

## 8.3 平面領域の面積

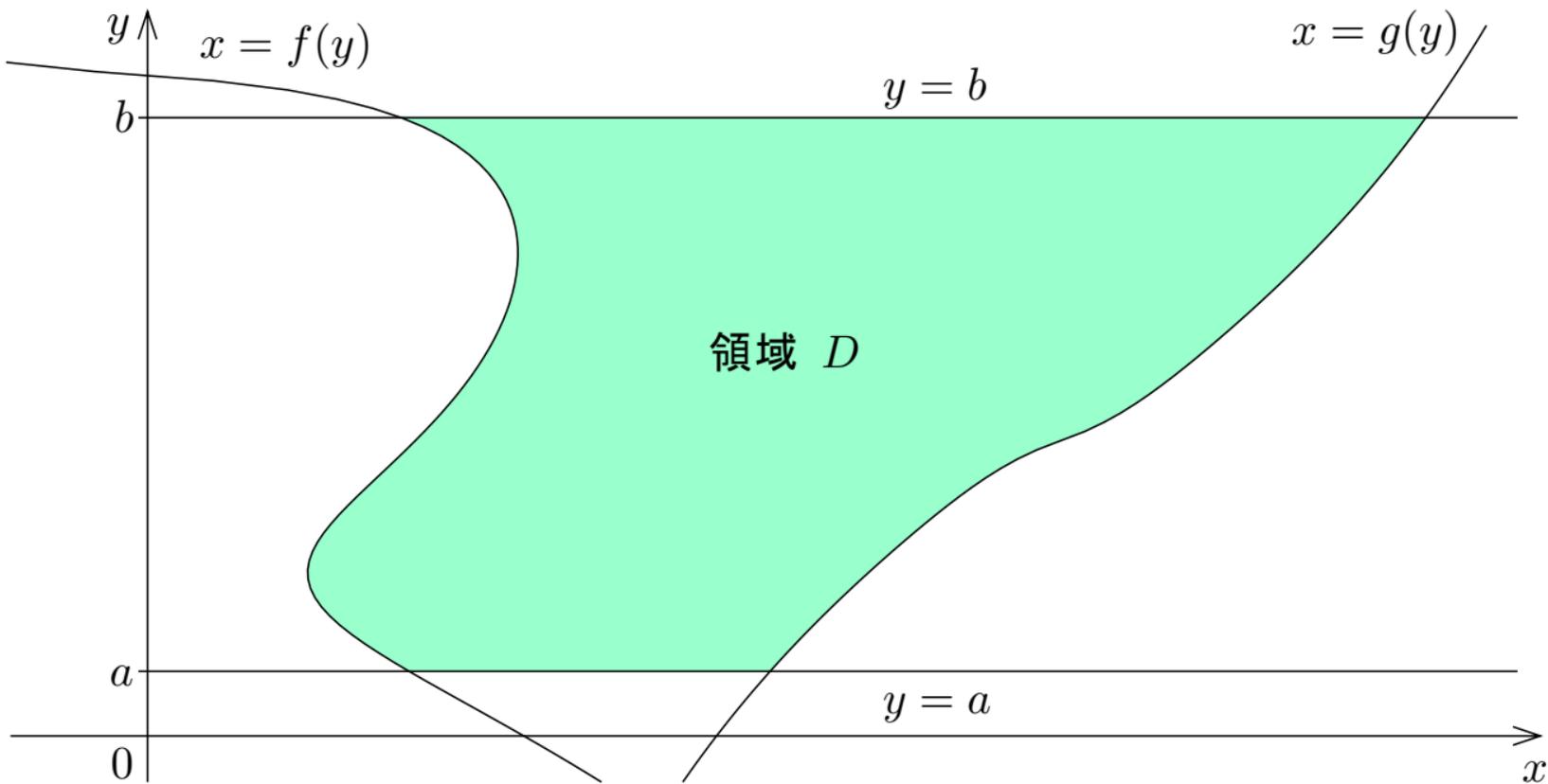
$xy$  座標平面における領域の面積を計算するために  $y$  で積分することがある.

実数  $a$  と  $b$  について  $a \leq b$  とする. また, 関数  $f$  と  $g$  とは  $a$  から  $b$  まで積分可能であり, 区間  $[a, b]$  の各実数  $y$  について  $f(y) \leq g(y)$  とする.  $xy$  座標平面において, 連立不等式

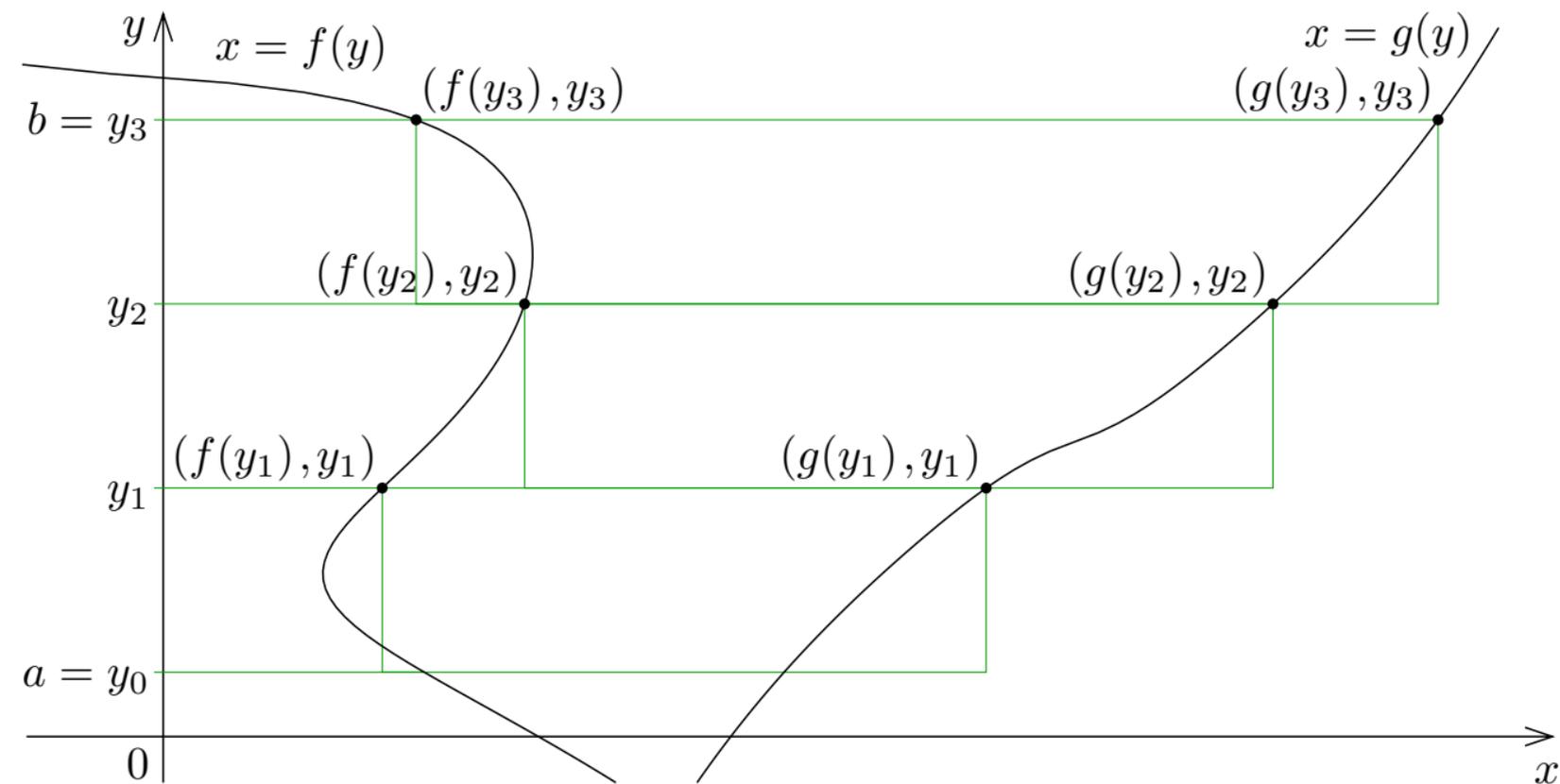
$$a \leq y \leq b \text{ かつ } f(y) \leq x \leq g(y)$$

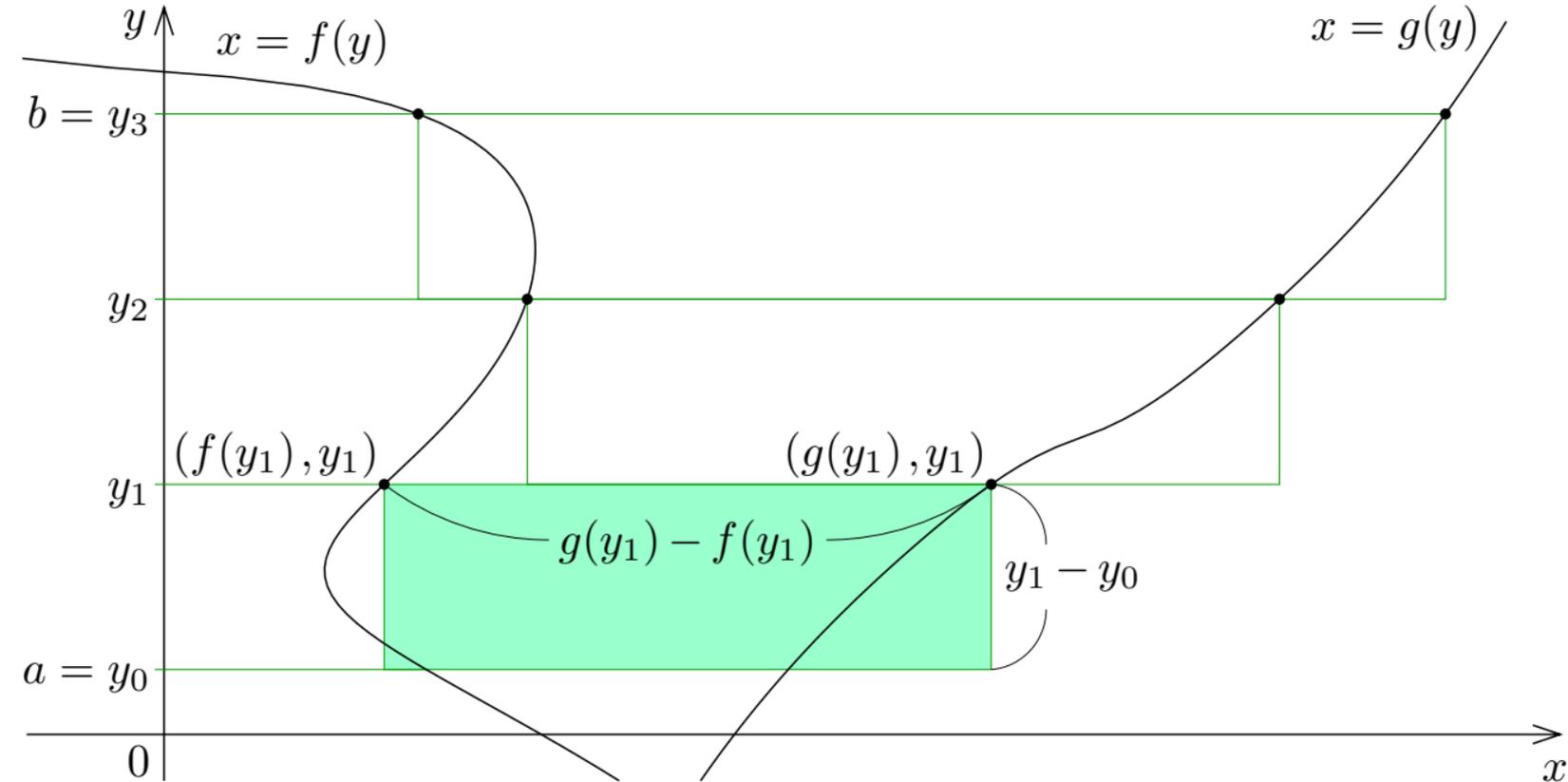
で表される領域を  $D$  の面積を考える.

例えば領域  $D$  が下図の明緑色の図形であるとする.



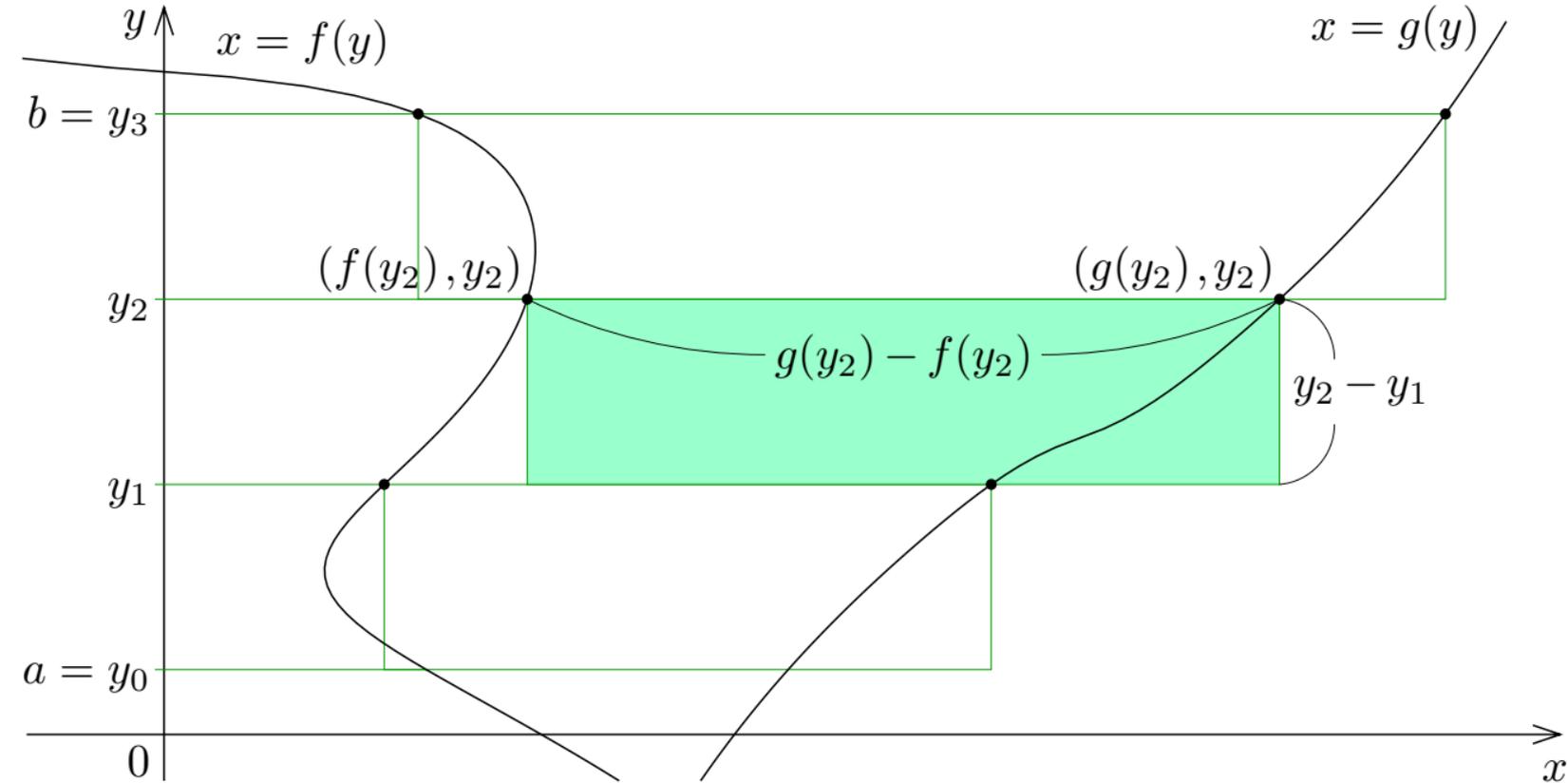
$a = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 = b$  である実数  $y_0, y_1, y_2, y_3$  をとり, 下図の状況を考える.





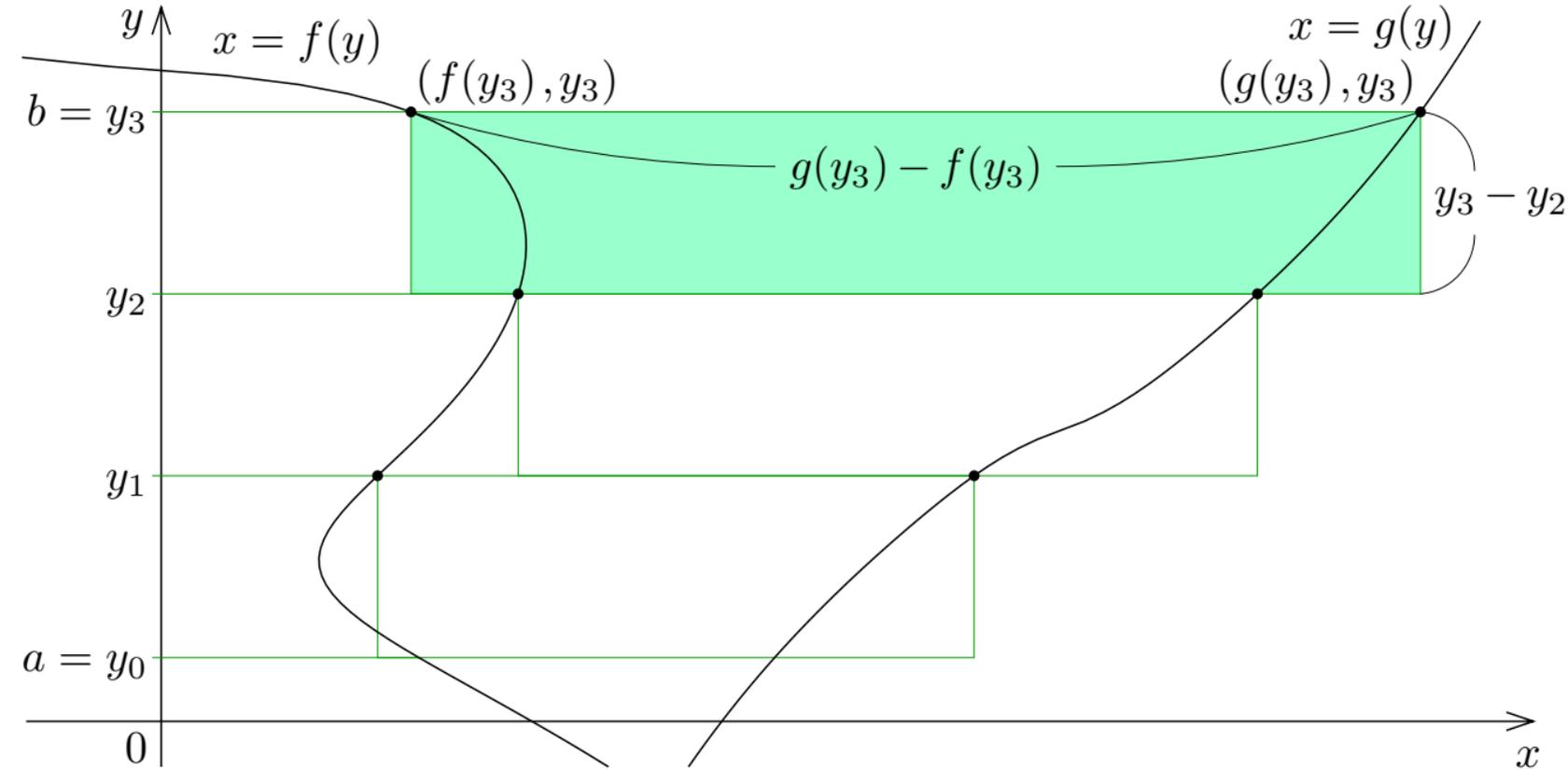
上図の明緑色の長方形の面積は

$$\{g(y_1) - f(y_1)\}(y_1 - y_0) .$$



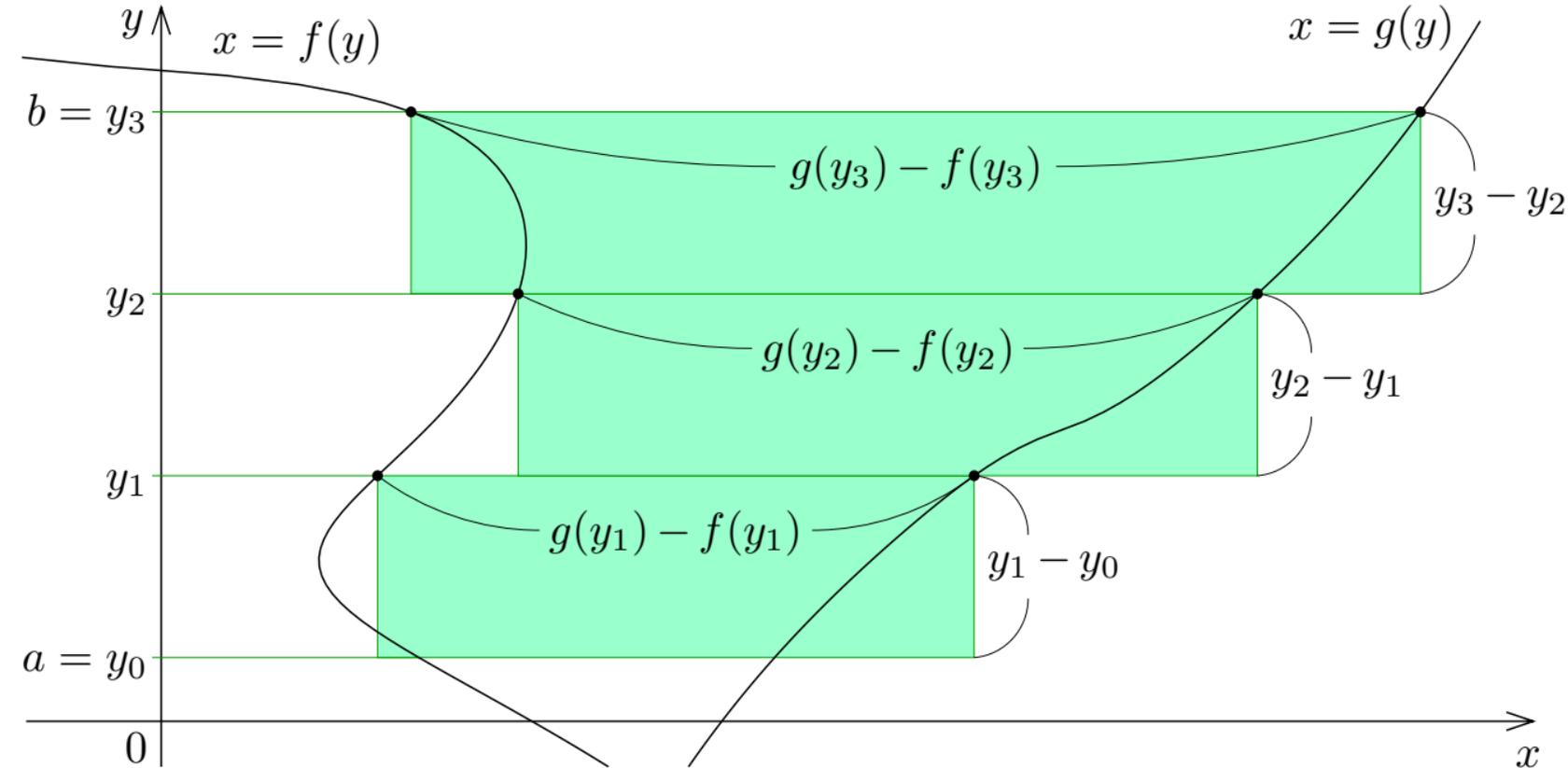
上図の明緑色の長方形の面積は

$$\{g(y_2) - f(y_2)\}(y_2 - y_1) .$$



上図の明緑色の長方形の面積は

$$\{g(y_3) - f(y_3)\}(y_3 - y_2) .$$



上図の明緑色の 3 個の長方形を併せた図形の面積は

$$\{g(y_1) - f(y_1)\}(y_1 - y_0) + \{g(y_2) - f(y_2)\}(y_2 - y_1) + \{g(y_3) - f(y_3)\}(y_3 - y_2) .$$

このような 3 個の長方形を併せた図形の面積は

$$\{g(y_1) - f(y_1)\}(y_1 - y_0) + \{g(y_2) - f(y_2)\}(y_2 - y_1) + \{g(y_3) - f(y_3)\}(y_3 - y_2)$$

$$= \sum_{k=1}^3 [\{g(y_k) - f(y_k)\}(y_k - y_{k-1})] .$$

これは関数  $g(y) - f(y)$  のリーマン和である.

このような長方形を増やして個々の長方形を薄くしていく.

このような長方形を増やして個々の長方形を薄くしていく.

正の各自然数  $n$  に対して

$$a = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \cdots \leq y_{n-1} \leq y_n = b$$

である実数  $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}, y_n$  をとり,

$$S_n = \sum_{k=1}^n [\{g(y_k) - f(y_k)\} (y_k - y_{k-1})]$$

を考える; これは関数  $g(y) - f(y)$  のリーマン和である.

このような長方形を増やして個々の長方形を薄くしていく.

正の各自然数  $n$  に対して

$$a = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \cdots \leq y_{n-1} \leq y_n = b$$

である実数  $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}, y_n$  をとり,

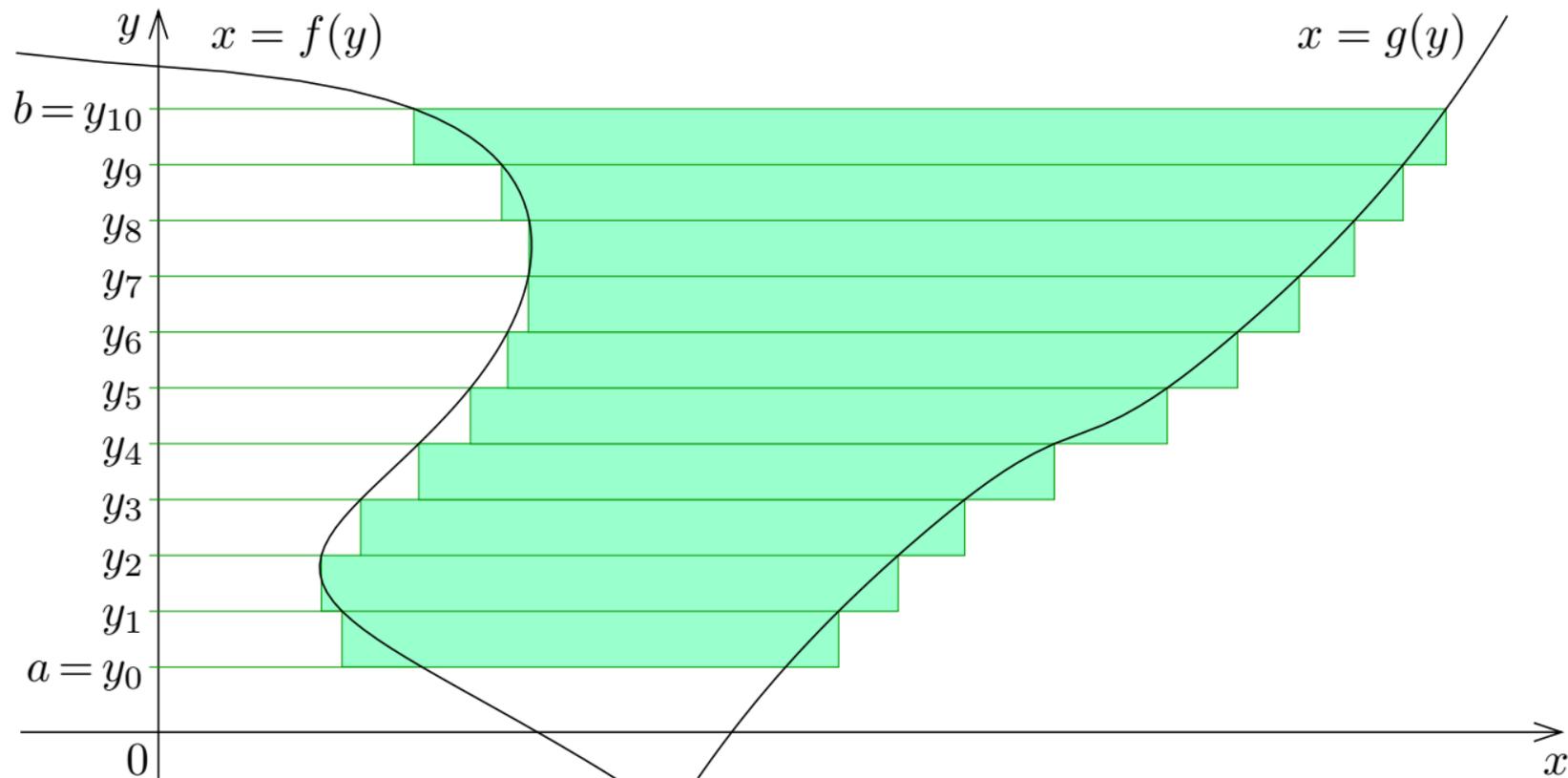
$$S_n = \sum_{k=1}^n [\{g(y_k) - f(y_k)\} (y_k - y_{k-1})]$$

を考える; これは関数  $g(y) - f(y)$  のリーマン和である.

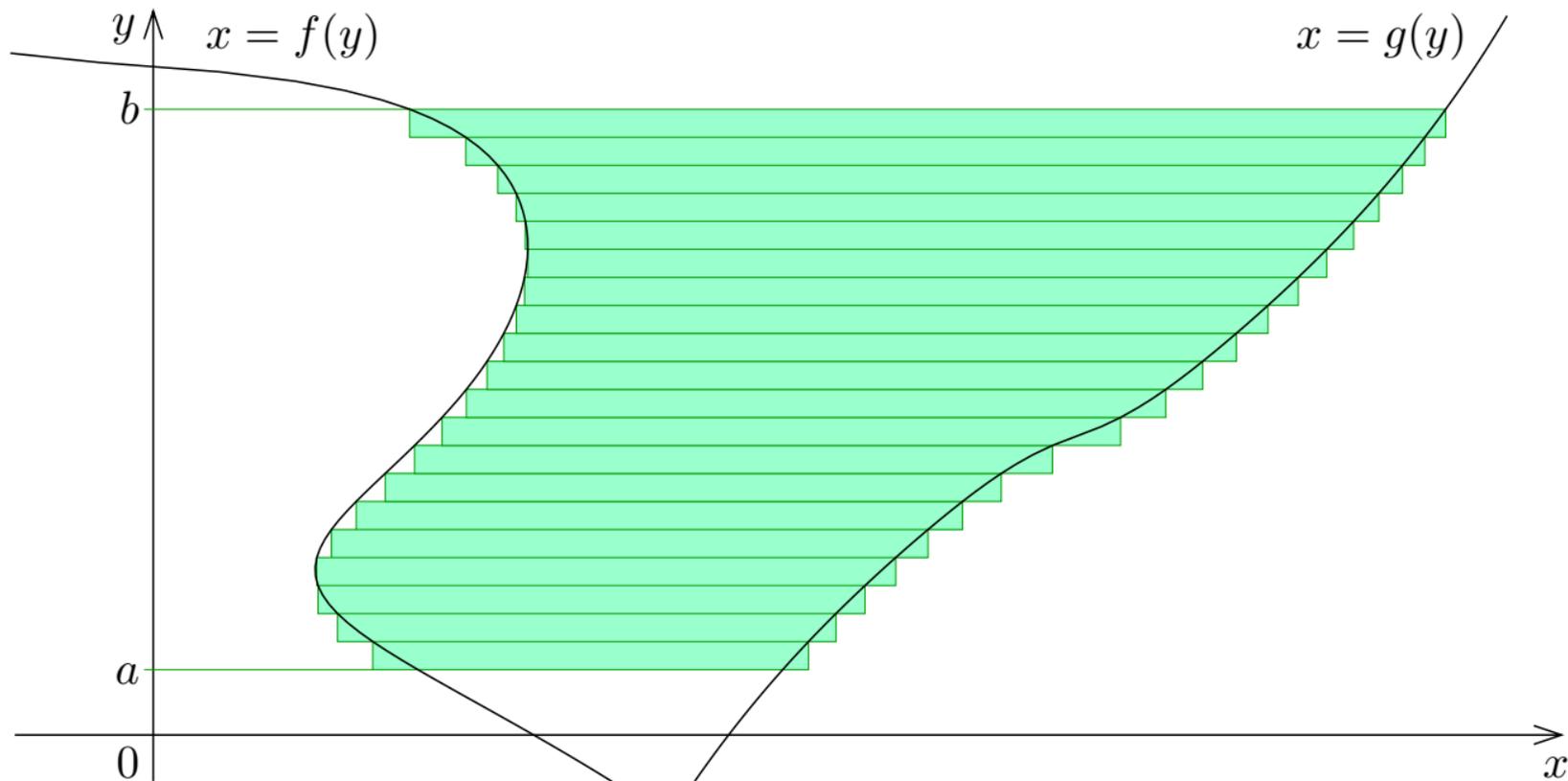
$$\delta_n = \max\{y_1 - y_0, y_2 - y_1, y_3 - y_2, \dots, y_n - y_{n-1}\}$$

について,  $n \rightarrow \infty$  のとき  $\delta_n \rightarrow 0$  とする. つまり,  $n \rightarrow \infty$  のとき  $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}, y_n$  の間隔は 0 に限りなく近づくとする.

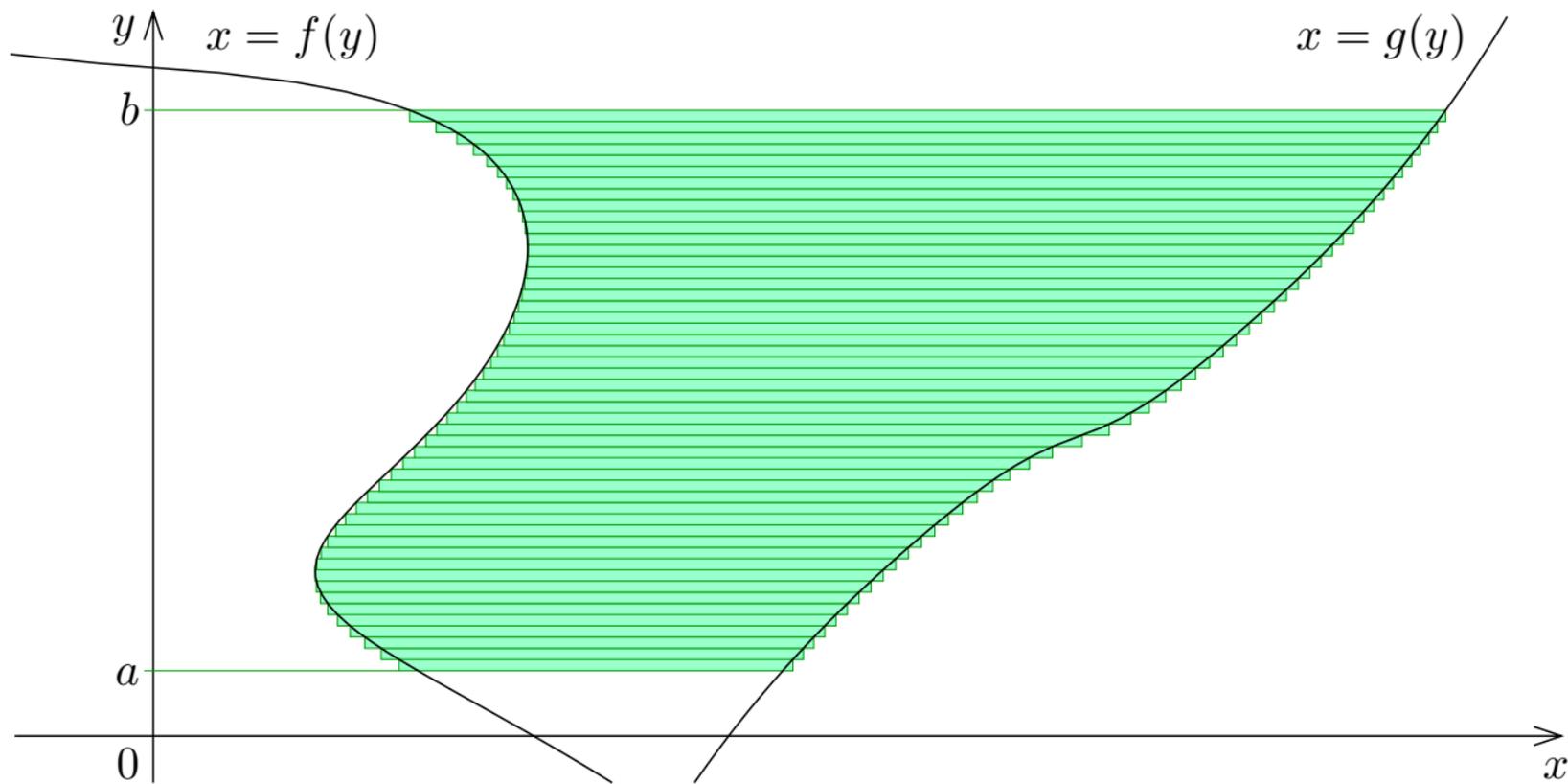
$n = 10$  のとき, 下図の 10 個の明緑色の長方形を併せた図形の面積は関数  $g(y) - f(y)$  のリーマン和  $S_{10} = \sum_{k=1}^{10} [\{g(y_k) - f(y_k)\}(y_k - y_{k-1})]$  である.



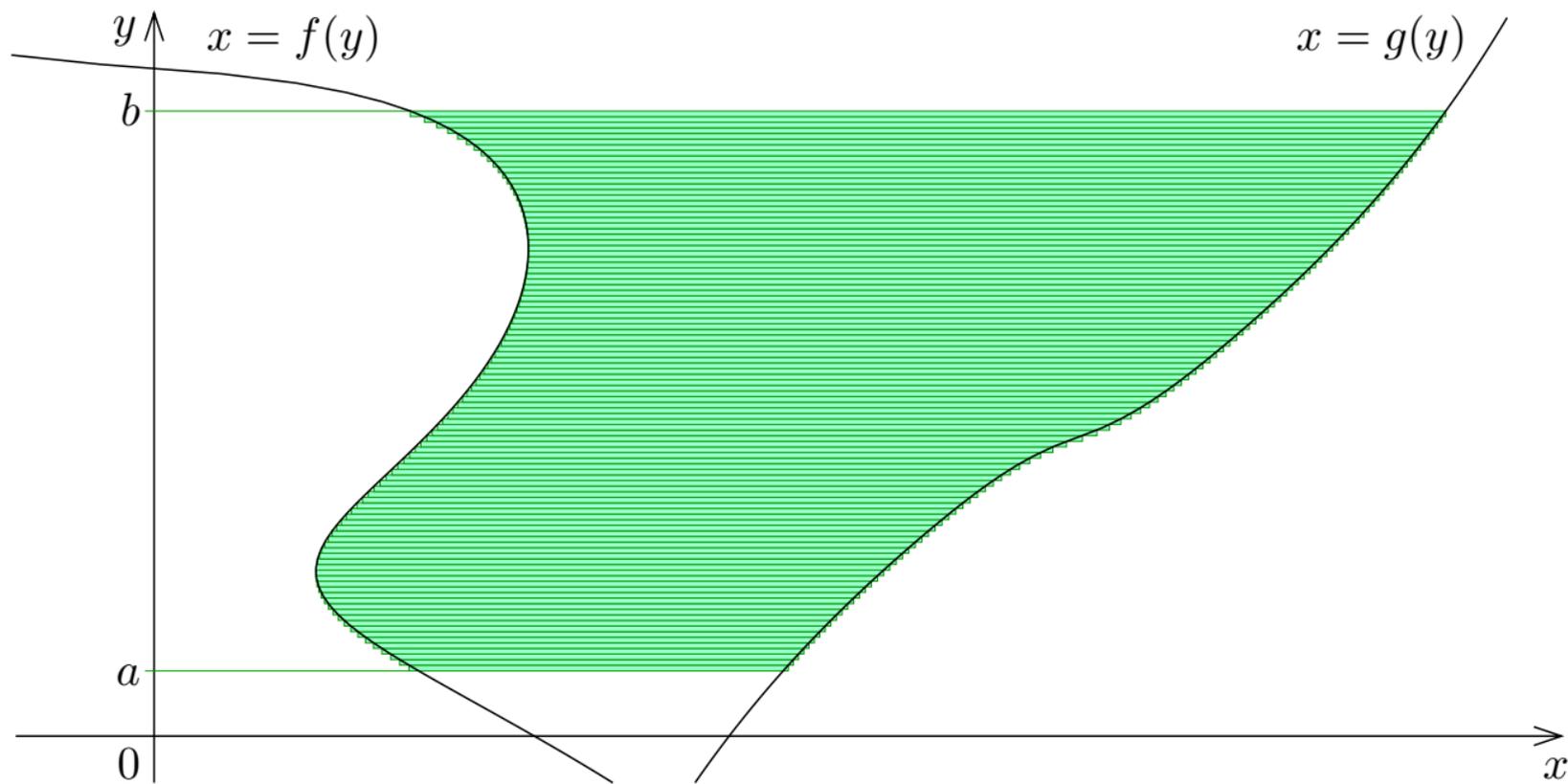
$n = 20$  のとき, 下図の 20 個の明緑色の長方形を併せた図形の面積は関数  $g(y) - f(y)$  のリーマン和  $S_{20} = \sum_{k=1}^{20} [\{g(y_k) - f(y_k)\}(y_k - y_{k-1})]$  である.



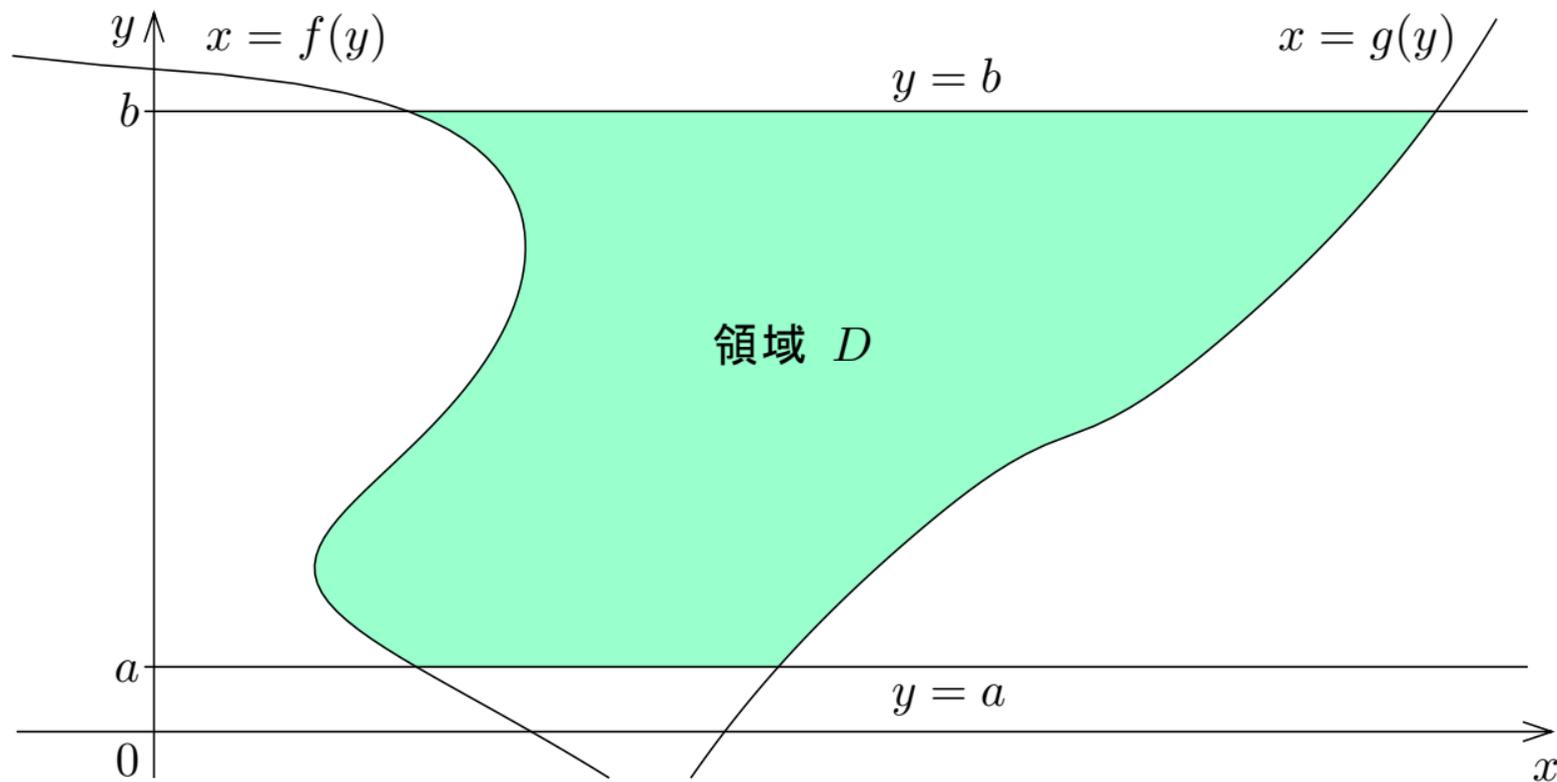
$n = 50$  のとき, 下図の 50 個の明緑色の長方形を併せた図形の面積は関数  $g(y) - f(y)$  のリーマン和  $S_{50} = \sum_{k=1}^{50} [\{g(y_k) - f(y_k)\}(y_k - y_{k-1})]$  である.

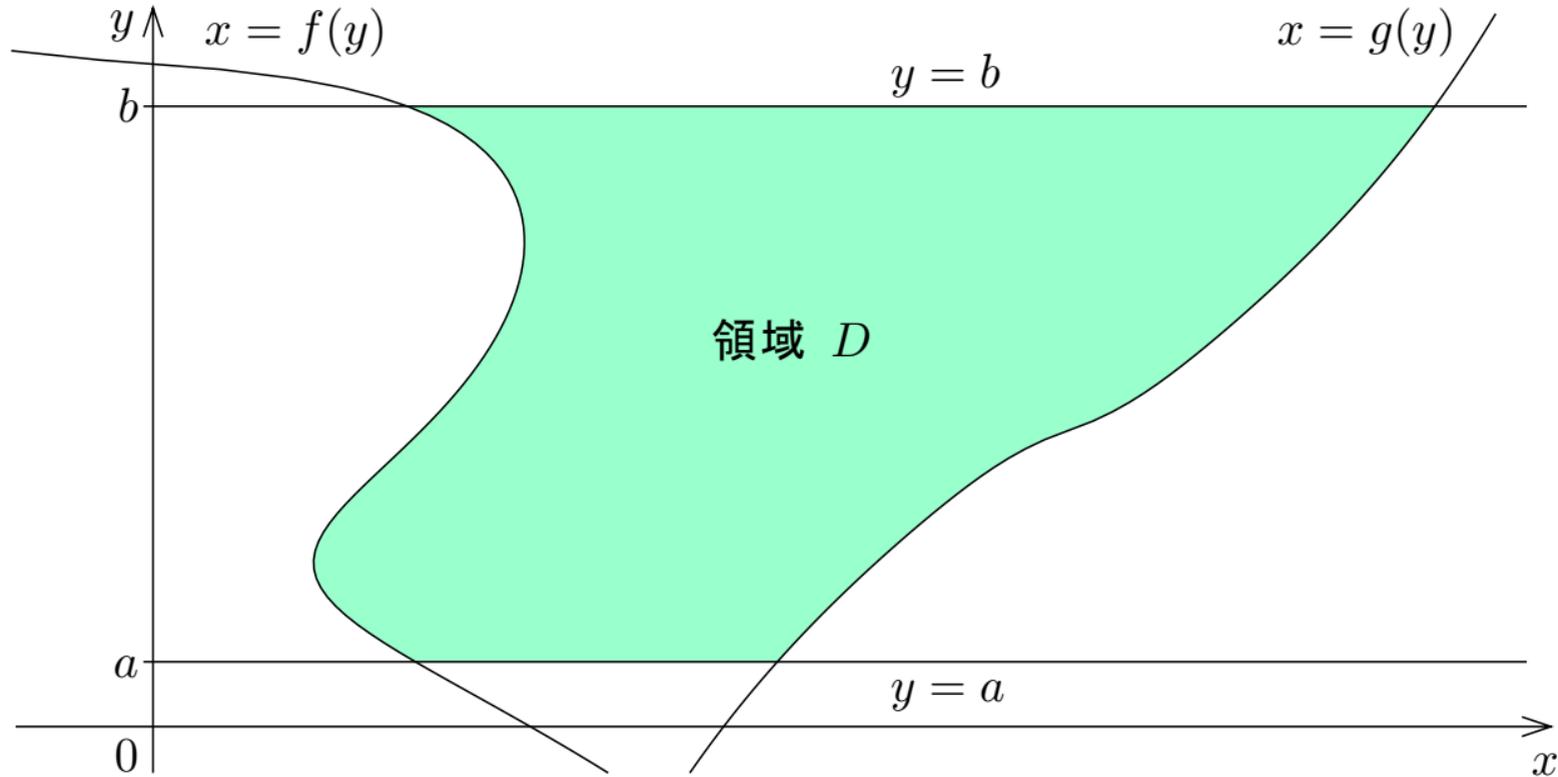


$n = 100$  のとき, 下図の 100 個の明緑色の長方形を併せた図形の面積は関数  $g(y) - f(y)$  のリーマン和  $S_{100} = \sum_{k=1}^{100} [\{g(y_k) - f(y_k)\}(y_k - y_{k-1})]$  である.



このような  $n$  個の長方形を併せた図形の面積は関数  $g(y) - f(y)$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n [\{g(y_k) - f(y_k)\} (y_k - y_{k-1})]$  であり, 長方形を限りなく増やして個々の長方形を限りなく薄くすると元の領域  $D$  の面積に限りなく近づく.





関数  $g(y) - f(y)$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n [\{g(y_k) - f(y_k)\} (y_k - y_{k-1})]$  は  $n \rightarrow \infty$  のとき領域  $D$  の面積に限りなく近づく. 故に領域  $D$  の面積はリーマン和  $S_n$  の  $n \rightarrow \infty$  のときの極限值である.

領域  $D$  の面積は関数  $g(y) - f(y)$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n [\{g(y_k) - f(y_k)\} (y_k - y_{k-1})]$  の極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  である.

領域  $D$  の面積は関数  $g(y) - f(y)$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n [\{g(y_k) - f(y_k)\} (y_k - y_{k-1})]$  の極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  である. 関数  $f(y)$  と  $g(y)$  とが  $a$  から  $b$  まで積分可能なので, 関数  $g(y) - f(y)$  も  $a$  から  $b$  まで積分可能である.

領域  $D$  の面積は関数  $g(y) - f(y)$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n [\{g(y_k) - f(y_k)\} (y_k - y_{k-1})]$  の極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  である. 関数  $f(y)$  と  $g(y)$  とが  $a$  から  $b$  まで積分可能なので, 関数  $g(y) - f(y)$  も  $a$  から  $b$  まで積分可能である.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$  なので, 関数  $g(y) - f(y)$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n [\{g(y_k) - f(y_k)\} (y_k - y_{k-1})]$  は  $n \rightarrow \infty$  のとき定積分  $\int_a^b \{g(y) - f(y)\} dy$  に収束する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b \{g(y) - f(y)\} dy .$$

領域  $D$  の面積は関数  $g(y) - f(y)$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n [\{g(y_k) - f(y_k)\} (y_k - y_{k-1})]$  の極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  である. 関数  $f(y)$  と  $g(y)$  とが  $a$  から  $b$  まで積分可能なので, 関数  $g(y) - f(y)$  も  $a$  から  $b$  まで積分可能である.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$  なので, 関数  $g(y) - f(y)$  のリーマン

和  $S_n = \sum_{k=1}^n [\{g(y_k) - f(y_k)\} (y_k - y_{k-1})]$  は  $n \rightarrow \infty$  のとき定積分  $\int_a^b \{g(y) - f(y)\} dy$  に収束する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b \{g(y) - f(y)\} dy .$$

故に, 領域  $D$  の面積は関数  $g(y) - f(y)$  の定積分  $\int_a^b \{g(y) - f(y)\} dy$  である.

領域  $D$  の面積は関数  $g(y) - f(y)$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n [\{g(y_k) - f(y_k)\} (y_k - y_{k-1})]$  の極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  である. 関数  $f(y)$  と  $g(y)$  とが  $a$  から  $b$  まで積分可能なので, 関数  $g(y) - f(y)$  も  $a$  から  $b$  まで積分可能である.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$  なので, 関数  $g(y) - f(y)$  のリーマン

和  $S_n = \sum_{k=1}^n [\{g(y_k) - f(y_k)\} (y_k - y_{k-1})]$  は  $n \rightarrow \infty$  のとき定積分  $\int_a^b \{g(y) - f(y)\} dy$  に収束する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b \{g(y) - f(y)\} dy .$$

故に, 領域  $D$  の面積は関数  $g(y) - f(y)$  の定積分  $\int_a^b \{g(y) - f(y)\} dy$  である.

このようにして次の定理が成り立つ.

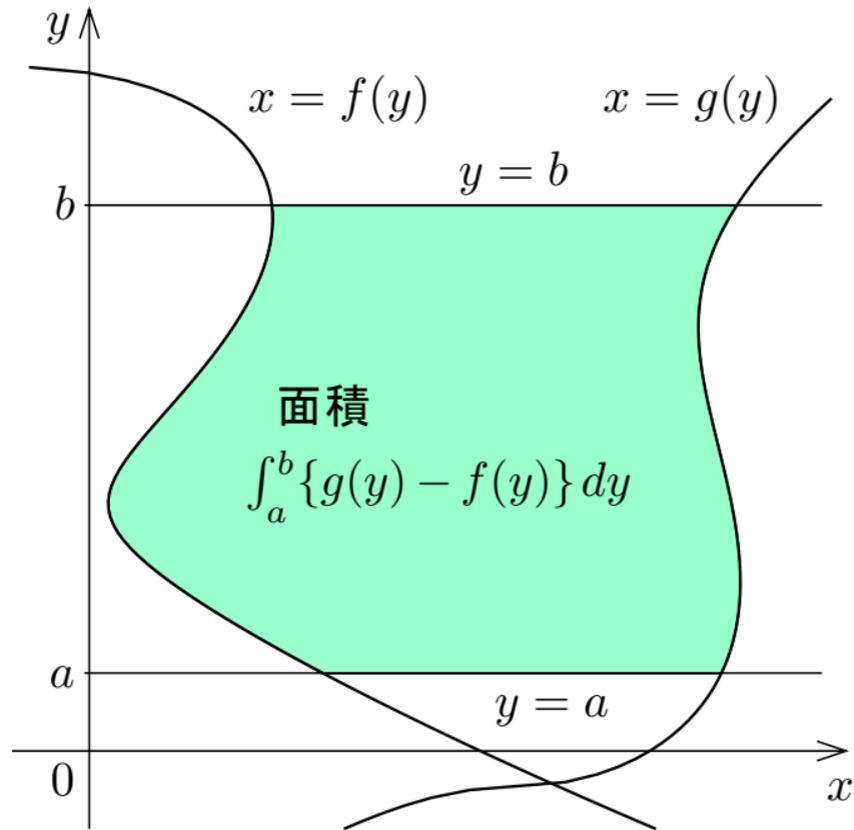
**定理** 実数  $a$  と  $b$  について  $a \leq b$  とする. また, 関数  $f$  と  $g$  とは  $a$  から  $b$  まで積分可能で, 区間  $[a, b]$  の各実数  $y$  について  $f(y) \leq g(y)$  とする.  $xy$  座標平面において連立不等式

$$a \leq y \leq b \text{ かつ } f(y) \leq x \leq g(y)$$

で表される領域の面積は

$$\int_a^b \{g(y) - f(y)\} dy$$

である.



**定理** 実数  $a$  と  $b$  について  $a \leq b$  とする. また, 関数  $f$  と  $g$  とは  $a$  から  $b$  まで積分可能で, 区間  $[a, b]$  の各実数  $y$  について  $f(y) \leq g(y)$  とする.  $xy$  座標平面において連立不等式

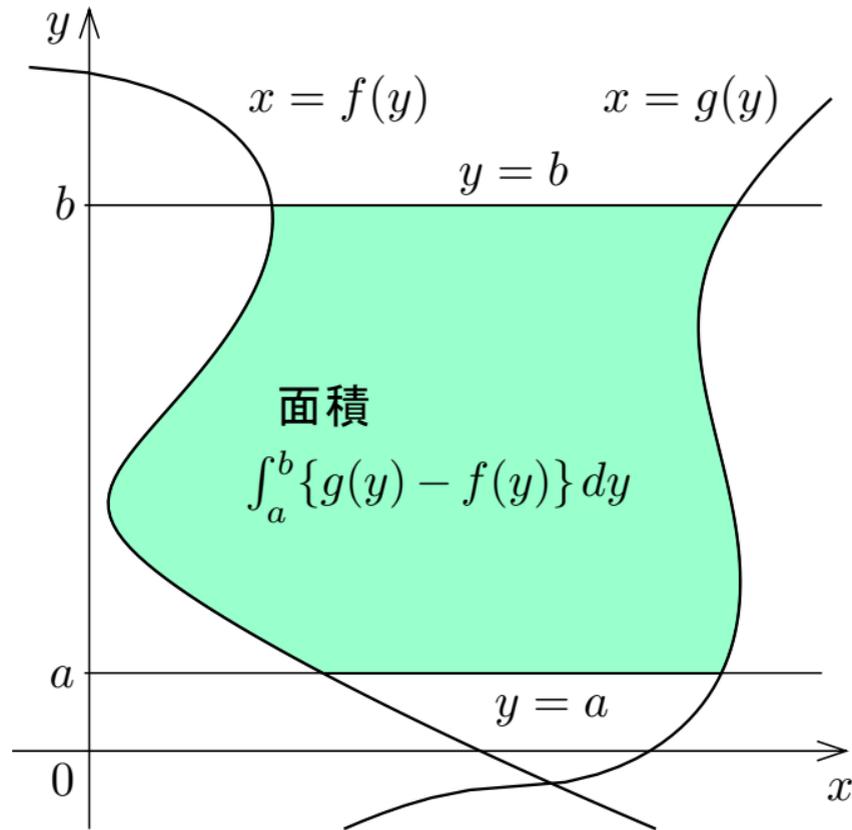
$$a \leq y \leq b \text{ かつ } f(y) \leq x \leq g(y)$$

で表される領域の面積は

$$\int_a^b \{g(y) - f(y)\} dy$$

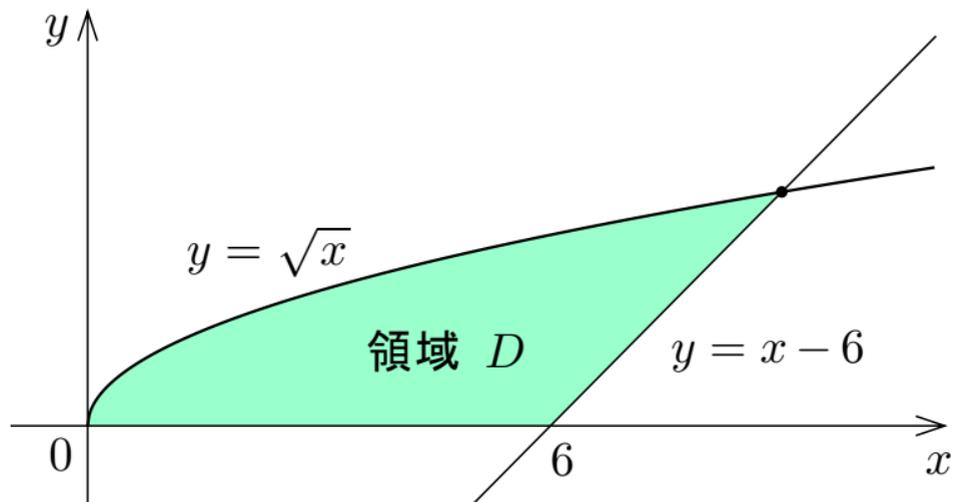
である.

この定理において, 領域の点の  $y$  座標の範囲と, その範囲で  $f(y) \leq g(y)$  であるかどうかには注意すること.



**例**  $xy$  座標平面において関数  $y = \sqrt{x}$  のグラフと関数  $y = x - 6$  のグラフと  $x$  軸とで囲まれる領域  $D$  の面積を求める.

例  $xy$  座標平面において関数  $y = \sqrt{x}$  のグラフと関数  $y = x - 6$  のグラフと  $x$  軸とで囲まれる領域  $D$  の面積を求める.



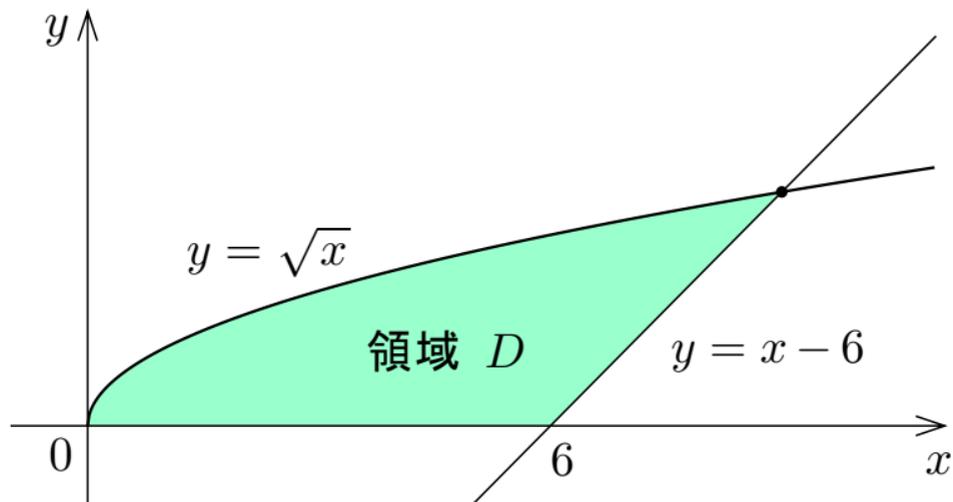
例  $xy$  座標平面において関数  $y = \sqrt{x}$  のグラフと関数  $y = x - 6$  のグラフと  $x$  軸とで囲まれる領域  $D$  の面積を求める.

$x \geq 0$  かつ  $y \geq 0$  のとき

$$y = \sqrt{x} \iff x = y^2 .$$

また,

$$y = x - 6 \iff x = y + 6 .$$



例  $xy$  座標平面において関数  $y = \sqrt{x}$  のグラフと関数  $y = x - 6$  のグラフと  $x$  軸とで囲まれる領域  $D$  の面積を求める.

$x \geq 0$  かつ  $y \geq 0$  のとき

$$y = \sqrt{x} \iff x = y^2 .$$

また,

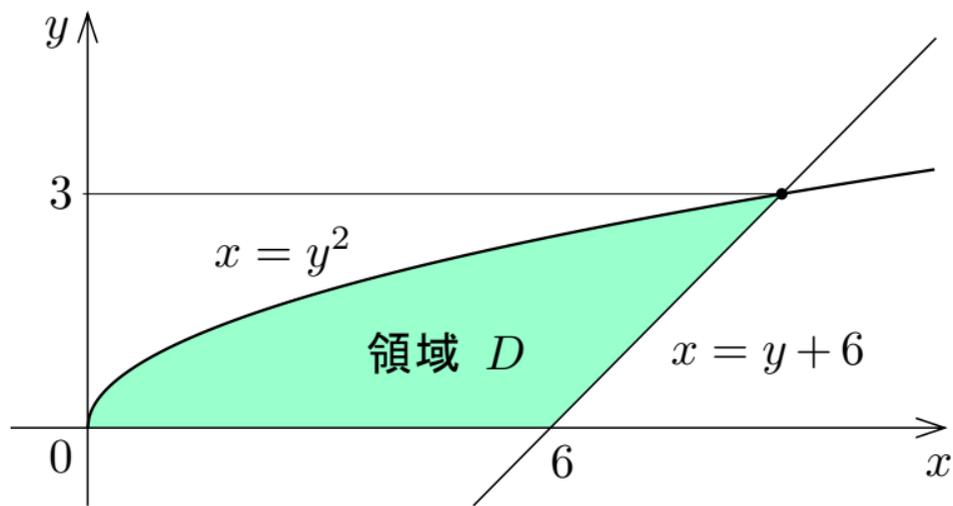
$$y = x - 6 \iff x = y + 6 .$$

$x = y^2$  かつ  $x = y + 6$  とする

と,  $y^2 = y + 6$ ,  $y = 3, -2$  ;

更に  $y \geq 0$  とすると  $y = 3$  .

領域  $D$  の点の  $y$  座標の範囲は  $0 \leq y \leq 3$  で, この範囲で  $y + 6 \geq y^2$  .



例  $xy$  座標平面において関数  $y = \sqrt{x}$  のグラフと関数  $y = x - 6$  のグラフと  $x$  軸とで囲まれる領域  $D$  の面積を求める.

$x \geq 0$  かつ  $y \geq 0$  のとき

$$y = \sqrt{x} \iff x = y^2 .$$

また,

$$y = x - 6 \iff x = y + 6 .$$

$x = y^2$  かつ  $x = y + 6$  とする

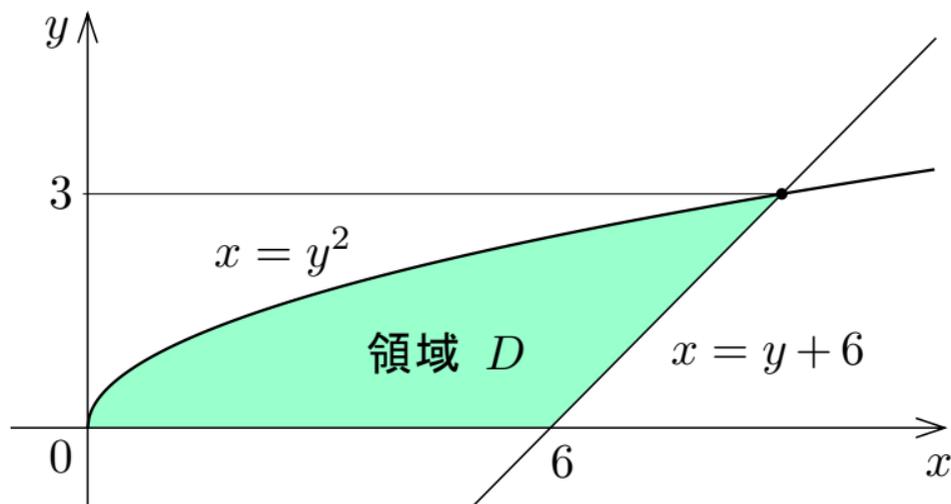
と,  $y^2 = y + 6$ ,  $y = 3, -2$  ;

更に  $y \geq 0$  とすると  $y = 3$  .

領域  $D$  の点の  $y$  座標の範囲は  $0 \leq y \leq 3$  で, この範囲で  $y + 6 \geq y^2$  . 領域

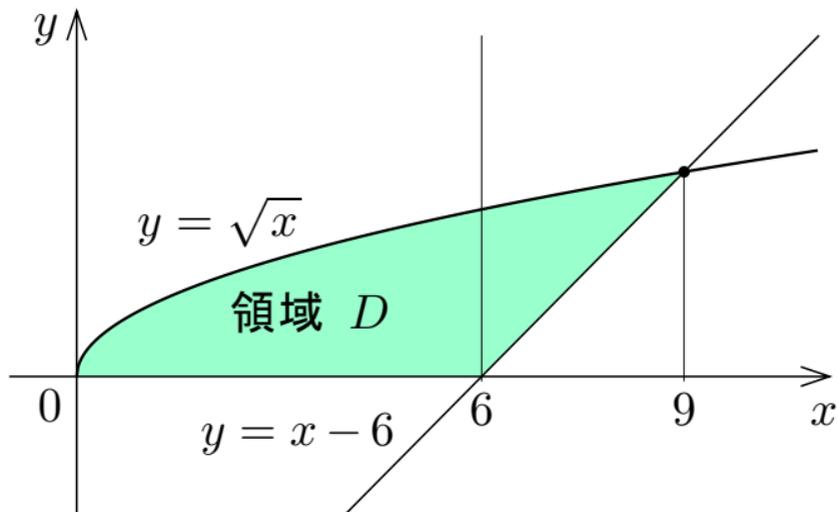
$D$  の面積は

$$\int_0^3 (y + 6 - y^2) dy = \left[ \frac{1}{2}y^2 + 6y - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^3 = \frac{27}{2} .$$



例  $xy$  座標平面において関数  $y = \sqrt{x}$  のグラフと関数  $y = x - 6$  のグラフと  $x$  軸とで囲まれる領域  $D$  の面積を求める.

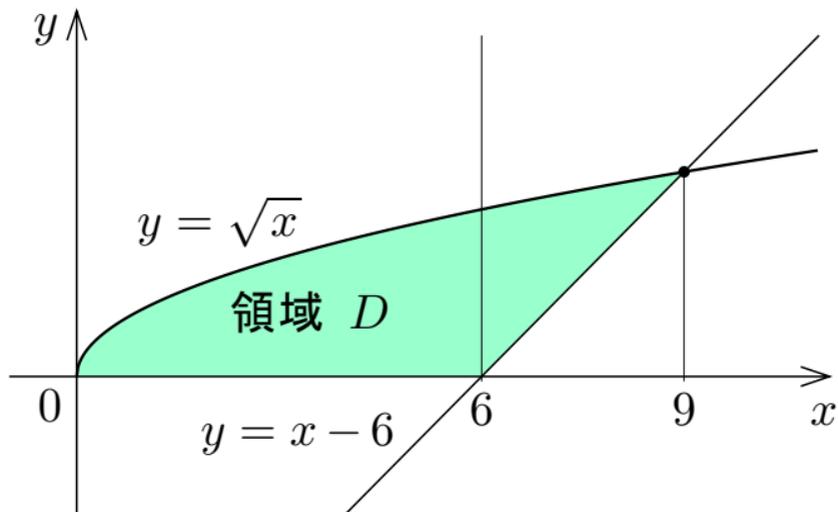
領域  $D$  の面積を  $x$  について積分して求めるには,  $D$  を  $0 \leq x \leq 6$  の部分と  $6 \leq x \leq 9$  の部分とに分けて計算する.



例  $xy$  座標平面において関数  $y = \sqrt{x}$  のグラフと関数  $y = x - 6$  のグラフと  $x$  軸とで囲まれる領域  $D$  の面積を求める.

領域  $D$  の面積を  $x$  について積分して求めるには,  $D$  を  $0 \leq x \leq 6$  の部分と  $6 \leq x \leq 9$  の部分とに分けて計算する.

$$\begin{aligned} & \int_0^6 \sqrt{x} dx + \int_6^9 \{ \sqrt{x} - (x - 6) \} dx \\ &= \left[ \frac{2}{3} x \sqrt{x} \right]_0^6 + \left[ \frac{2}{3} x \sqrt{x} - \frac{1}{2} x^2 + 6x \right]_6^9 \\ &= 4\sqrt{6} + 6\sqrt{9} - \frac{81}{2} + 54 - 4\sqrt{6} + 18 - 36 \\ &= \frac{27}{2}. \end{aligned}$$



**問8.3.1**  $xy$  座標平面において関数  $y = -\sqrt{x}$  のグラフと関数  $y = \frac{x}{2} - 4$  のグラフと  $x$  軸とで囲まれる領域の面積を求めよ.

$y = -\sqrt{x}$  のとき  $y \leq 0$  .

$x \geq 0$  かつ  $y \leq 0$  のとき

$y = -\sqrt{x} \iff x = \quad .$

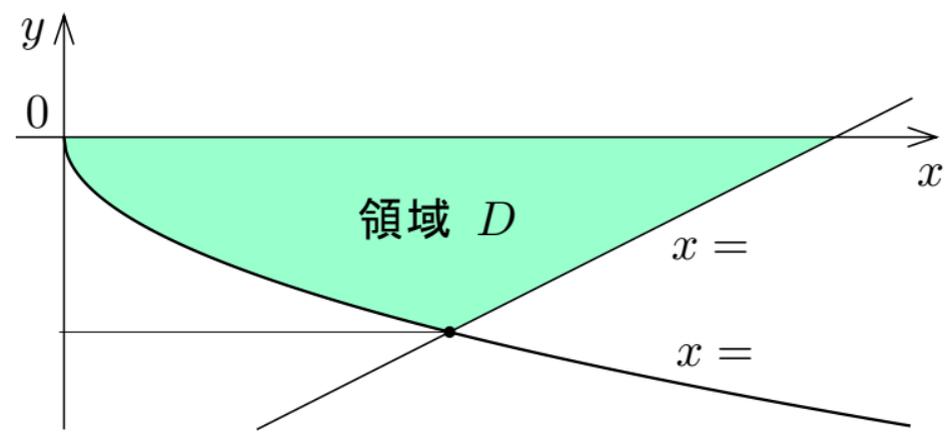
また,

$y = \frac{x}{2} - 4 \iff x = \quad .$

$x = \quad$  かつ  $x = \quad$  とす

ると,  $\quad = \quad$  ,  $y = \quad$  ; 更に  $y \leq 0$  とすると  $y = \quad$  . 領域  $D$  の点の  $y$  座標の範囲は  $\leq y \leq 0$  で, この範囲で  $\geq \quad$  . 領域の面積は

$\int^0 ( \quad ) dy =$



**問8.3.1**  $xy$  座標平面において関数  $y = -\sqrt{x}$  のグラフと関数  $y = \frac{x}{2} - 4$  のグラフと  $x$  軸とで囲まれる領域の面積を求めよ.

$y = -\sqrt{x}$  のとき  $y \leq 0$  .

$x \geq 0$  かつ  $y \leq 0$  のとき

$y = -\sqrt{x} \iff x = y^2$  .

また,

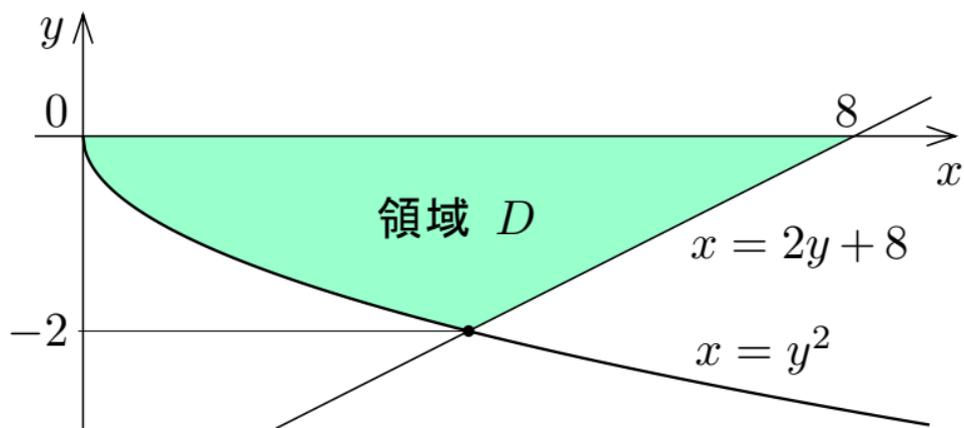
$y = \frac{x}{2} - 4 \iff x = 2y + 8$  .

$x = y^2$  かつ  $x = 2y + 8$  とす

ると,  $y^2 = 2y + 8$  ,  $y =$  , ; 更に  $y \leq 0$  とすると  $y =$  . 領域  $D$  の

点の  $y$  座標の範囲は  $\leq y \leq 0$  で, この範囲で  $2y + 8$   $y^2$  . 領域の面積は

$$\int_{-2}^0 ( \quad ) dy = \left[ \quad \right]_{-2}^0 = \quad .$$



**問8.3.1**  $xy$  座標平面において関数  $y = -\sqrt{x}$  のグラフと関数  $y = \frac{x}{2} - 4$  のグラフと  $x$  軸とで囲まれる領域の面積を求めよ.

$y = -\sqrt{x}$  のとき  $y \leq 0$  .

$x \geq 0$  かつ  $y \leq 0$  のとき

$y = -\sqrt{x} \iff x = y^2$  .

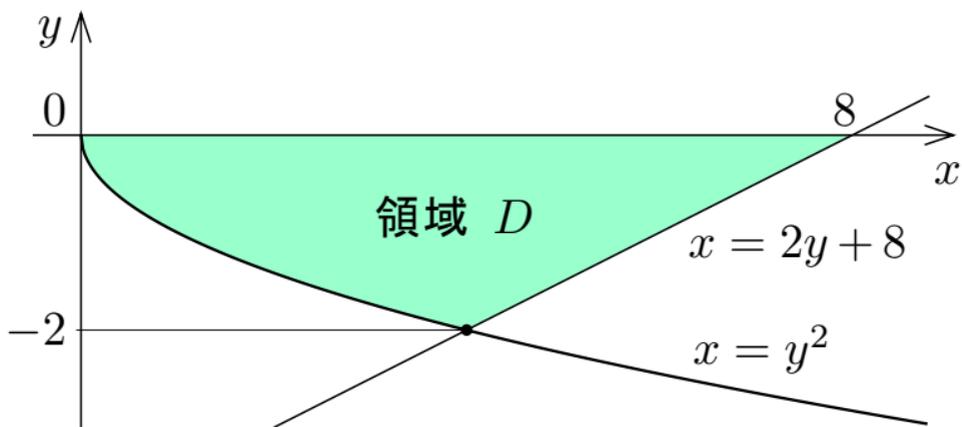
また,

$y = \frac{x}{2} - 4 \iff x = 2y + 8$  .

$x = y^2$  かつ  $x = 2y + 8$  とす

ると,  $y^2 = 2y + 8$  ,  $y = 4, -2$  ; 更に  $y \leq 0$  とすると  $y = -2$  . 領域  $D$  の点の  $y$  座標の範囲は  $-2 \leq y \leq 0$  で, この範囲で  $2y + 8 \geq y^2$  . 領域の面積は

$$\int_{-2}^0 ( \quad ) dy = \left[ \quad \right]_{-2}^0 = \quad .$$



問8.3.1  $xy$  座標平面において関数  $y = -\sqrt{x}$  のグラフと関数  $y = \frac{x}{2} - 4$  のグラフと  $x$  軸とで囲まれる領域の面積を求めよ.

$$y = -\sqrt{x} \text{ のとき } y \leq 0 .$$

$x \geq 0$  かつ  $y \leq 0$  のとき

$$y = -\sqrt{x} \iff x = y^2 .$$

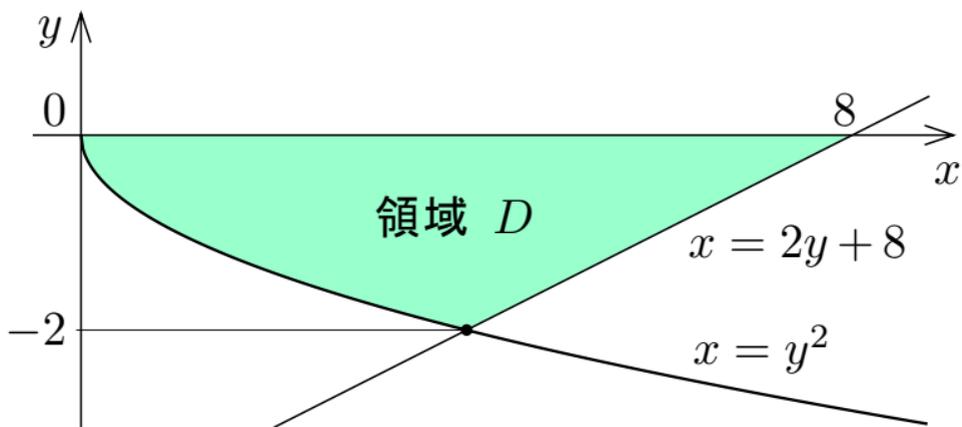
また,

$$y = \frac{x}{2} - 4 \iff x = 2y + 8 .$$

$x = y^2$  かつ  $x = 2y + 8$  とす

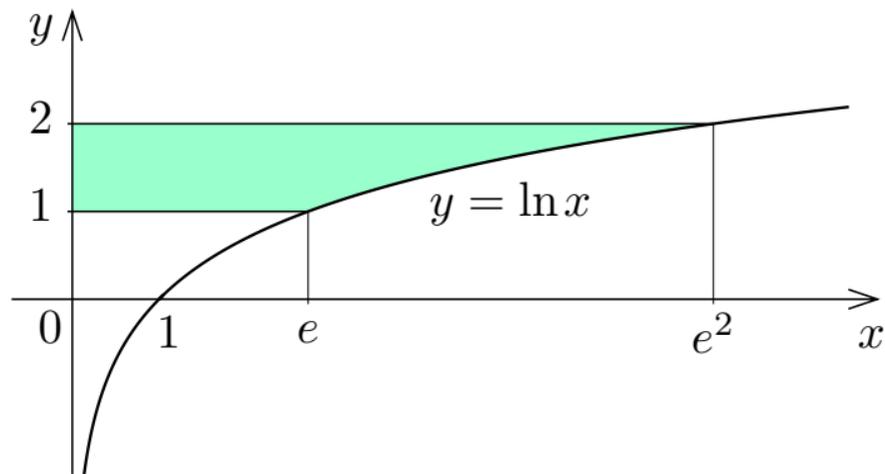
ると,  $y^2 = 2y + 8$ ,  $y = 4, -2$ ; 更に  $y \leq 0$  とすると  $y = -2$ . 領域  $D$  の点の  $y$  座標の範囲は  $-2 \leq y \leq 0$  で, この範囲で  $2y + 8 \geq y^2$ . 領域の面積は

$$\int_{-2}^0 (2y + 8 - y^2) dy = \left[ y^2 + 8y - \frac{1}{3}y^3 \right]_{-2}^0 = \frac{28}{3} .$$



終

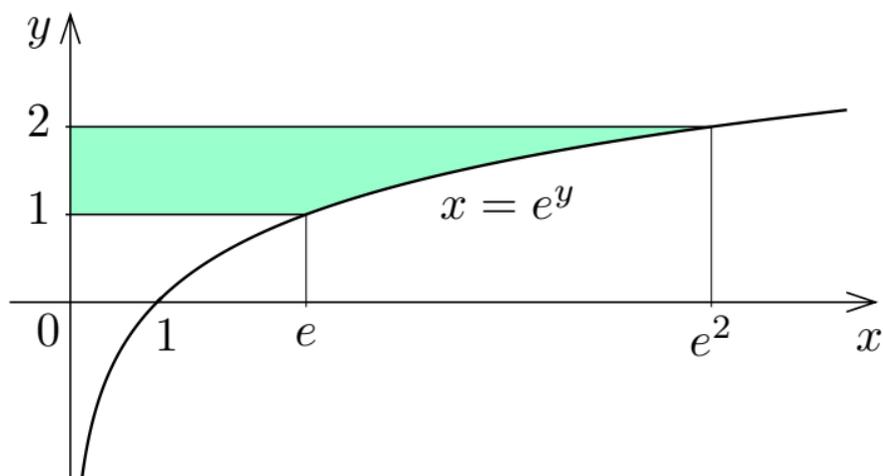
例  $xy$  座標平面において関数  $y = \ln x$  ( $x > 0$ ) のグラフと直線  $y = 1$  と直線  $y = 2$  と  $y$  軸とで囲まれる領域の面積を求める.



**例**  $xy$  座標平面において関数  $y = \ln x$  ( $x > 0$ ) のグラフと直線  $y = 1$  と直線  $y = 2$  と  $y$  軸とで囲まれる領域の面積を求める.

正の各実数  $x$  及び各実数  $y$  について

$$y = \ln x \iff x = e^y .$$

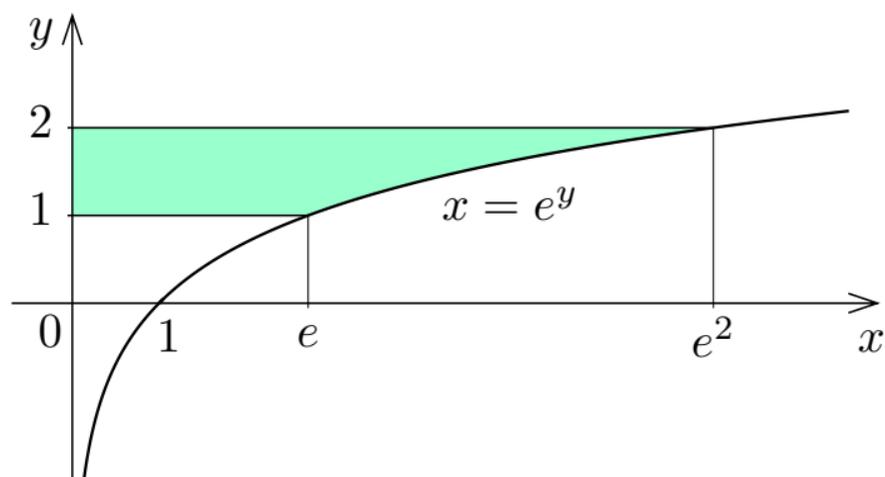


例  $xy$  座標平面において関数  $y = \ln x$  ( $x > 0$ ) のグラフと直線  $y = 1$  と直線  $y = 2$  と  $y$  軸とで囲まれる領域の面積を求める.

正の各実数  $x$  及び各実数  $y$  について

$$y = \ln x \iff x = e^y .$$

領域の点の  $y$  座標の範囲は  $1 \leq y \leq 2$  . 各実数  $y$  について  $e^y > 0$  .



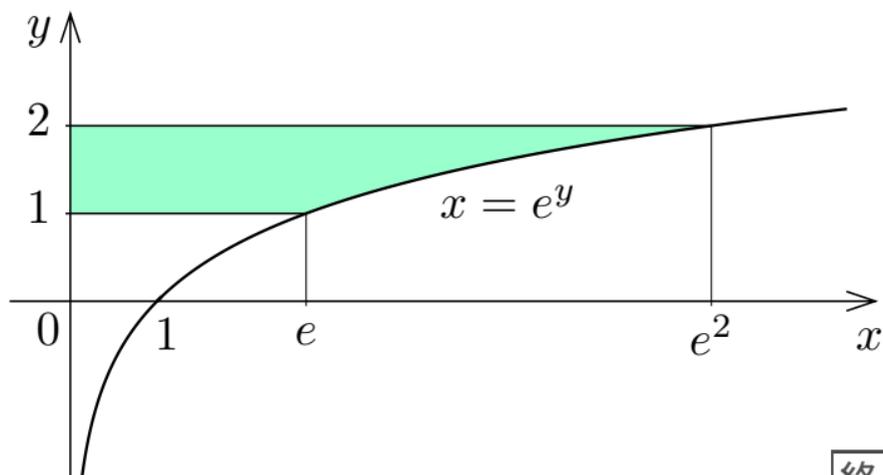
例  $xy$  座標平面において関数  $y = \ln x$  ( $x > 0$ ) のグラフと直線  $y = 1$  と直線  $y = 2$  と  $y$  軸とで囲まれる領域の面積を求める.

正の各実数  $x$  及び各実数  $y$  について

$$y = \ln x \iff x = e^y .$$

領域の点の  $y$  座標の範囲は  $1 \leq y \leq 2$  . 各実数  $y$  について  $e^y > 0$  . 領域の面積は

$$\int_1^2 e^y dy = [e^y]_1^2 = e^2 - e .$$



終

問8.3.2  $xy$  座標平面において関数  $y = e^x$  のグラフと直線  $y = e$  と直線  $y = e^2$  と  $y$  軸とで囲まれる領域の面積を求めよ.

各実数  $x$  及び正の各実数  $y$  について

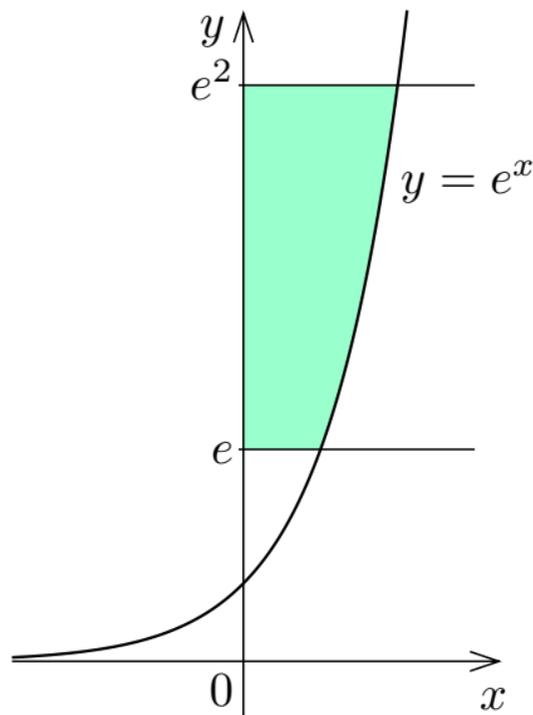
$$y \geq e^x \iff x \leq$$

領域を表す連立不等式は

$$e \leq y \leq e^2 \quad \text{かつ} \quad x \leq$$

領域の面積は

$$\int dy =$$



**問8.3.2**  $xy$  座標平面において関数  $y = e^x$  のグラフと直線  $y = e$  と直線  $y = e^2$  と  $y$  軸とで囲まれる領域の面積を求めよ.

各実数  $x$  及び正の各実数  $y$  について

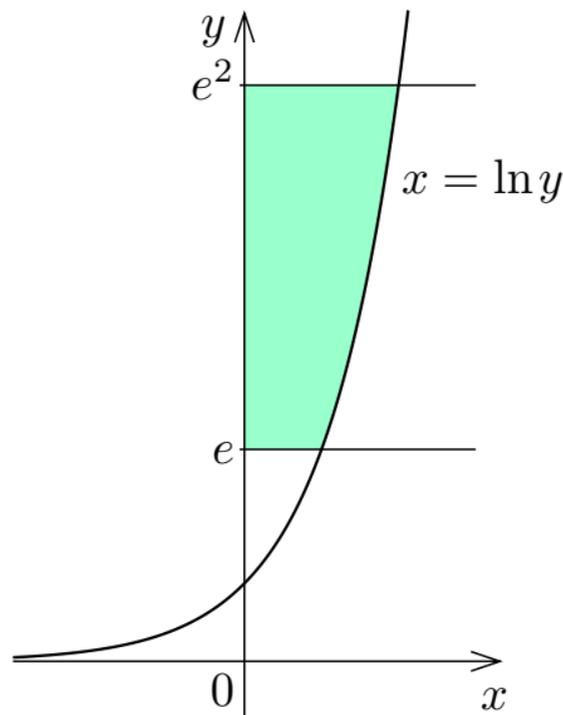
$$y \geq e^x \iff x \leq \ln y$$

領域を表す連立不等式は

$$e \leq y \leq e^2 \text{ かつ } 0 \leq x \leq \ln y .$$

領域の面積は

$$\int \quad dy =$$



**問8.3.2**  $xy$  座標平面において関数  $y = e^x$  のグラフと直線  $y = e$  と直線  $y = e^2$  と  $y$  軸とで囲まれる領域の面積を求めよ.

各実数  $x$  及び正の各実数  $y$  について

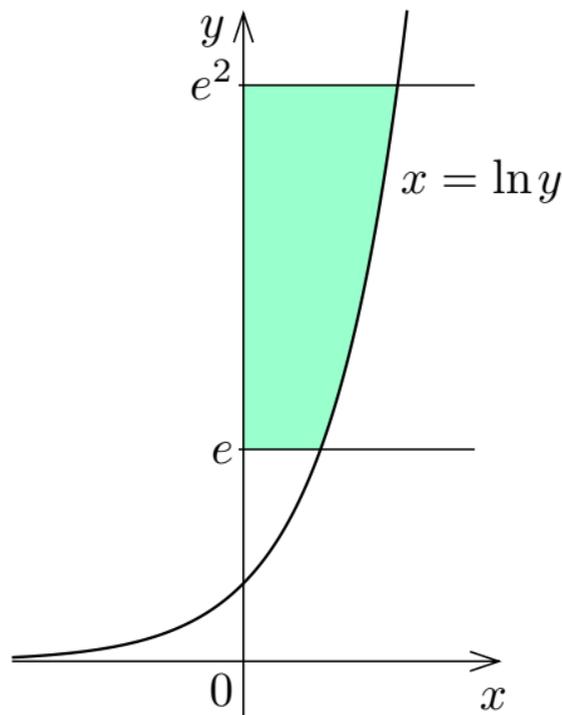
$$y \geq e^x \iff x \leq \ln y .$$

領域を表す連立不等式は

$$e \leq y \leq e^2 \text{ かつ } 0 \leq x \leq \ln y .$$

領域の面積は

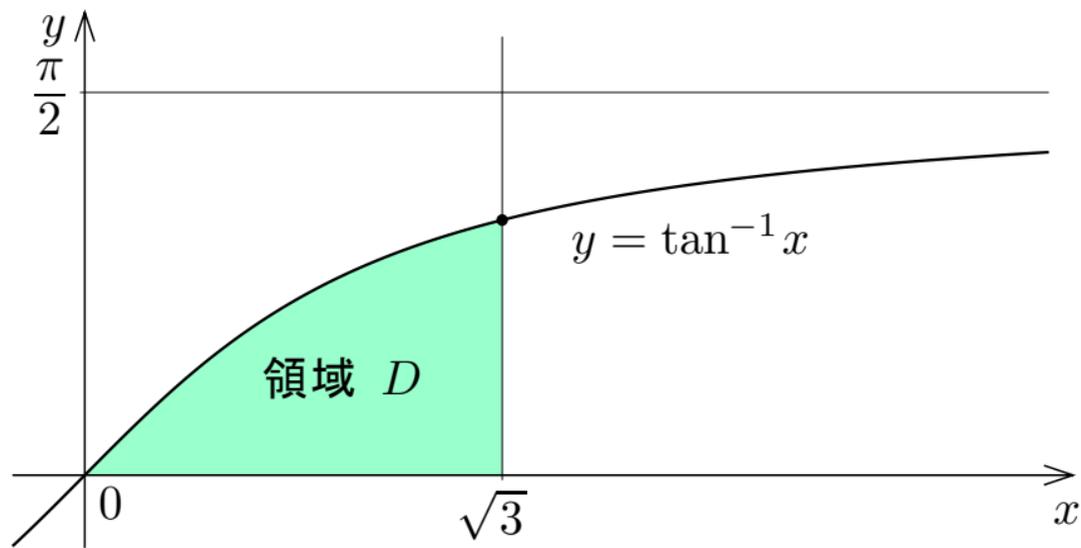
$$\begin{aligned} \int_e^{e^2} \ln y \, dy &= [y \ln y - y]_e^{e^2} \\ &= 2e^2 - e^2 - (e - e) \\ &= e^2 . \end{aligned}$$



終

**例**  $xy$  座標平面において不等式  $x \leq \sqrt{3}$  と  $0 \leq y \leq \tan^{-1} x$  との連立で表される領域  $D$  の面積を求める.

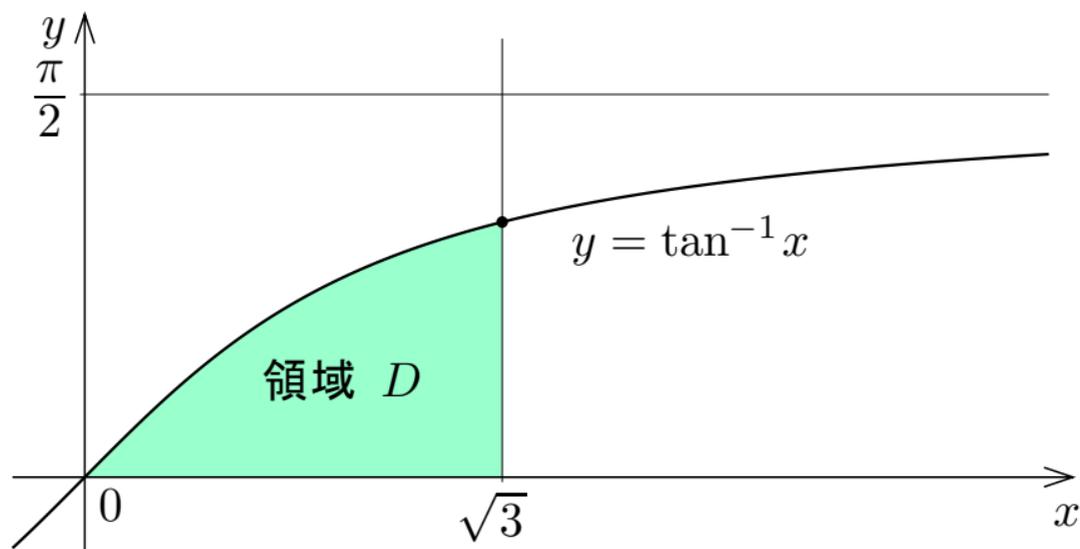
例  $xy$  座標平面において不等式  $x \leq \sqrt{3}$  と  $0 \leq y \leq \tan^{-1} x$  との連立で表される領域  $D$  の面積を求める.



**例**  $xy$  座標平面において不等式  $x \leq \sqrt{3}$  と  $0 \leq y \leq \tan^{-1} x$  との連立で表される領域  $D$  の面積を求める.

$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$  のとき

$$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow \tan y = x .$$



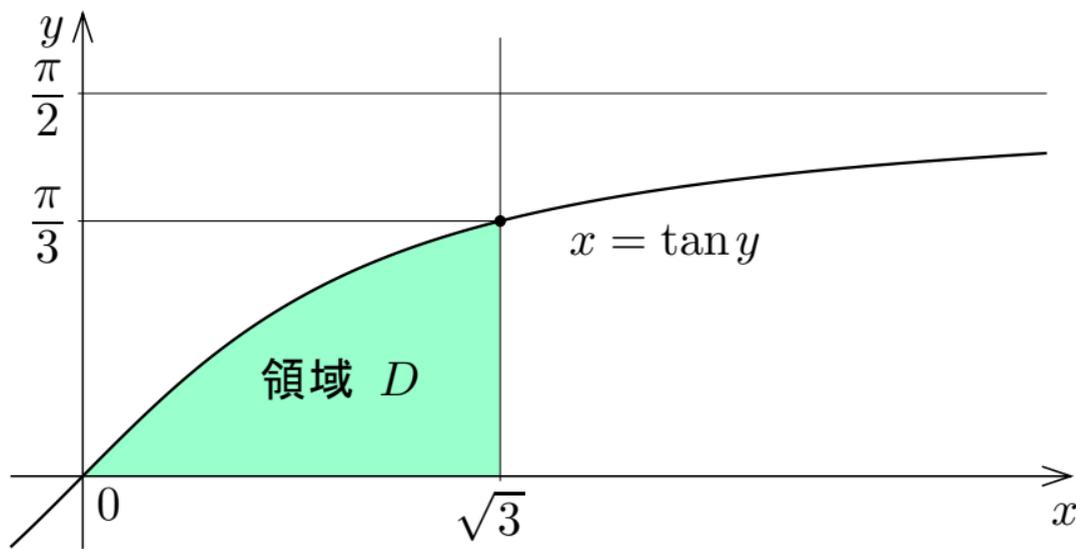
例  $xy$  座標平面において不等式  $x \leq \sqrt{3}$  と  $0 \leq y \leq \tan^{-1} x$  との連立で表される領域  $D$  の面積を求める.

$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$  のとき

$$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow \tan y = x .$$

関数  $y = \tan^{-1} x$  について,  $x = \sqrt{3}$  のとき

$$y = \tan^{-1} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} .$$



例  $xy$  座標平面において不等式  $x \leq \sqrt{3}$  と  $0 \leq y \leq \tan^{-1} x$  との連立で表される領域  $D$  の面積を求める.

$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$  のとき

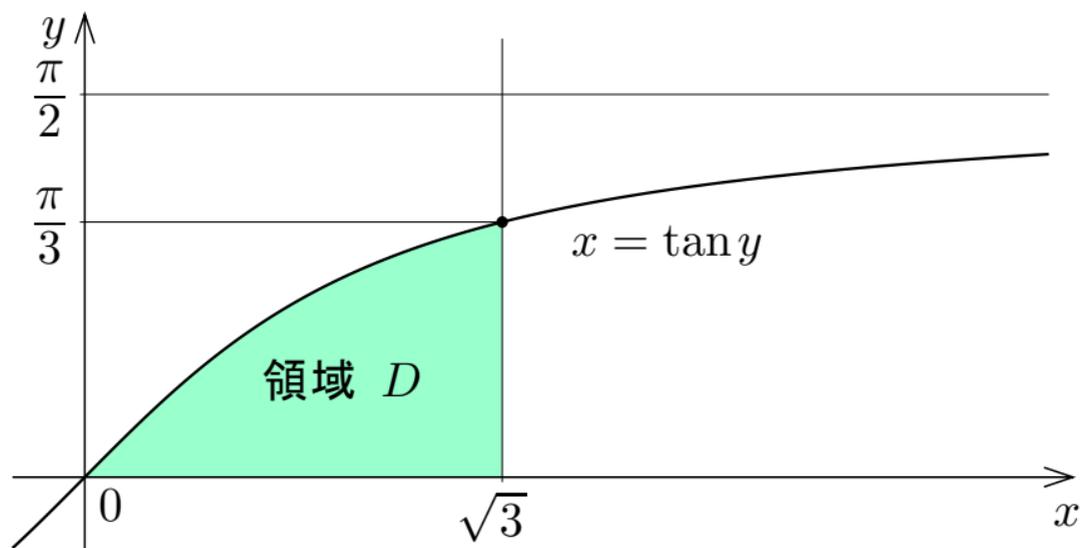
$$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow \tan y = x .$$

関数  $y = \tan^{-1} x$  について,  $x = \sqrt{3}$  のとき

$$y = \tan^{-1} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} .$$

領域  $D$  の  $y$  座標の範囲は  $0 \leq y \leq \frac{\pi}{3}$  であり, この

範囲で  $\tan y \leq \sqrt{3}$  .



例  $xy$  座標平面において不等式  $x \leq \sqrt{3}$  と  $0 \leq y \leq \tan^{-1} x$  との連立で表される領域  $D$  の面積を求める.

$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$  のとき

$$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow \tan y = x .$$

関数  $y = \tan^{-1} x$  につ

いて,  $x = \sqrt{3}$  のとき

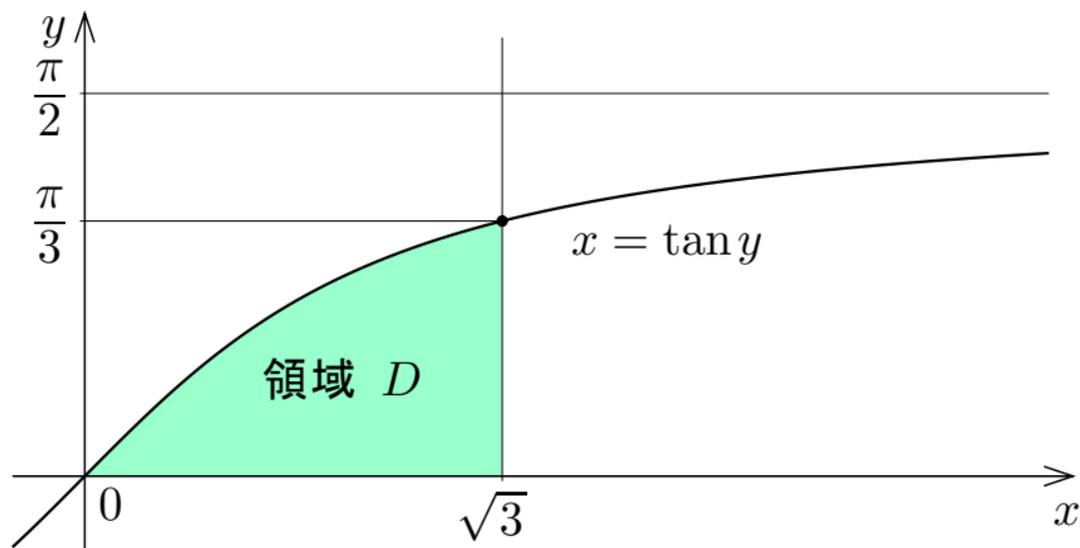
$$y = \tan^{-1} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} .$$

領域  $D$  の  $y$  座標の範囲は

$$0 \leq y \leq \frac{\pi}{3} \text{ であり, この}$$

範囲で  $\tan y \leq \sqrt{3}$  . 領域  $D$  の面積は

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sqrt{3} - \tan y) dy = \left[ \quad \right]_0^{\frac{\pi}{3}} =$$



例  $xy$  座標平面において不等式  $x \leq \sqrt{3}$  と  $0 \leq y \leq \tan^{-1} x$  との連立で表される領域  $D$  の面積を求める.

$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$  のとき

$$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow \tan y = x .$$

関数  $y = \tan^{-1} x$  につ

いて,  $x = \sqrt{3}$  のとき

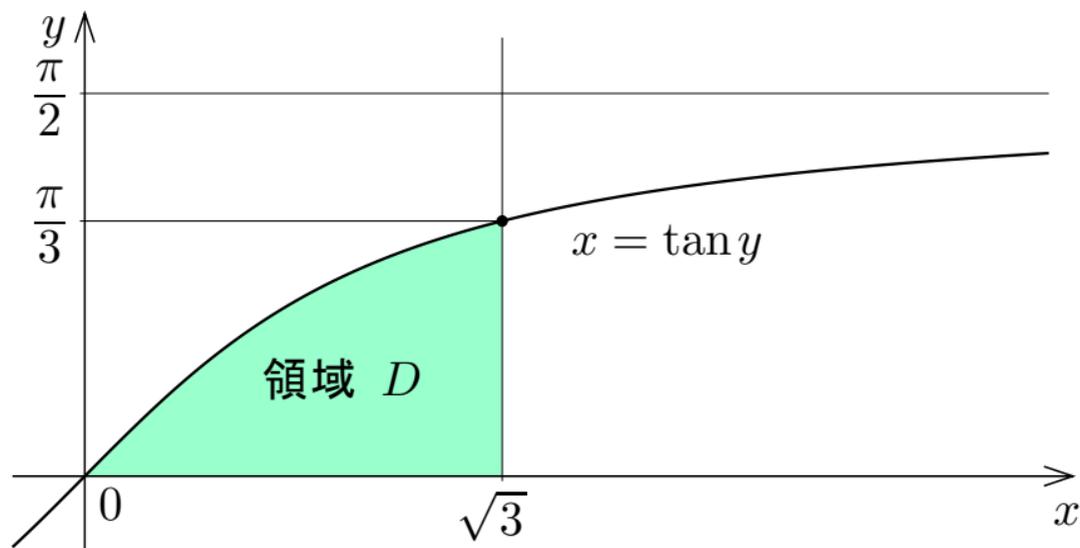
$$y = \tan^{-1} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} .$$

領域  $D$  の  $y$  座標の範囲は

$$0 \leq y \leq \frac{\pi}{3} \text{ であり, この}$$

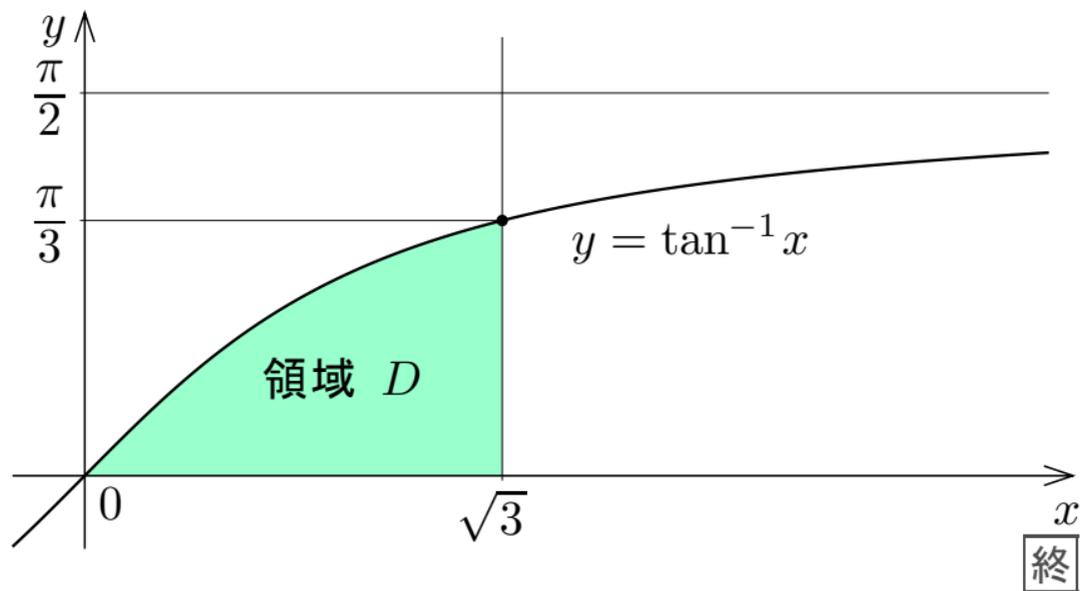
範囲で  $\tan y \leq \sqrt{3}$  . 領域  $D$  の面積は

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sqrt{3} - \tan y) dy = [\sqrt{3} y + \ln |\cos y|]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3} \pi}{3} + \ln \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} \pi}{3} - \ln 2 .$$



領域  $D$  の面積を次のようにも計算できる.  $x$  の関数  $y = \tan^{-1} x$  を考える.  $x = \tan y$ ,  $\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy} \tan y = \sec^2 y$  なので  $dx = \sec^2 y dy$ .  $x = 0$  のとき  $y = 0$ .  $x = \sqrt{3}$  のとき  $y = \frac{\pi}{3}$ . 領域  $D$  の面積は

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\sqrt{3}} \tan^{-1} x dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} y \sec^2 y dy \\
 &= [y \tan y - \int \tan y dy]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
 &= [y \tan y + \ln |\cos y|]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
 &= \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{3} + \ln \left( \cos \frac{\pi}{3} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{3} \pi}{3} - \ln 2.
 \end{aligned}$$



問8.3.3  $xy$  座標平面において不等式  $x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$  と  $0 \leq y \leq \sin^{-1} x$  との連立で表される領域  $D$  の面積を求めよ.

$-1 \leq x \leq 1$  かつ  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$  のとき,

$$y = \sin^{-1} x \iff x = \quad .$$

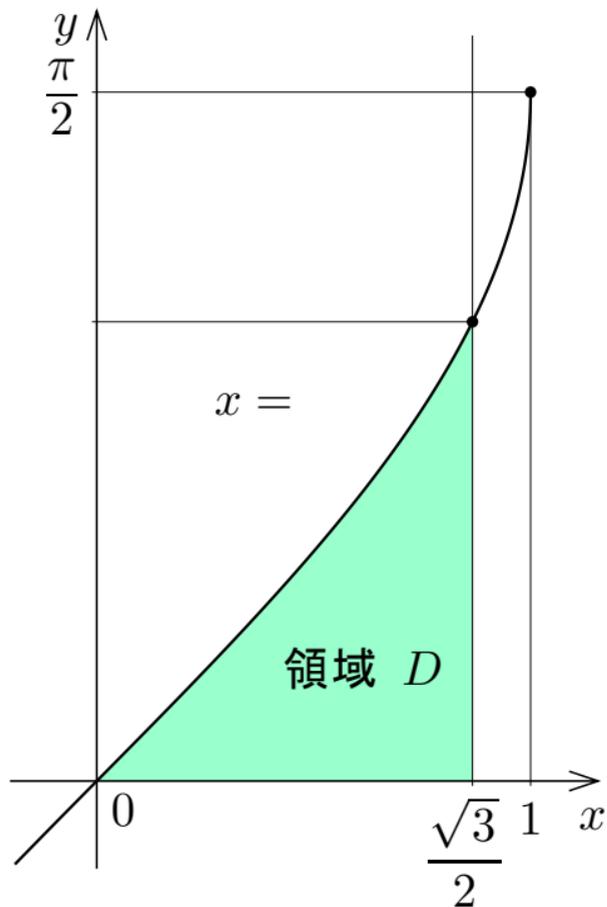
関数  $y = \sin^{-1} x$  について,  $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  のと

き  $y = \quad = \quad$  . 領域  $D$  の点の  $y$

座標の範囲は  $0 \leq y \leq \quad$  で, この範囲で

$\leq \frac{\sqrt{3}}{2}$  . 領域  $D$  の面積は

$$\int_0^{\quad} \left( \quad \right) dy =$$



問8.3.3  $xy$  座標平面において不等式  $x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$  と  $0 \leq y \leq \sin^{-1} x$  との連立で表される領域  $D$  の面積を求めよ.

$-1 \leq x \leq 1$  かつ  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$  のとき,

$$y = \sin^{-1} x \iff x = \sin y .$$

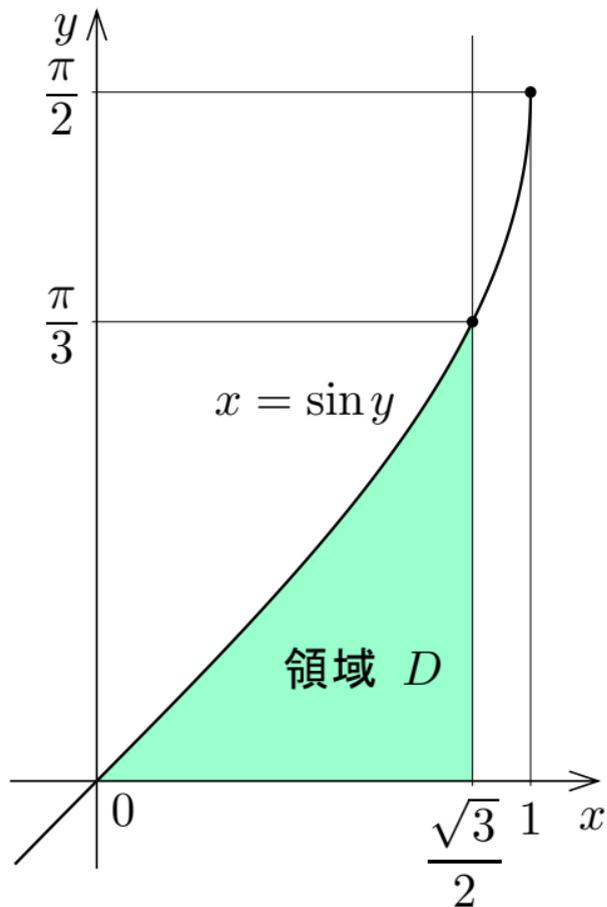
関数  $y = \sin^{-1} x$  について,  $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  のと

き  $y = \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$  . 領域  $D$  の点の  $y$

座標の範囲は  $0 \leq y \leq \frac{\pi}{3}$  で, この範囲で

$\sin y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$  . 領域  $D$  の面積は

$$\int_0 \left( \quad \right) dy =$$



問8.3.3  $xy$  座標平面において不等式  $x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$  と  $0 \leq y \leq \sin^{-1} x$  との連立で表される領域  $D$  の面積を求めよ.

$-1 \leq x \leq 1$  かつ  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$  のとき,

$$y = \sin^{-1} x \iff x = \sin y .$$

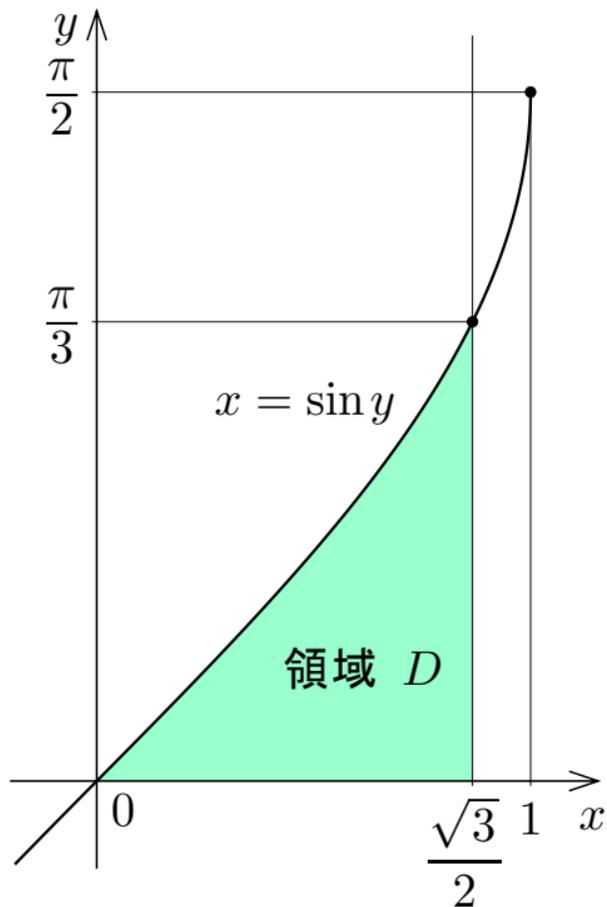
関数  $y = \sin^{-1} x$  について,  $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  のと

き  $y = \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$  . 領域  $D$  の点の  $y$

座標の範囲は  $0 \leq y \leq \frac{\pi}{3}$  で, この範囲で

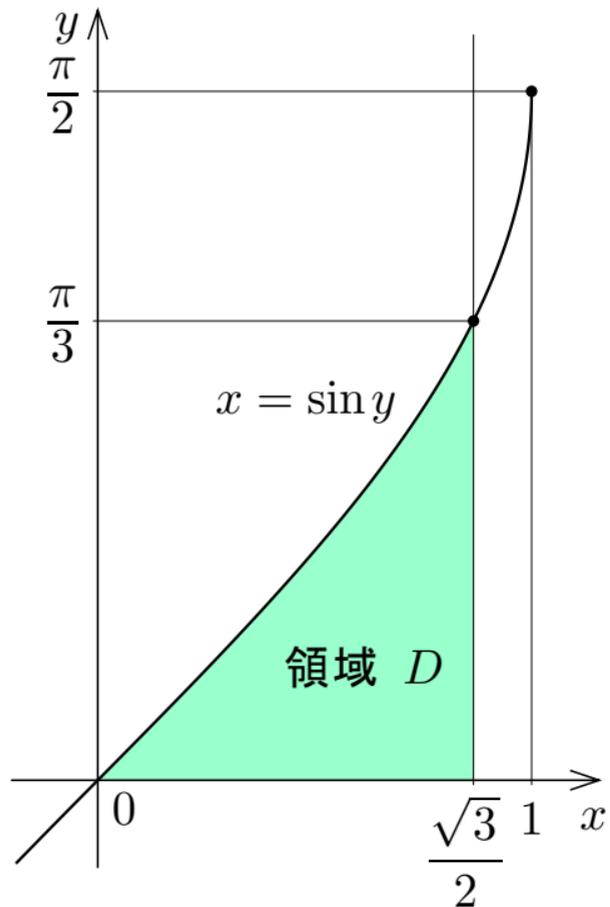
$\sin y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$  . 領域  $D$  の面積は

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin y \right) dy = \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} y + \cos y \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$



領域  $D$  の面積は

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin y \right) dy &= \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} y + \cos y \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} - 1 \\ &= \frac{\sqrt{3}\pi}{6} - \frac{1}{2} .\end{aligned}$$



領域  $D$  の面積を次のようにも計算できる.

$x$  の関数  $y = \sin^{-1} x$  を考える.  $x = \sin y$ ,  
 $\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy} \sin y = \cos y$  なので  $dx = \cos y dy$ .

$x = 0$  のとき  $y = 0$ .  $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  のとき

$y = \frac{\pi}{3}$ . 領域  $D$  の面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sin^{-1} x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} y \cos y dy \\ &= \left[ y \sin y - \int \sin y dy \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \left[ y \sin y + \cos y \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} - \cos 0 \\ &= \frac{\sqrt{3} \pi}{6} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

