frac{x}{2}+1-\frac{x^2}{8}\right)dx$ に収束する．領域 D の面積は

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_1^4\left(\frac{x}{2}+1-\frac{x^2}{8}\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^2+x-\frac{1}{24}x^3\right]_1^4 = \frac{33}{8} \ .$$

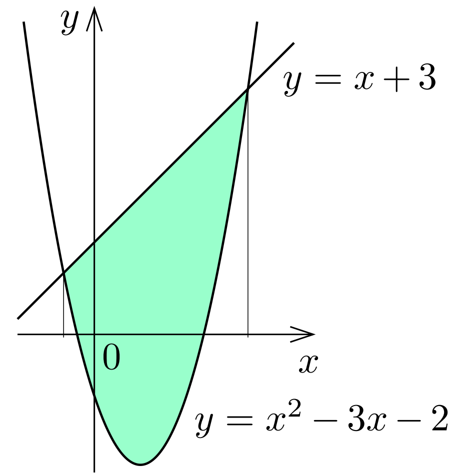
$\boxed{\text{終}}$

例 xy 座標平面において関数 $y = x^2 - 3x - 2$ のグラフと $y = x + 3$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求める.



例 xy 座標平面において関数 $y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求める.

　まず, $y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとの共有点の x 座標を求める.



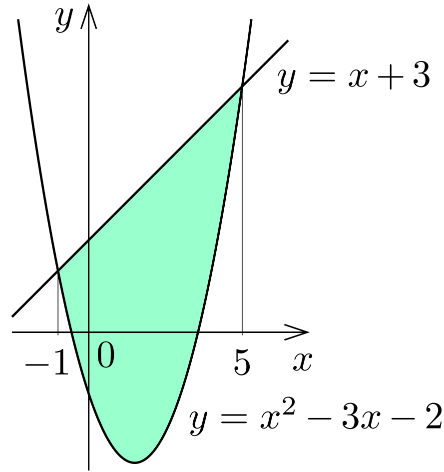
$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において関数 $y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求める.

まず, $y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとの共有点の x 座標を求める. $x^2-3x-2=x+3$ とすると,

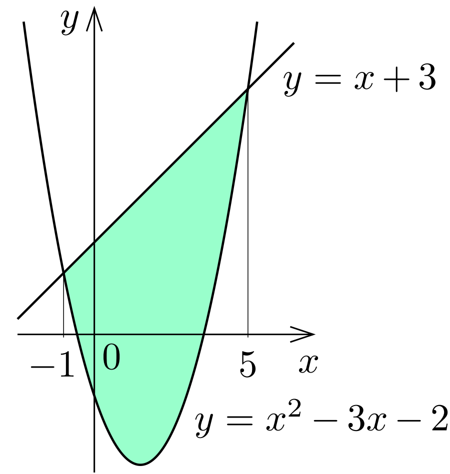
$$x^2-4x-5=0\ ,$$

$$(x+1)(x-5)=0\ ,$$

$$x=-1, 5\ .$$



$\boxed{例}$ xy 座標平面において関数 $y = x^2 - 3x - 2$ のグラフと $y = x + 3$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求める.



まず, $y = x^2 - 3x - 2$ のグラフと $y = x + 3$ のグラフとの共有点の x 座標を求める. $x^2 - 3x - 2 = x + 3$ とすると,

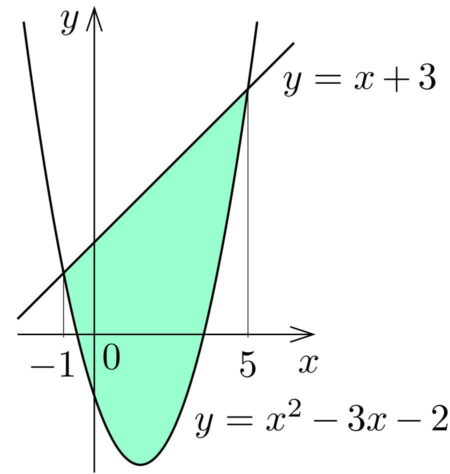
$$x^2 - 4x - 5 = 0 \ ,$$

$$(x+1)(x-5) = 0 \ ,$$

$$x = -1, 5 \ .$$

$y = x^2 - 3x - 2$ のグラフと $y = x + 3$ のグラフとの共有点の x 座標は -1 と 5 の 2 個である. $-1 \leq x \leq 5$ のとき $x^2 - 3x - 2 \leq x + 3$.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において関数 $y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求める.



まず, $y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとの共有点の x 座標を求める. $x^2-3x-2=x+3$ とすると,

$$x^2-4x-5=0\ ,$$

$$(x+1)(x-5)=0\ ,$$

$$x=-1,5\ .$$

$y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとの共有点の x 座標は -1 と 5 の 2 個である. $-1\leq x\leq 5$ のとき $x^2-3x-2\leq x+3$. 従って, $y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとで囲まれる領域の面積は

$$\int_{-1}^{5}\{(x+3)-(x^2-3x-2)\}\,dx=\int_{-1}^{5}(-x^2+4x+5)\,dx$$

$y = x^2 - 3x - 2$ のグラフと $y = x + 3$ のグラフとで囲まれる領域の面積は

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{5} \{(x+3) - (x^2 - 3x - 2)\}\,dx &= \int_{-1}^{5} (-x^2 + 4x + 5)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x\right]_{-1}^{5} \\ &= -\frac{125}{3} + 50 + 25 - \left(\frac{1}{3} + 2 - 5\right) \\ &= 36 \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 8.2.2}$ xy 座標平面において関数 $y = 9 - x^2$ のグラフと $y = 1 - 2x$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求めよ.

方程式 $9 - x^2 = 1 - 2x$ を解くと, $\qquad = 0$, $(x \qquad)(x \qquad) = 0$, $x = \quad , \quad$. $\quad \leq x \leq \quad$ のとき $9 - x^2 \quad 1 - 2x$. 従って求める面積は

$$\int \quad \{(\qquad) - (\qquad)\} dx =$$

$\boxed{問 8.2.2}$ xy 座標平面において関数 $y = 9 - x^2$ のグラフと $y = 1 - 2x$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求めよ.

方程式 $9 - x^2 = 1 - 2x$ を解くと, $x^2 - 2x - 8 = 0$, $(x+2)(x-4) = 0$, $x = 4, -2$. $-2 \leq x \leq 4$ のとき $9 - x^2 \geq 1 - 2x$. 従って求める面積は

$$\int \quad \{(\qquad\qquad) - (\qquad\qquad)\}\,dx =$$

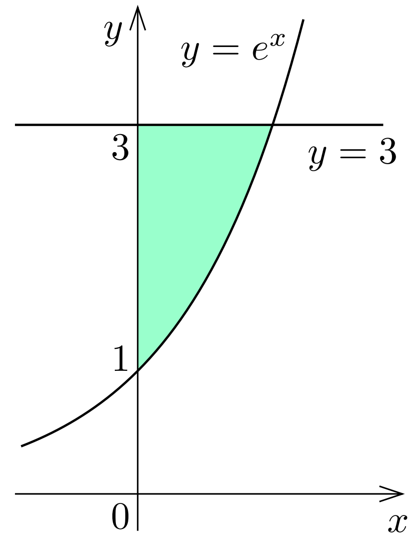
$\boxed{問 8.2.2}$ xy 座標平面において関数 $y=9-x^2$ のグラフと $y=1-2x$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求めよ.

方程式 $9-x^2=1-2x$ を解くと, $x^2-2x-8=0$, $(x+2)(x-4)=0$, $x=4,-2$. $-2\leq x\leq 4$ のとき $9-x^2\geq 1-2x$. 従って求める面積は

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{4}\{(9-x^2)-(1-2x)\}\,dx &= \int_{-2}^{4}(-x^2+2x+8)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+8x\right]_{-2}^{4} \\ &= 36\ .\end{aligned}$$

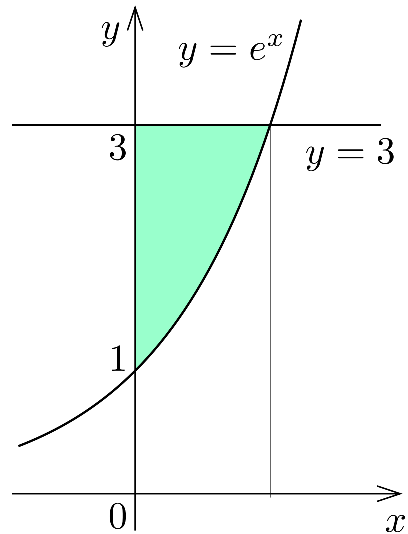
$\boxed{終}$

例 xy 座標平面において指数関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ と y 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.



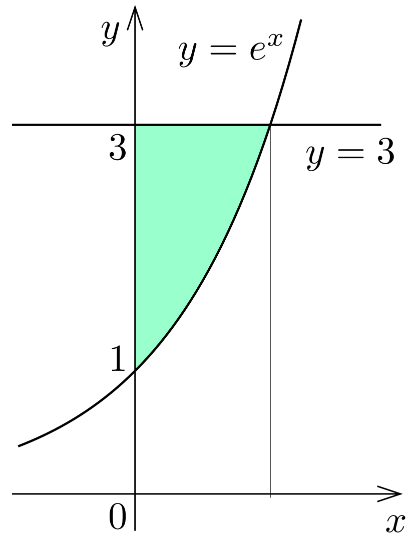
$\boxed{例}$ xy 座標平面において指数関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = 3$ と y 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.

　まず関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = 3$ との共有点の x 座標を求める.



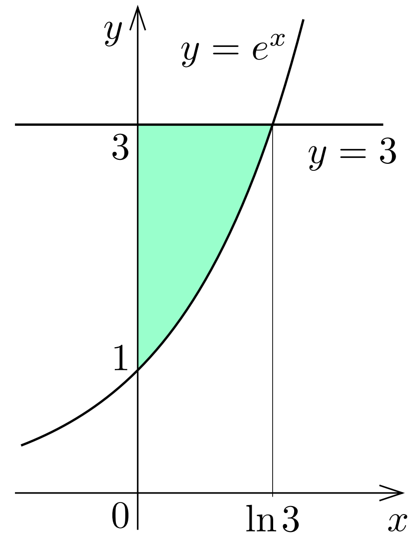
$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において指数関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = 3$ と y 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.

まず関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = 3$ との共有点の x 座標を求める. $y = e^x$ かつ $y = 3$ とすると, $e^x = 3$ なので $x = \ln 3$.



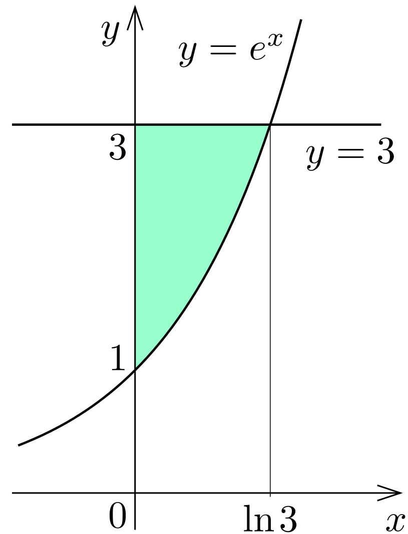
$\boxed{例}$ xy 座標平面において指数関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ と y 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.

まず関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ との共有点の x 座標を求める. $y=e^x$ かつ $y=3$ とすると, $e^x=3$ なので $x=\ln 3$. 関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ との共有点の x 座標は $\ln 3$ である.

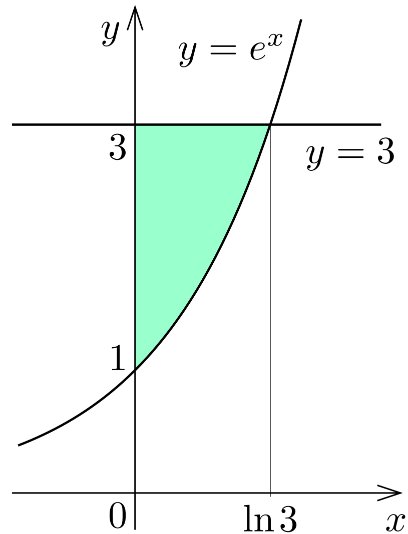


例 xy 座標平面において指数関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ と y 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.

まず関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ との共有点の x 座標を求める. $y=e^x$ かつ $y=3$ とすると, $e^x=3$ なので $x=\ln 3$. 関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ との共有点の x 座標は $\ln 3$ である. D の点の x 座標の範囲は $0\leq x\leq \ln 3$ であり, このとき $e^x\leq e^{\ln 3}=3$.



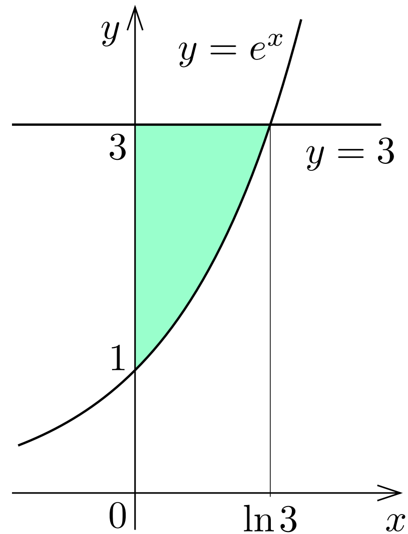
例 xy 座標平面において指数関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ と y 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.



まず関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ との共有点の x 座標を求める. $y=e^x$ かつ $y=3$ とすると, $e^x=3$ なので $x=\ln 3$. 関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ との共有点の x 座標は $\ln 3$ である. D の点の x 座標の範囲は $0 \leq x \leq \ln 3$ であり, このとき $e^x \leq e^{\ln 3}=3$. 領域 D の面積は

$$\int_0^{\ln 3}(3-e^x)\,dx$$

例 xy 座標平面において指数関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ と y 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.



まず関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ との共有点の x 座標を求める. $y=e^x$ かつ $y=3$ とすると, $e^x=3$ なので $x=\ln 3$. 関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ との共有点の x 座標は $\ln 3$ である. D の点の x 座標の範囲は $0 \leq x \leq \ln 3$ であり, このとき $e^x \leq e^{\ln 3}=3$. 領域 D の面積は

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln 3}(3-e^x)\,dx &= \left[3x-e^x\right]_0^{\ln 3} \\
&= 3\ln 3-e^{\ln 3}-(-1) \\
&= \ln 3^3-3+1 \\
&= \ln 27-2\ .
\end{aligned}$$

終

$\boxed{\text{問}8.2.3}$ xy 座標平面において対数関数 $y = \ln x$ のグラフと直線 $x = 9$ と直線 $y = 2$ とで囲まれる領域 D の面積を求めよ.

$\ln x = 2$ とすると $x = \quad < 9$. $x \geq \quad$ のとき $\ln x \geq \ln \quad = \quad$. 領域 D の面積は

$$\int^{9} \left(\qquad \right) dx =$$

$\boxed{\text{問}8.2.3}$ xy 座標平面において対数関数 $y = \ln x$ のグラフと直線 $x = 9$ と直線 $y = 2$ とで囲まれる領域 D の面積を求めよ.

$\ln x = 2$ とすると $x = e^2 < 9$. $x \geq e^2$ のとき $\ln x \geq \ln e^2 = 2$. 領域 D の面積は

$$\int^9 (\qquad\qquad) dx =$$

$\boxed{問8.2.3}$ xy 座標平面において対数関数 $y = \ln x$ のグラフと直線 $x = 9$ と直線 $y = 2$ とで囲まれる領域 D の面積を求めよ.

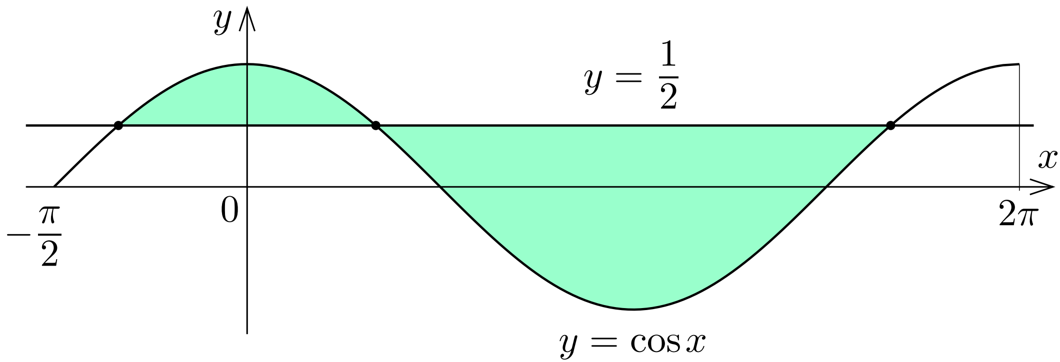
$\ln x = 2$ とすると $x = e^2 < 9$. $x \geq e^2$ のとき $\ln x \geq \ln e^2 = 2$. 領域 D の面積は

$$\int_{e^2}^{9} (\ln x - 2)\, dx = \Big[x \ln x - 3x \Big]_{e^2}^{9} = 9 \ln 9 - 27 - e^2 \ln e^2 + 3e^2$$
$$= 9 \ln 9 + e^2 - 27 \ .$$

$\boxed{終}$

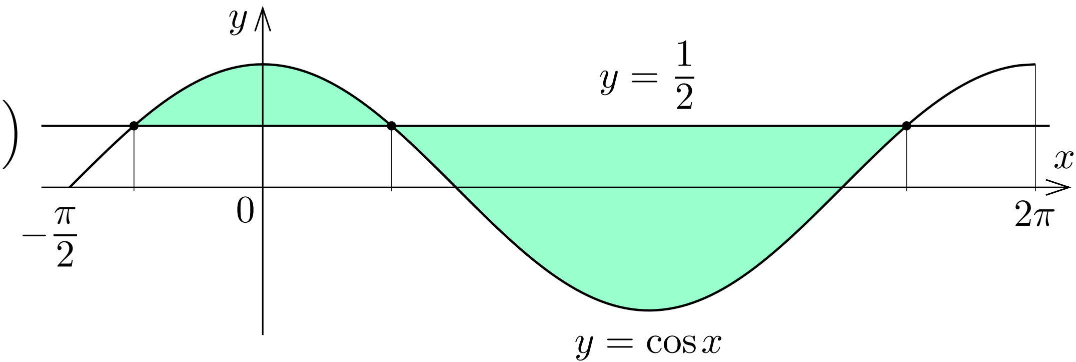
$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において関数 $y = \cos x \ \left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \right)$ のグラフと直線 $y = \dfrac{1}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求める.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において関数 $y=\cos x \ \left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi\right)$ のグラフと直線 $y=\dfrac{1}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求める.



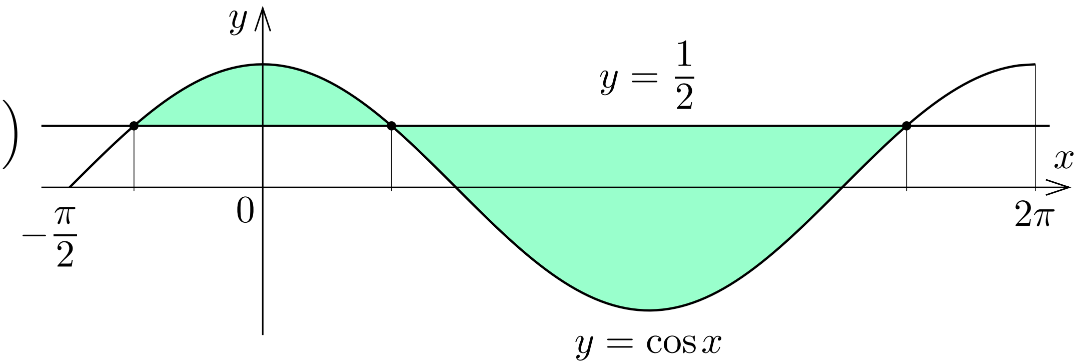
$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において関数 $y = \cos x \left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \right)$ のグラフと直線 $y = \dfrac{1}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求める.

まず関数 $y = \cos x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \right)$ のグラフと直線 $y = \dfrac{1}{2}$ との共有点の x 座標を求める.



例 xy 座標平面において関数 $y=\cos x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi\right)$ のグラフと直線 $y=\dfrac{1}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求める.

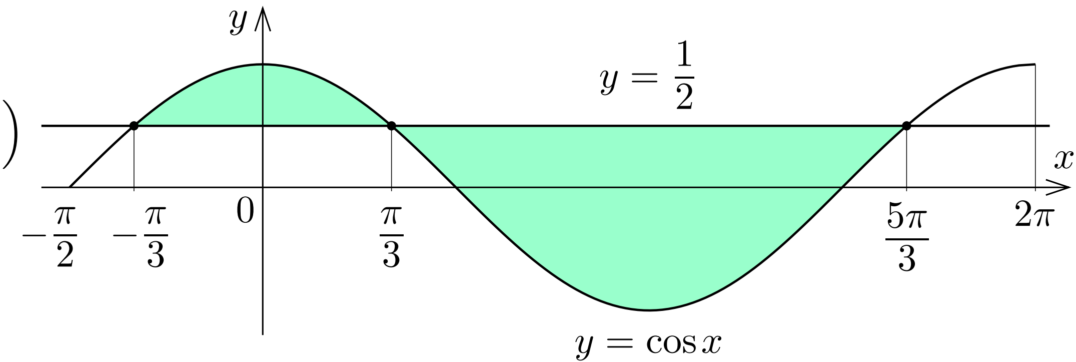
　まず関数 $y=\cos x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi\right)$ のグラフと直線 $y=\dfrac{1}{2}$ との共有点の x 座標を求める.



$\cos x=\dfrac{1}{2}$ かつ $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ とすると, $x=$ 　　, 　　, 　　.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において関数 $y = \cos x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi \right)$ のグラフと直線 $y = \dfrac{1}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求める.

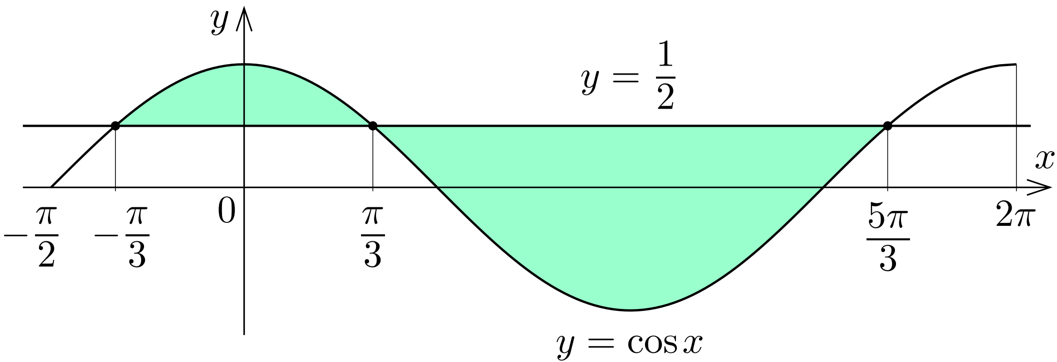
　まず関数 $y = \cos x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi \right)$ のグラフと直線 $y = \dfrac{1}{2}$ との共有点の x 座標を求める.



$\cos x = \dfrac{1}{2}$ かつ $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi$ とすると, $x = -\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}$. $-\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ のとき $\cos x \quad \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{5\pi}{3}$ のとき $\cos x \quad \dfrac{1}{2}$.

$\boxed{例}$ xy 座標平面において関数 $y=\cos x \ \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi\right)$ のグラフと直線 $y=\dfrac{1}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求める.

まず関数 $y=\cos x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi\right)$ のグラフと直線 $y=\dfrac{1}{2}$ との共有点の x 座標を求める.



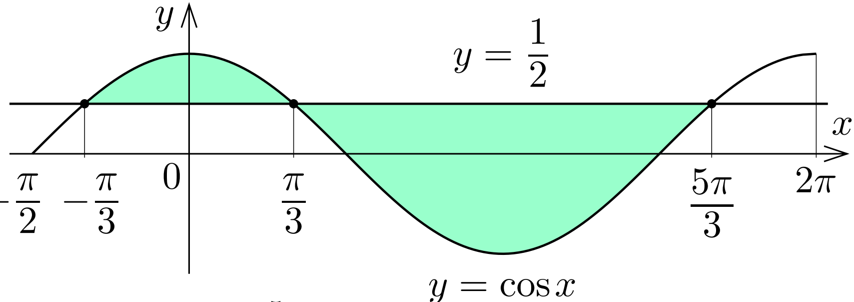
$\cos x=\dfrac{1}{2}$ かつ $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi$ とすると, $x=-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}$. $-\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ のとき $\cos x \geqq \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{5\pi}{3}$ のとき $\cos x \leqq \dfrac{1}{2}$.

$-\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$ のとき

$\cos x \geq \dfrac{1}{2}$ ， $\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{3}$

のとき $\cos x \leq \dfrac{1}{2}$ ．領域

の面積は



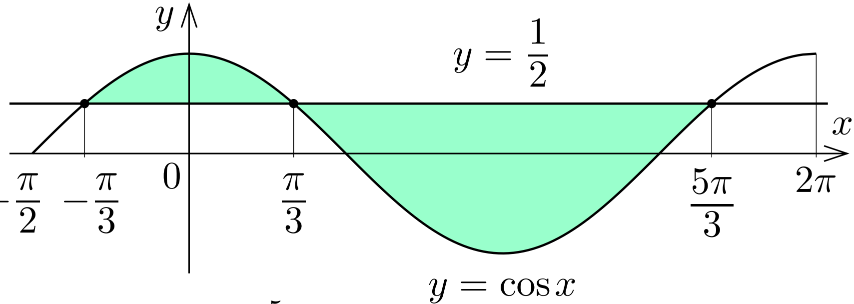
$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\qquad\qquad \right) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \left(\qquad\qquad \right) dx$$

$-\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$　のとき

$\cos x \geq \dfrac{1}{2}$ ，　$\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{3}$

のとき　$\cos x \leq \dfrac{1}{2}$ ．領域

の面積は



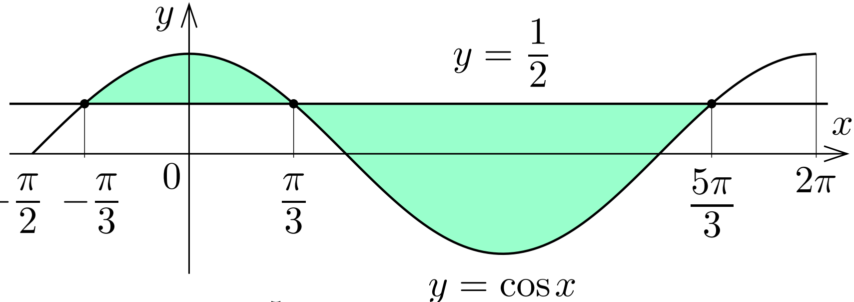
$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos x - \frac{1}{2}\right) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} - \cos x\right) dx$$

$-\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$ のとき

$\cos x \geq \dfrac{1}{2}$ ，$\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{3}$

のとき $\cos x \leq \dfrac{1}{2}$ ． 領域

の面積は



$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos x - \frac{1}{2}\right) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} - \cos x\right) dx$$

$$= \left[\sin x - \frac{x}{2}\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} + \left[\frac{x}{2} - \sin x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3} \ .$$

終

$\boxed{\text{問}8.2.4}$ xy 座標平面において関数 $y = \sin x \ \left(0 \leq x \leq \dfrac{5\pi}{2} \right)$ のグラフと直線 $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求めよ.

$0 \leq x \leq \dfrac{5\pi}{2}$ の範囲で方程式 $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと $x = \quad , \quad , \quad .$

$\quad \leq x \leq \quad$ のとき $\sin x \quad \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $\quad \leq x \leq \quad$ のとき $\sin x \quad \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 領域の面積は

$$\int \left(\qquad \qquad \right) dx + \int \left(\qquad \qquad \right) dx$$

$\boxed{問8.2.4}$ xy 座標平面において関数 $y = \sin x \left(0 \leq x \leq \dfrac{5\pi}{2} \right)$ のグラフと直線 $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求めよ.

$0 \leq x \leq \dfrac{5\pi}{2}$ の範囲で方程式 $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと $x = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{7\pi}{3}$.

$\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{2\pi}{3}$ のとき $\sin x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $\dfrac{2\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{7\pi}{3}$ のとき $\sin x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 領域の面積は

$$\int \quad \left(\qquad\qquad\qquad \right) dx + \int \quad \left(\qquad\qquad\qquad \right) dx$$

$\boxed{問8.2.4}$ xy 座標平面において関数 $y = \sin x \quad \left(0 \leq x \leq \dfrac{5\pi}{2} \right)$ のグラフと直線 $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求めよ.

$0 \leq x \leq \dfrac{5\pi}{2}$ の範囲で方程式 $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと $x = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{7\pi}{3}$.

$\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{2\pi}{3}$ のとき $\sin x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $\dfrac{2\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{7\pi}{3}$ のとき $\sin x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 領域の面積は

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) dx + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin x \right) dx$$

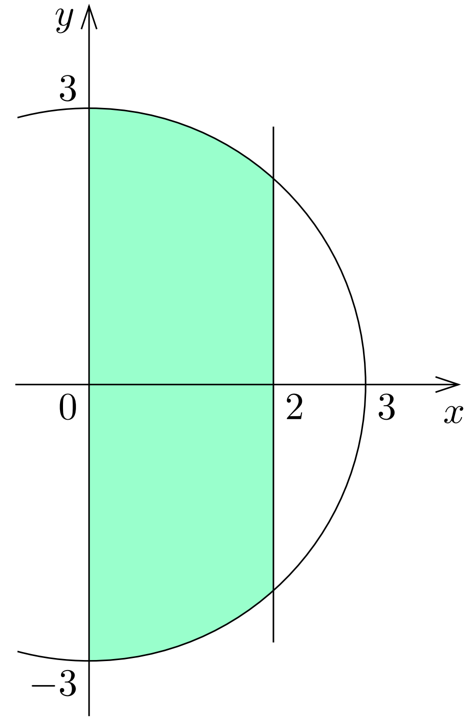
領域の面積は

$$
\begin{aligned}
&\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\left(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)dx+\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin x\right)dx\\
&=\left[-\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}+\left[\frac{\sqrt{3}}{2}x+\cos x\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}}\\
&=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{3}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}+\frac{7\sqrt{3}\,\pi}{6}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\pi}{3}+\frac{1}{2}\\
&=2+\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\ .
\end{aligned}
$$

終

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 2$ と $x^2 + y^2 \leq 9$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

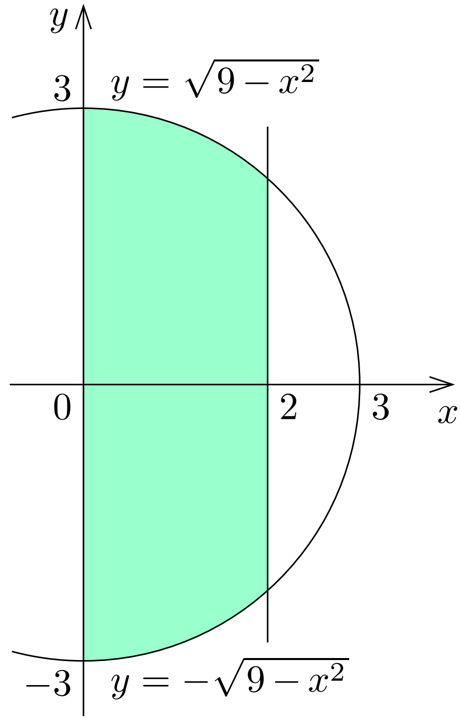
$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 2$ と $x^2 + y^2 \leq 9$ との連立で表される領域 D の面積を求める.



$\boxed{例}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 2$ と $x^2+y^2 \leq 9$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ より, $y^2 \leq 9-x^2$ なので,

$$-\sqrt{9-x^2} \leq y \leq \sqrt{9-x^2} \ .$$



例 xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 2$ と $x^2+y^2 \leq 9$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

　不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ より, $y^2 \leq 9-x^2$ なので,

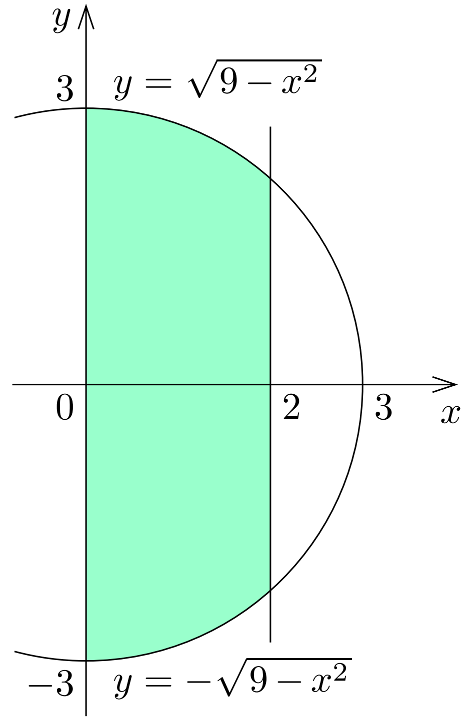
$$-\sqrt{9-x^2} \leq y \leq \sqrt{9-x^2} \ .$$

従って, 不等式 $0 \leq x \leq 2$ と $x^2+y^2 \leq 9$ との連立で表される領域 D の面積は

$$\int_0^2 \left\{ \sqrt{9-x^2} - \left(-\sqrt{9-x^2}\right) \right\} dx$$

$$= \int_0^2 2\sqrt{9-x^2}\, dx$$

$$= 2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\, dx \ .$$



$9 - x^2 \geq 0$ なので， $(x+3)(x-3) \leq 0$ ， $-3 \leq x \leq 3$ ．

$9-x^2 \geq 0$ なので，$(x+3)(x-3) \leq 0$ ，$-3 \leq x \leq 3$ ．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ とおく.

$9-x^2 \geq 0$ なので，$(x+3)(x-3) \leq 0$ ，$-3 \leq x \leq 3$ ．変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ とおく．$\sin t = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$ ．

$9-x^2 \geq 0$ なので, $(x+3)(x-3) \leq 0$, $-3 \leq x \leq 3$. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ とおく. $\sin t = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos t \geq 0$.

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(3\sin t)^2} = \sqrt{9(1-\sin^2 t)} = 3\sqrt{\cos^2 t} = 3\cos t\ .$$

$9-x^2 \geq 0$ なので, $(x+3)(x-3) \leq 0$, $-3 \leq x \leq 3$. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ とおく. $\sin t = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos t \geq 0$.

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(3\sin t)^2} = \sqrt{9(1-\sin^2 t)} = 3\sqrt{\cos^2 t} = 3\cos t .$$

$x = 3\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 3\cos t$ なので $dx = 3\cos t\, dt$.

$9-x^2 \geq 0$ なので，$(x+3)(x-3) \leq 0$ ，$-3 \leq x \leq 3$ ．変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ とおく．$\sin t = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$ ．$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos t \geq 0$ ．

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(3\sin t)^2} = \sqrt{9(1-\sin^2 t)} = 3\sqrt{\cos^2 t} = 3\cos t\ .$$

$x = 3\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 3\cos t$ なので $dx = 3\cos t\,dt$ ．$x=0$ のとき $t=0$ ．$x=2$ のとき $t=\sin^{-1}\dfrac{2}{3}$ ．

$9-x^2 \geq 0$ なので, $(x+3)(x-3) \leq 0$, $-3 \leq x \leq 3$. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$

とおく. $\sin t = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり

$-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos t \geq 0$.

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(3\sin t)^2} = \sqrt{9(1-\sin^2 t)} = 3\sqrt{\cos^2 t} = 3\cos t \ .$$

$x = 3\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 3\cos t$ なので $dx = 3\cos t\,dt$. $x=0$ のとき $t=0$.

$x=2$ のとき $t = \sin^{-1}\dfrac{2}{3}$. 領域 D の面積は

$$2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx = 2\int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} 3\cos t\,3\cos t\,dt = 9\int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} 2\cos^2 t\,dt$$

$9-x^2 \geq 0$ なので, $(x+3)(x-3) \leq 0$, $-3 \leq x \leq 3$. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ とおく. $\sin t = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos t \geq 0$.

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(3\sin t)^2} = \sqrt{9(1-\sin^2 t)} = 3\sqrt{\cos^2 t} = 3\cos t\ .$$

$x = 3\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 3\cos t$ なので $dx = 3\cos t\, dt$. $x=0$ のとき $t=0$. $x=2$ のとき $t = \sin^{-1}\dfrac{2}{3}$. 領域 D の面積は

$$\begin{aligned} 2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\, dx &= 2\int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} 3\cos t\, 3\cos t\, dt = 9\int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} 2\cos^2 t\, dt \\ &= 9\int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} (1+\cos 2t)\, dt = 9\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} \\ &= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\ . \end{aligned}$$

領域 D の面積は

$$2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx = 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)$$

領域 D の面積は

$$2\int_0^2 \sqrt{9 - x^2}\,dx = 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) \qquad \sin 2a = 2\sin a\cos a$$

$$= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 9\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\ .$$

領域 D の面積は

$$2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx = 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)$$

$$= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 9\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) \ .$$

ここで,

$$\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \ .$$

領域 D の面積は

$$
\begin{aligned}
2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx &= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) \\
&= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 9\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) \ .
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \ .
$$

$$
\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 1 - \sin^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \ .
$$

領域 D の面積は

$$2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx = 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)$$

$$= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 9\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) \ .$$

ここで,

$$\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \ .$$

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 1 - \sin^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \ .$$

$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{2}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{2}{3}\right) \geq 0$, よって

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \ .$$

領域 D の面積は

$$2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx = 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)$$
$$= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 9\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) \ .$$

ここで,

$$\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \ .$$

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 1-\sin^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \ .$$

$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{2}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{2}{3}\right) \geq 0$, よって

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \ .$$

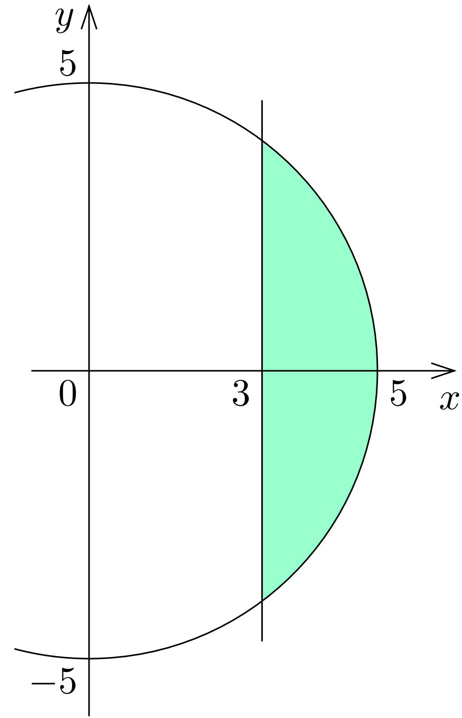
故に

$$9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 9\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 9\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}$$
$$= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 2\sqrt{5} \ .$$

領域 D の面積は $2\sqrt{5} + 9\sin^{-1}\dfrac{2}{3}$ である.

終

$\boxed{問8.2.5}$ xy 座標平面において不等式 $x \geq 3$ と $x^2+y^2 \leq 25$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ.



不等式 $x^2+y^2 \leq 25$ より, $y^2 \leq 25-x^2$ なので,

$$\qquad \leq y \leq \qquad .$$

領域 D の面積は

$$\int_3^5 \{ \qquad - (\qquad) \} dx$$

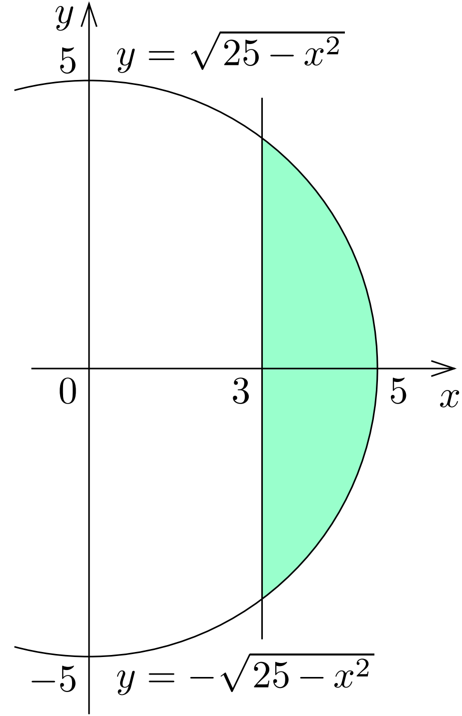
$$= \int_3^5 \qquad dx$$

$25-x^2 \geq 0$ なので, $(x+\quad)(x-\quad) \leq 0$,

$\quad \leq x \leq \quad$. 変数 t を $t = \qquad$ とおく.

$\sin t = \qquad$ なので $x = \qquad$.

$\boxed{問8.2.5}$ xy 座標平面において不等式 $x \geq 3$ と $x^2+y^2 \leq 25$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ.



不等式 $x^2+y^2 \leq 25$ より, $y^2 \leq 25-x^2$ なので,

$$-\sqrt{25-x^2} \leq y \leq \sqrt{25-x^2} \ .$$

領域 D の面積は

$$\int_3^5 \left\{\sqrt{25-x^2} - \left(-\sqrt{25-x^2}\right)\right\} dx$$

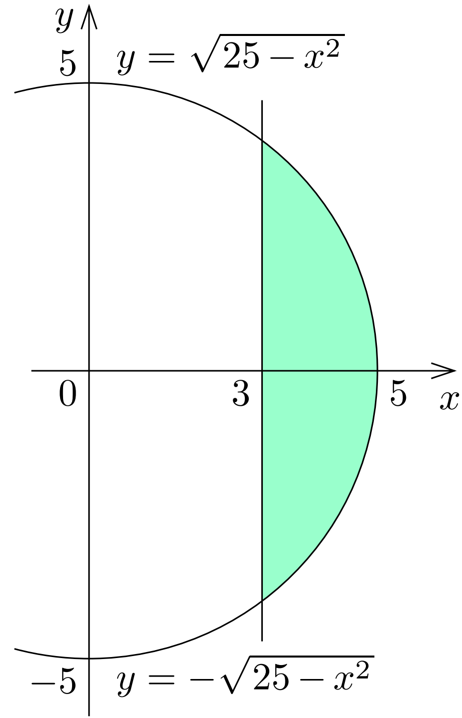
$$= \int_3^5 2\sqrt{25-x^2}\, dx = 2\int_3^5 \sqrt{25-x^2}\, dx$$

$25-x^2 \geq 0$ なので, $(x+ \quad)(x- \quad) \leq 0$,

$\quad \leq x \leq \quad$. 変数 t を $t=$ 　　　　 とおく.

$\sin t =$ 　　 なので $x=$ 　　　　 .

$\boxed{\text{問}8.2.5}$ xy 座標平面において不等式 $x \geq 3$ と $x^2 + y^2 \leq 25$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ.



不等式 $x^2 + y^2 \leq 25$ より, $y^2 \leq 25 - x^2$ なので,

$$-\sqrt{25 - x^2} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2} \ .$$

領域 D の面積は

$$\int_3^5 \left\{ \sqrt{25 - x^2} - \left(-\sqrt{25 - x^2} \right) \right\} dx$$

$$= \int_3^5 2\sqrt{25 - x^2}\, dx = 2\int_3^5 \sqrt{25 - x^2}\, dx$$

$25 - x^2 \geq 0$ なので, $(x + 5)(x - 5) \leq 0$, $-5 \leq x \leq 5$. 変数 t を $t = \sin^{-1} \dfrac{x}{5}$ とおく.

$\sin t = \dfrac{x}{5}$ なので $x = 5 \sin t$.

$25-x^2 \geq 0$ なので， $(x+5)(x-5) \leq 0$ ， $-5 \leq x \leq 5$ ． 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{5}$ とおく． $\sin t = \dfrac{x}{5}$ なので $x = 5\sin t$ ． $\leq \sin^{-1}\dfrac{x}{5} \leq$ つまり $\leq t \leq$ なので $\cos t$ 0 ．

$$\sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-(\qquad)^2} =$$

$x =$ より $\dfrac{dx}{dt} =$ なので $dx =$ ． $x = 3$ のとき $t =$ ． $x = 5$ のとき $t =$ ． 領域 D の面積は

$$2\int_3^5 \sqrt{25-x^2}\,dx = 2\int \qquad dt =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad -\frac{25}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) .$$

$25-x^2 \geq 0$ なので， $(x+5)(x-5) \leq 0$ ， $-5 \leq x \leq 5$ ． 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{5}$ とおく． $\sin t = \dfrac{x}{5}$ なので $x = 5\sin t$ ． $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{5} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos t \geq 0$ ．

$$\sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-(5\sin t)^2} = \sqrt{25(1-\sin^2 t)} = 5\sqrt{\cos^2 t} = 5\cos t \text{ .}$$

$x = 5\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 5\cos t$ なので $dx = 5\cos t\,dt$ ． $x = 3$ のとき $t = \sin^{-1}\dfrac{3}{5}$ ． $x = 5$ のとき $t = \dfrac{\pi}{2}$ ． 領域 D の面積は

$$2\int_3^5 \sqrt{25-x^2}\,dx = 2\int \qquad\qquad dt =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad -\frac{25}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) \text{ .}$$

$25-x^2 \geq 0$ なので， $(x+5)(x-5) \leq 0$ ， $-5 \leq x \leq 5$ ．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{5}$ とおく． $\sin t = \dfrac{x}{5}$ なので $x = 5\sin t$ ． $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{5} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos t \geq 0$ ．

$$\sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-(5\sin t)^2} = \sqrt{25(1-\sin^2 t)} = 5\sqrt{\cos^2 t} = 5\cos t .$$

$x = 5\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 5\cos t$ なので $dx = 5\cos t\, dt$ ． $x = 3$ のとき $t = \sin^{-1}\dfrac{3}{5}$ ． $x = 5$ のとき $t = \dfrac{\pi}{2}$ ．領域 D の面積は

$$\begin{aligned}
2\int_3^5 \sqrt{25-x^2}\, dx &= 2\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\frac{\pi}{2}} 5\cos t\, 5\cos t\, dt = 25\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t\, dt \\
&= 25\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\, dt = 25\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - \frac{25}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) .
\end{aligned}$$

領域 D の面積は

$$2\int_3^5 \sqrt{25-x^2}\,dx = \frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - \frac{25}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)$$
$$= \frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - 25\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) .$$

ここで,

$$\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5} .$$

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) = 1-\sin^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) = 1-\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} .$$

$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{3}{5} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{3}{5}\right) \geq 0$, よって

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} .$$

故に

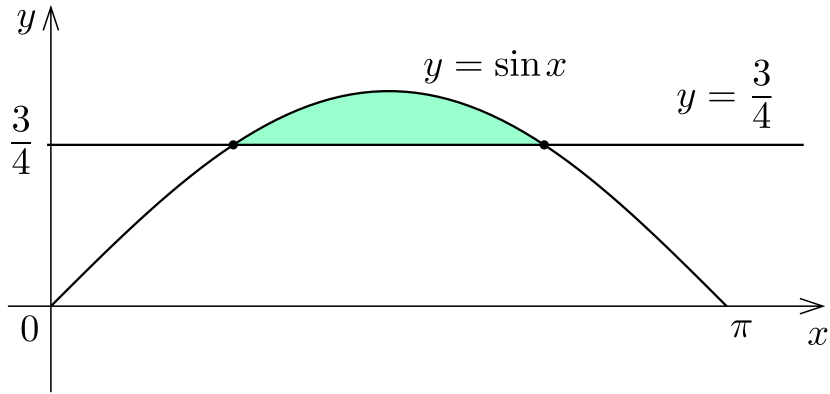
$$\frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - 25\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) = \frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - 25\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}$$
$$= \frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - 12 .$$

領域 D の面積は $\dfrac{25\pi}{2} - 12 - 25\sin^{-1}\dfrac{3}{5}$ である.

終

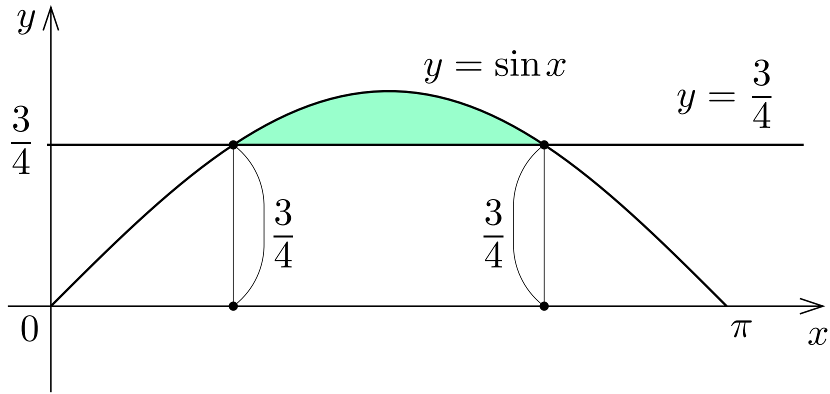
$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\dfrac{3}{4} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\dfrac{3}{4} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.



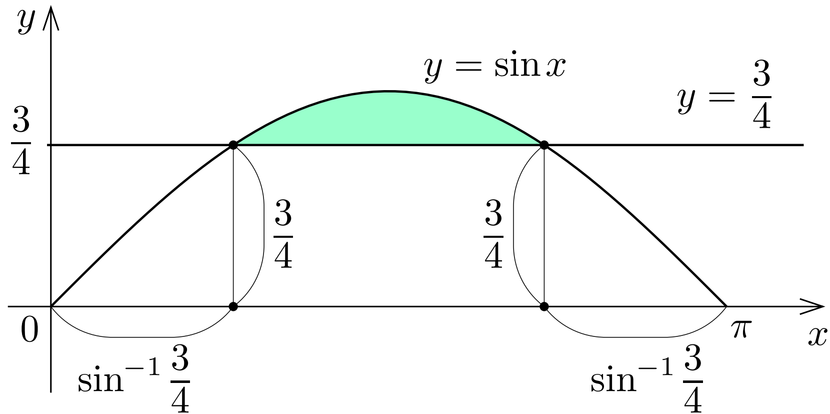
$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\dfrac{3}{4} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

　領域 D の点の x 座標の範囲を求める.



例 xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\dfrac{3}{4} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

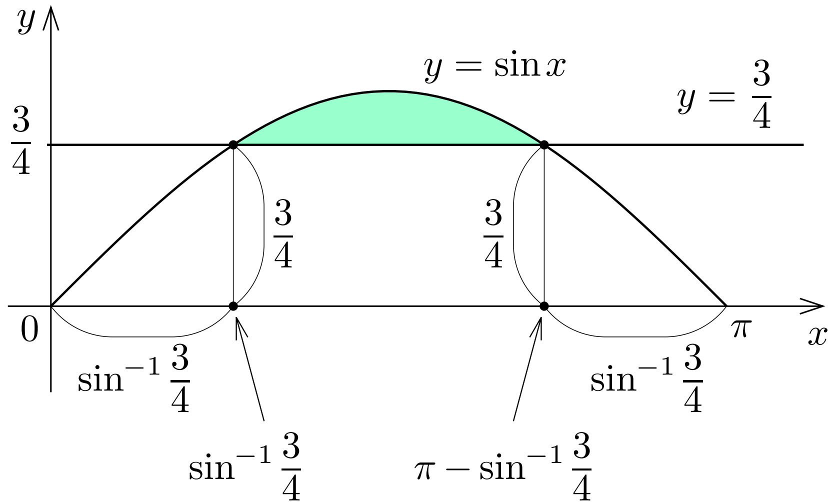
領域 D の点の x 座標の範囲を求める. xy 座標平面において $y=\sin x$ のグラフと 直線 $y=\dfrac{3}{4}$ との共有点を考える.



$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\dfrac{3}{4} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

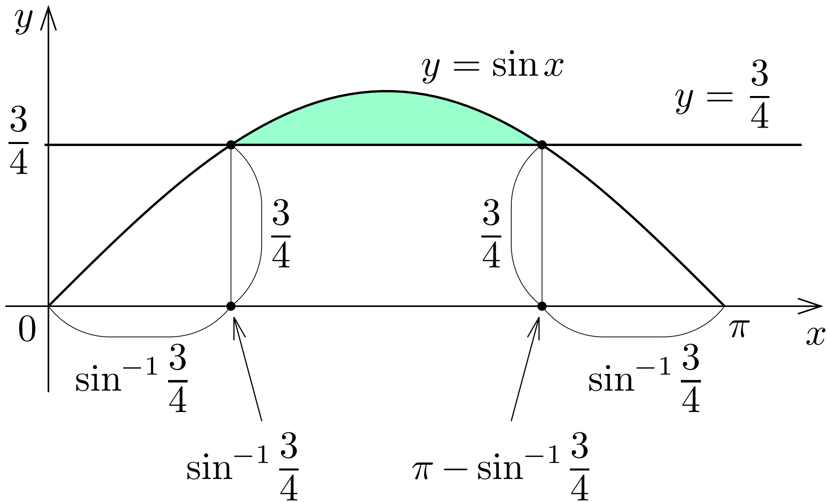
領域 D の点の x 座標の範囲を求める. xy 座標平面において $y = \sin x$ のグラフと 直線 $y = \dfrac{3}{4}$ との共有点を考える.

$0 \leq x \leq \pi$ の範囲で方程式 $\sin x = \dfrac{3}{4}$ の解は $\sin^{-1}\dfrac{3}{4}$ と $\pi - \sin^{-1}\dfrac{3}{4}$ である.



$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\dfrac{3}{4} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

領域 D の点の x 座標の範囲を求める. xy 座標平面において $y = \sin x$ のグラフと 直線 $y = \dfrac{3}{4}$ との共有点を考える.



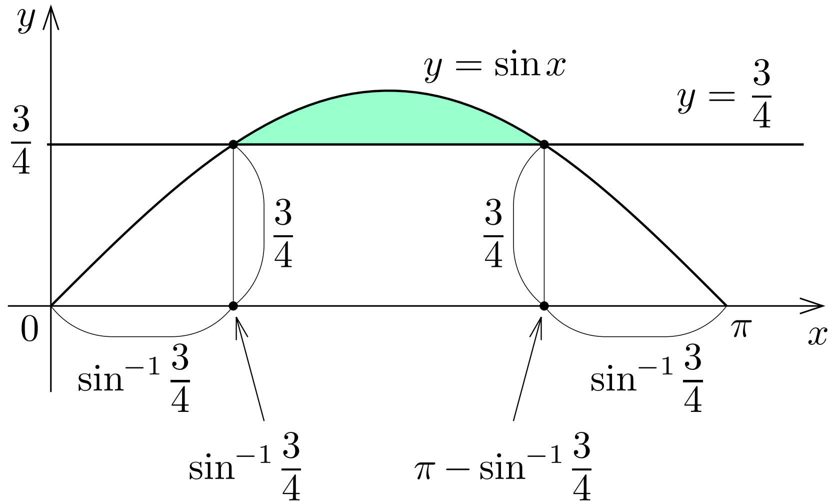
$0 \leq x \leq \pi$ の範囲で方程式 $\sin x = \dfrac{3}{4}$ の解は $\sin^{-1}\dfrac{3}{4}$ と $\pi - \sin^{-1}\dfrac{3}{4}$ である. 領域 D の点の x 座標の範囲は $\sin^{-1}\dfrac{3}{4} \leq x \leq \pi - \sin^{-1}\dfrac{3}{4}$; この範囲で $\sin x \geq \dfrac{3}{4}$.

領域 D の点の

x 座標の範囲は

$\sin^{-1}\dfrac{3}{4} \leq x \leq \pi - \sin^{-1}\dfrac{3}{4}$;

この範囲で $\sin x \geq \dfrac{3}{4}$.



領域 D の点の

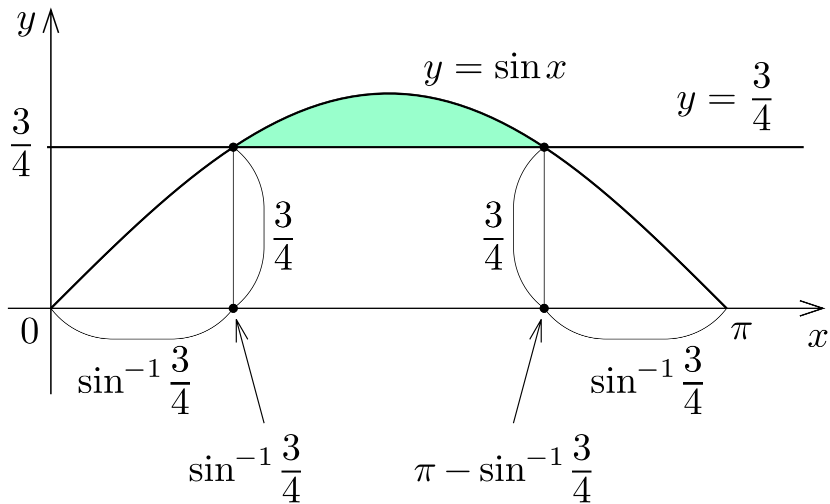
x 座標の範囲は

$\sin^{-1}\dfrac{3}{4} \leq x \leq \pi - \sin^{-1}\dfrac{3}{4}$;

この範囲で $\sin x \geq \dfrac{3}{4}$. 領

域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}}\left(\sin x - \frac{3}{4}\right)dx$$



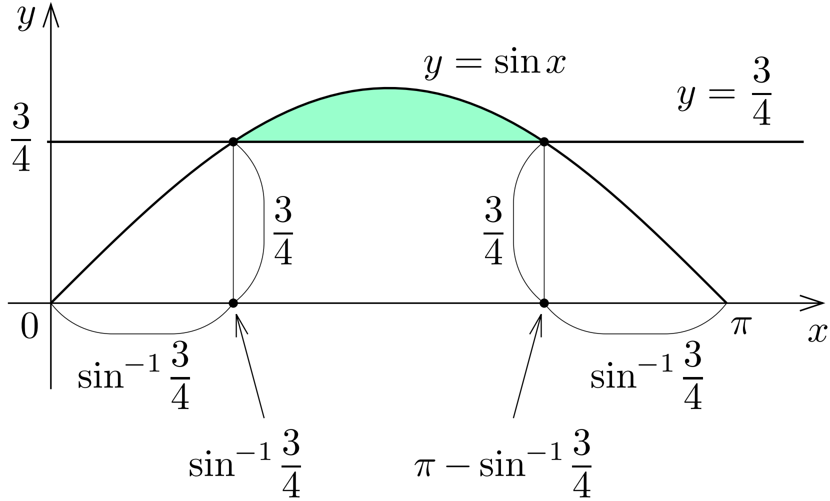
領域 D の点の x 座標の範囲は

$\sin^{-1}\dfrac{3}{4} \leq x \leq \pi - \sin^{-1}\dfrac{3}{4}$;

この範囲で $\sin x \geq \dfrac{3}{4}$ ．領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}} \left(\sin x - \frac{3}{4}\right) dx$$

$$= \left[-\cos x - \frac{3}{4}x\right]_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}}$$



領域 D の点の

x 座標の範囲は

$\sin^{-1}\dfrac{3}{4} \leq x \leq \pi - \sin^{-1}\dfrac{3}{4}$;

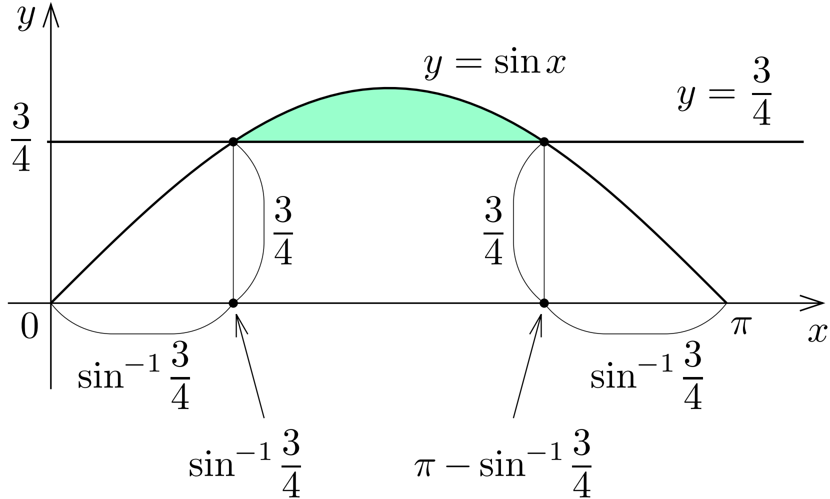
この範囲で $\sin x \geq \dfrac{3}{4}$. 領

域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}} \left(\sin x - \frac{3}{4}\right) dx$$

$$= \left[-\cos x - \frac{3}{4}x\right]_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}}$$

$$= -\cos\left(\pi - \sin^{-1}\frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4}\left(\pi - \sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4}\sin^{-1}\frac{3}{4}$$



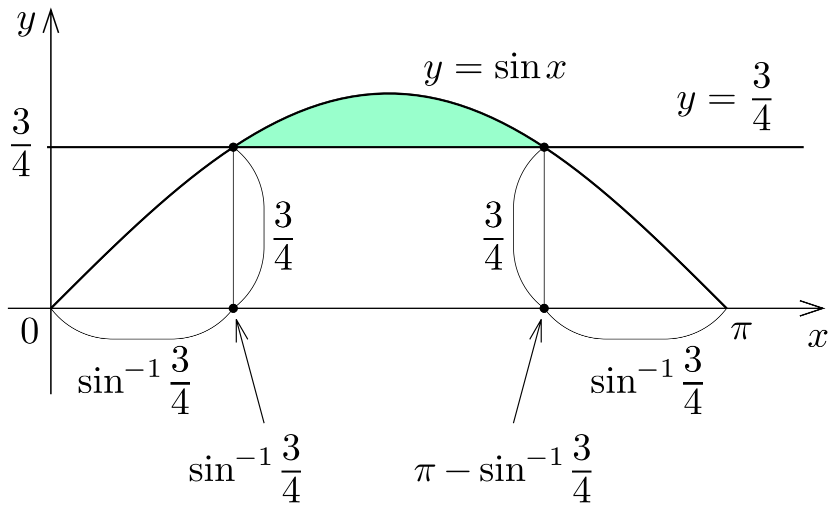
領域 D の点の

x 座標の範囲は

$\sin^{-1}\dfrac{3}{4} \leq x \leq \pi - \sin^{-1}\dfrac{3}{4}$;

この範囲で $\sin x \geq \dfrac{3}{4}$．領

域 D の面積は



$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}}\left(\sin x - \frac{3}{4}\right)dx$$

$$= \Big[-\cos x - \frac{3}{4}x\Big]_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}}$$

$$= -\cos\left(\pi - \sin^{-1}\frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4}\left(\pi - \sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4}\sin^{-1}\frac{3}{4}$$

$$= \cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) - \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{4}\sin^{-1}\frac{3}{4} + \cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4}\sin^{-1}\frac{3}{4}$$

$\cos(\pi - a) = \cos(a - \pi) = -\cos a$

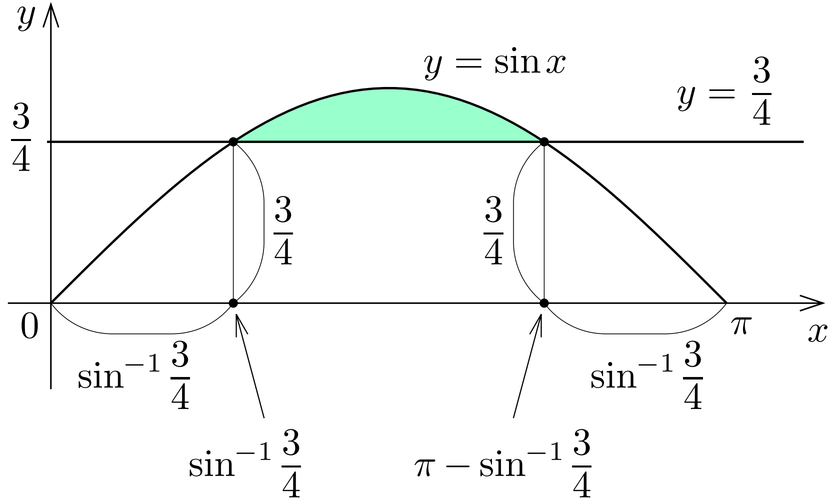
領域 D の点の

x 座標の範囲は

$\sin^{-1}\dfrac{3}{4} \leq x \leq \pi - \sin^{-1}\dfrac{3}{4}$;

この範囲で $\sin x \geq \dfrac{3}{4}$. 領

域 D の面積は



$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}} \left(\sin x - \frac{3}{4}\right) dx$$

$$= \left[-\cos x - \frac{3}{4}x\right]_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}}$$

$$= -\cos\left(\pi - \sin^{-1}\frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4}\left(\pi - \sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4}\sin^{-1}\frac{3}{4}$$

$$= \cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) - \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{4}\sin^{-1}\frac{3}{4} + \cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4}\sin^{-1}\frac{3}{4}$$

$$= 2\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4} - \frac{3\pi}{4} \ .$$

領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}}\left(\sin x-\frac{3}{4}\right)dx = 2\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}-\frac{3\pi}{4}\ .$$

領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}}\left(\sin x-\frac{3}{4}\right)dx = 2\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}-\frac{3\pi}{4}\ .$$

$\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{3}{4}\right)$ を計算する. $\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{3}{4}$ なので,

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = 1-\sin^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = 1-\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}\ .$$

領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}}\left(\sin x-\frac{3}{4}\right)dx = 2\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}-\frac{3\pi}{4}\ .$$

$\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)$ を計算する. $\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$ なので,

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = 1-\sin^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = 1-\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}\ .$$

$-\frac{\pi}{2}\leq\sin^{-1}\frac{3}{4}\leq\frac{\pi}{2}$ なので $\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\geq 0$, よって

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}\ .$$

領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}}\left(\sin x-\frac{3}{4}\right)dx = 2\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}-\frac{3\pi}{4} \ .$$

$\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)$ を計算する. $\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$ なので,

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = 1-\sin^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = 1-\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} \ .$$

$-\frac{\pi}{2}\leq\sin^{-1}\frac{3}{4}\leq\frac{\pi}{2}$ なので $\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\geq 0$, よって

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \ .$$

故に

$$\begin{aligned}2\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}-\frac{3\pi}{4} &= 2\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}+\frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}-\frac{3\pi}{4}\\ &= \frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}-\frac{3\pi}{4} \ .\end{aligned}$$

領域 D の面積は $\dfrac{\sqrt{7}}{2}+\dfrac{3}{2}\sin^{-1}\dfrac{3}{4}-\dfrac{3\pi}{4}$ である. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問8.2.6}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\dfrac{2}{3} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ.

$0 \leq x \leq \pi$ の範囲で方程式 $\sin x = \dfrac{2}{3}$ の解は　　　　と　　　　である. 領域 D の点の x 座標の範囲は　　　　$\leq x \leq$　　　　; この範囲で $\sin x$　　$\dfrac{2}{3}$. 領域 D の面積は

$$\int \qquad \left(\qquad \right) dx =$$

$\boxed{\text{問}8.2.6}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\dfrac{2}{3} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ.

$0 \leq x \leq \pi$ の範囲で方程式 $\sin x = \dfrac{2}{3}$ の解は $\sin^{-1}\dfrac{2}{3}$ と $\pi - \sin^{-1}\dfrac{2}{3}$ である. 領域 D の点の x 座標の範囲は $\sin^{-1}\dfrac{2}{3} \leq x \leq \pi - \sin^{-1}\dfrac{2}{3}$; この範囲で $\sin x \geq \dfrac{2}{3}$. 領域 D の面積は

$$\int \qquad\qquad \Big(\qquad\qquad \Big) dx =$$

$\boxed{問8.2.6}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\dfrac{2}{3} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ.

$0 \leq x \leq \pi$ の範囲で方程式 $\sin x = \dfrac{2}{3}$ の解は $\sin^{-1}\dfrac{2}{3}$ と $\pi - \sin^{-1}\dfrac{2}{3}$ である. 領域 D の点の x 座標の範囲は $\sin^{-1}\dfrac{2}{3} \leq x \leq \pi - \sin^{-1}\dfrac{2}{3}$; この範囲で $\sin x \geq \dfrac{2}{3}$. 領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{2}{3}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{2}{3}} \left(\sin x - \frac{2}{3}\right) dx = \left[-\cos x - \frac{2}{3}x\right]_{\sin^{-1}\frac{2}{3}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{2}{3}}$$

$$= -\cos\left(\pi - \sin^{-1}\frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}\left(\pi - \sin^{-1}\frac{2}{3}\right) + \cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}$$

$\boxed{問 8.2.6}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\dfrac{2}{3} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ.

$0 \leq x \leq \pi$ の範囲で方程式 $\sin x = \dfrac{2}{3}$ の解は $\sin^{-1}\dfrac{2}{3}$ と $\pi - \sin^{-1}\dfrac{2}{3}$ である. 領域 D の点の x 座標の範囲は $\sin^{-1}\dfrac{2}{3} \leq x \leq \pi - \sin^{-1}\dfrac{2}{3}$; この範囲で $\sin x \geq \dfrac{2}{3}$. 領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{2}{3}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{2}{3}} \left(\sin x - \frac{2}{3}\right) dx = \left[-\cos x - \frac{2}{3}x\right]_{\sin^{-1}\frac{2}{3}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{2}{3}}$$

$$= -\cos\left(\pi - \sin^{-1}\frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}\left(\pi - \sin^{-1}\frac{2}{3}\right) + \cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}$$

$$= \cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) - \frac{2\pi}{3} + \frac{2}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3} + \cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}$$

$$= 2\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) + \frac{4}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3} - \frac{2\pi}{3} \ .$$

領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{2}{3}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{2}{3}}\left(\sin x-\frac{2}{3}\right)dx = 2\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)+\frac{4}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}-\frac{2\pi}{3} .$$

$\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)$ を計算する． $\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$ なので，

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 1-\sin^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} .$$

$-\frac{\pi}{2}\leq\sin^{-1}\frac{2}{3}\leq\frac{\pi}{2}$ なので $\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\geq 0$ ，よって

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{9} .$$

故に

$$\begin{aligned} 2\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)+\frac{4}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}-\frac{2\pi}{3} &= 2\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{4}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}-\frac{2\pi}{3} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{3}+\frac{4}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}-\frac{2\pi}{3} . \end{aligned}$$

領域 D の面積は $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}+\dfrac{4}{3}\sin^{-1}\dfrac{2}{3}-\dfrac{2\pi}{3}$ である. $\boxed{\text{終}}$