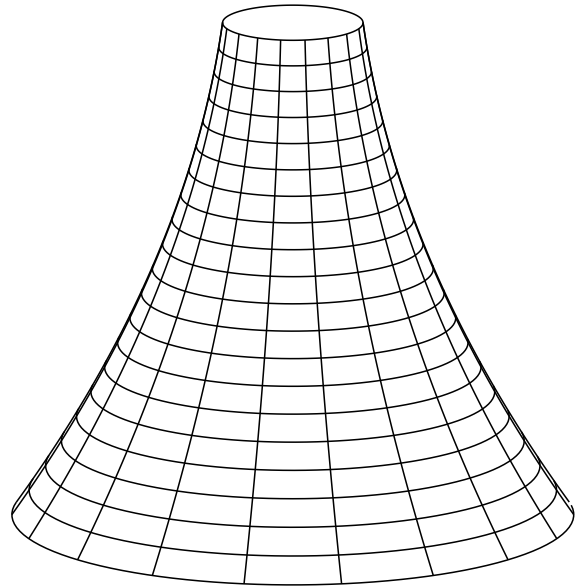
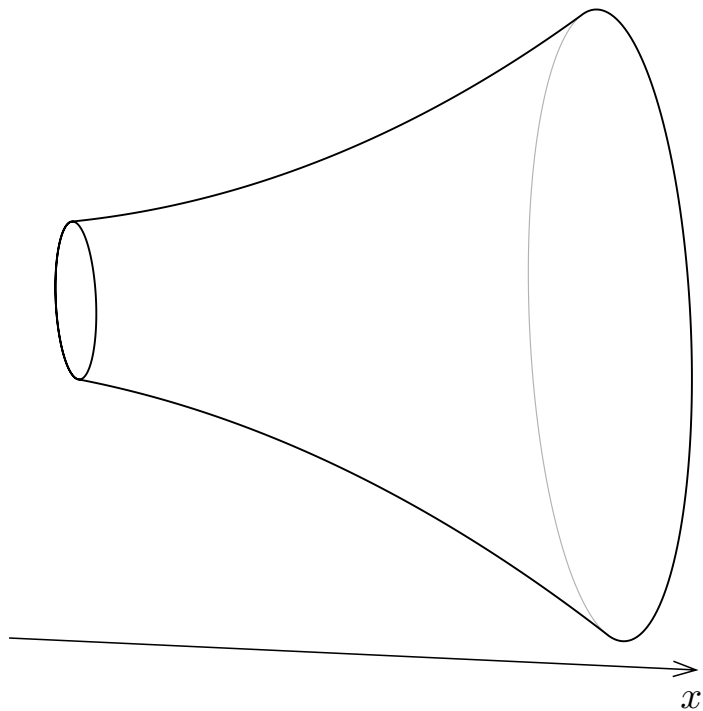


8.4 立体領域の体積

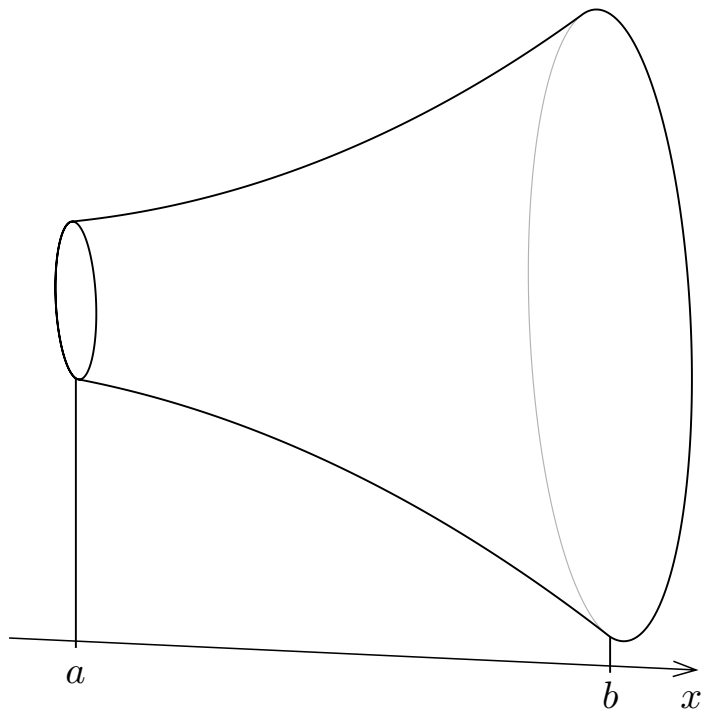
例として、右図のような立体図形 V （中も詰まっているものとして）の体積を求めることを考える。話を分かり易くするためにこの立体 V は回転体であるとする。



回転体 V に対して、右図の
ように、 V の中心軸と平行に
なるように x 座標軸を設定す
る。

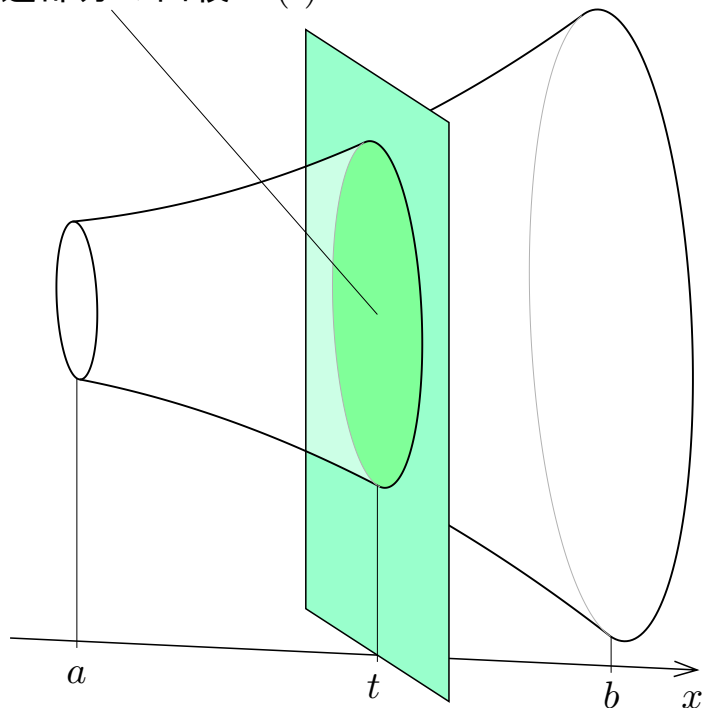


回転体 V に対して、右図の
ように、 V の中心軸と平行に
なるように x 座標軸を設定す
る。回転体 V に属す点の x
座標うち、最小値を a とお
き、最大値を b とおく。



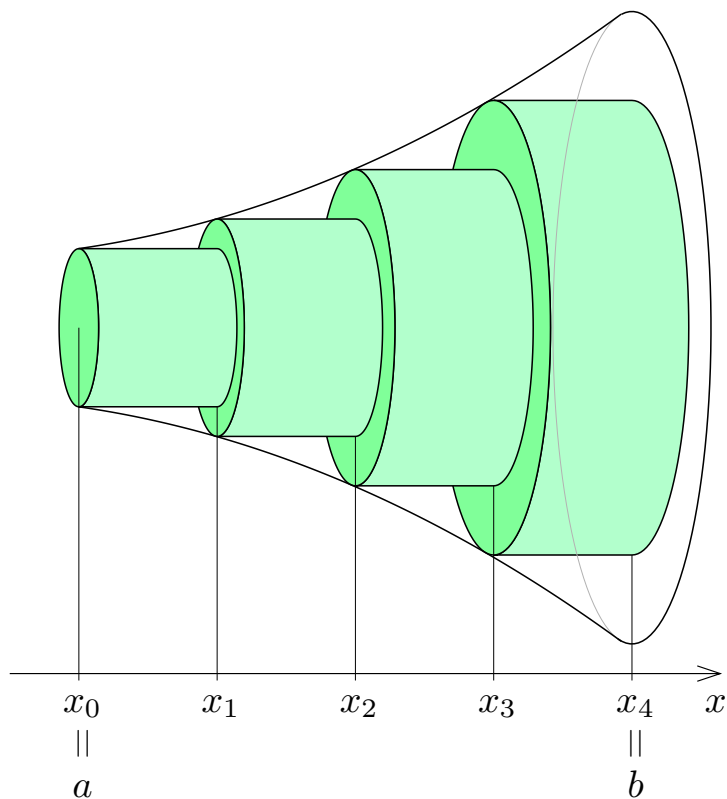
回転体 V に対して、右図のように、 V の中心軸と平行になるように x 座標軸を設定する。回転体 V に属す点の x 座標うち、最小値を a とおき、最大値を b とおく。更に、区間 $[a, b]$ の各実数 t に対して、 x 軸の座標 t の点に属し x 軸に垂直な平面と回転体 V との共通部分である平面図形の面積を $S(t)$ とおく。この関数 S は a から b まで積分可能であるとする。

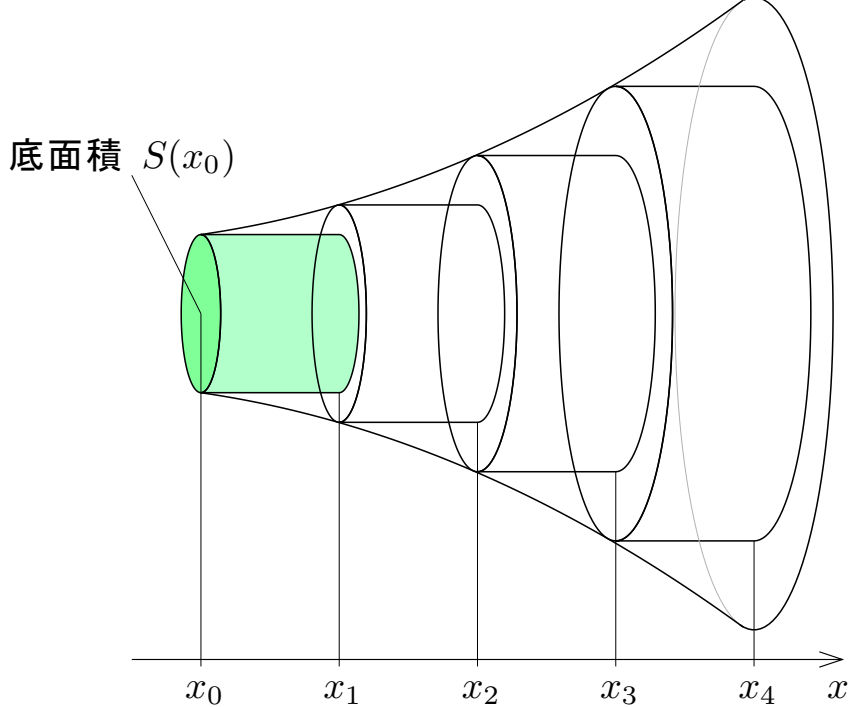
共通部分の面積 $S(t)$



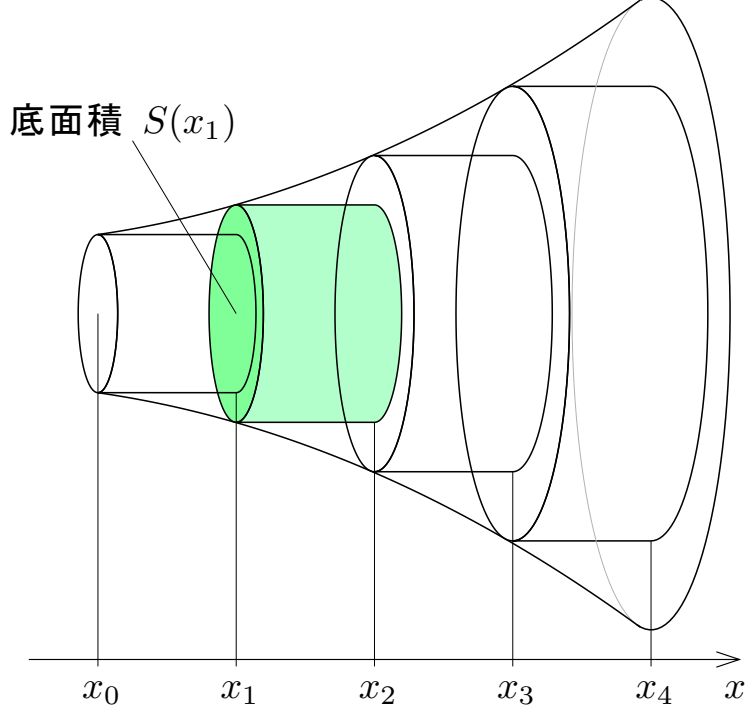
回転体 V を円盤を併せた立体で
近似する.

$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 = b$
となる実数 x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 をと
る. そして, 右図のような, 薄緑色
の 4 枚の円盤を併せた立体の体積
で回転体 V の体積を近似する.

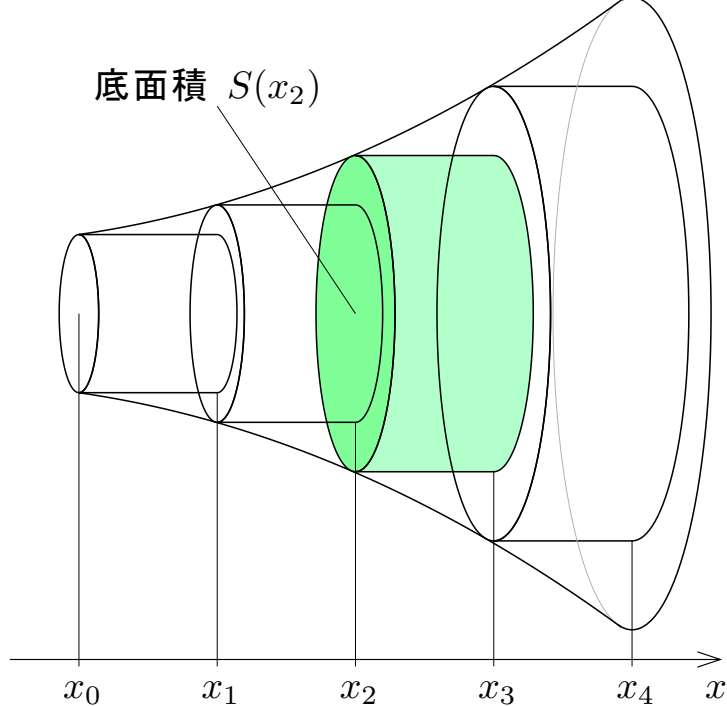




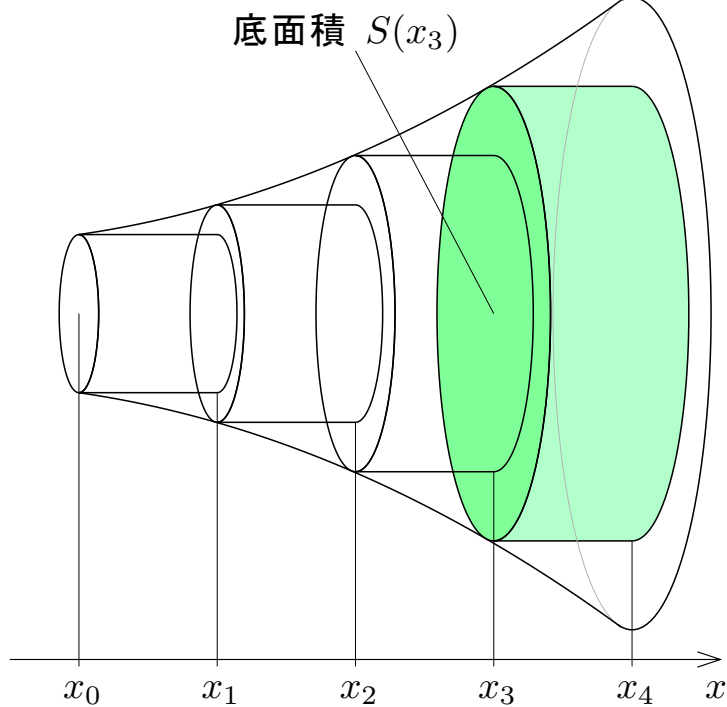
左から 1 番目の円盤（薄緑色の円盤）の体積は $S(x_0)(x_1 - x_0)$ である.



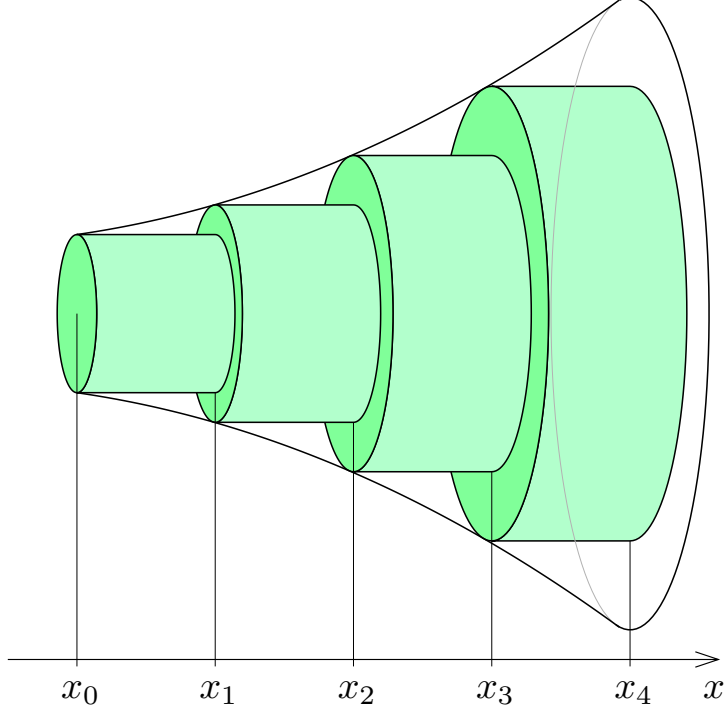
左から 2 番目の円盤（薄緑色の円盤）の体積は $S(x_1)(x_2 - x_1)$ である.



左から 3 番目の円盤 (薄緑色の円盤) の体積は $S(x_2)(x_3 - x_2)$ である.



左から 4 番目の円盤（薄緑色の円盤）の体積は $S(x_3)(x_4 - x_3)$ である.



このような4枚の円盤を併せた立体の体積 W_4 は

$$W_4 = S(x_0)(x_1 - x_0) + S(x_1)(x_2 - x_1) + S(x_2)(x_3 - x_2) + S(x_3)(x_4 - x_3) .$$

このような 4 枚の円盤を併せた立体の体積 W_4 は

$$\begin{aligned} W_4 &= S(x_0)(x_1 - x_0) + S(x_1)(x_2 - x_1) + S(x_2)(x_3 - x_2) + S(x_3)(x_4 - x_3) \\ &= \sum_{k=1}^4 \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} . \end{aligned}$$

このような円盤を増やして個々の円盤を薄くしていく.

このような円盤を増やして個々の円盤を薄くしていく.

正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとり, 関数 $S(x)$ のリーマン和

$$W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$$

を考える.

このような円盤を増やして個々の円盤を薄くしていく.

正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとり, 関数 $S(x)$ のリーマン和

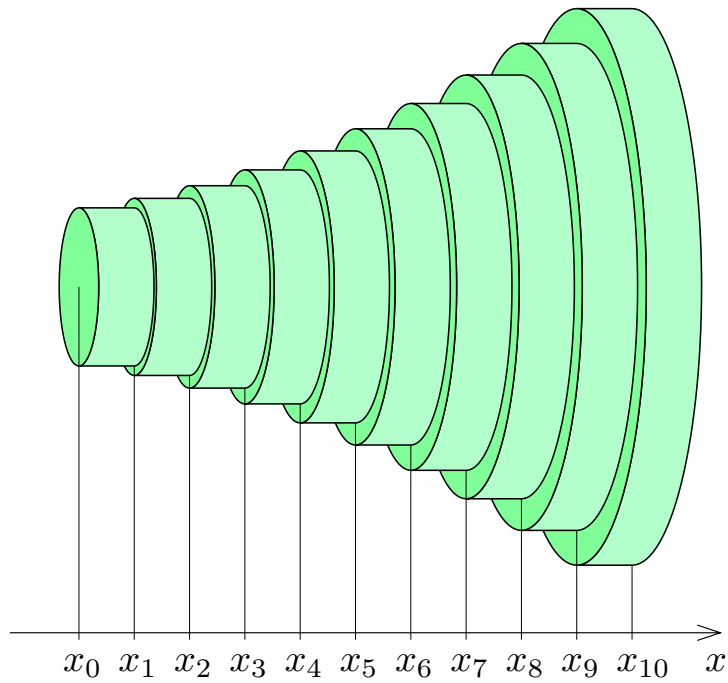
$$W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$$

を考える.

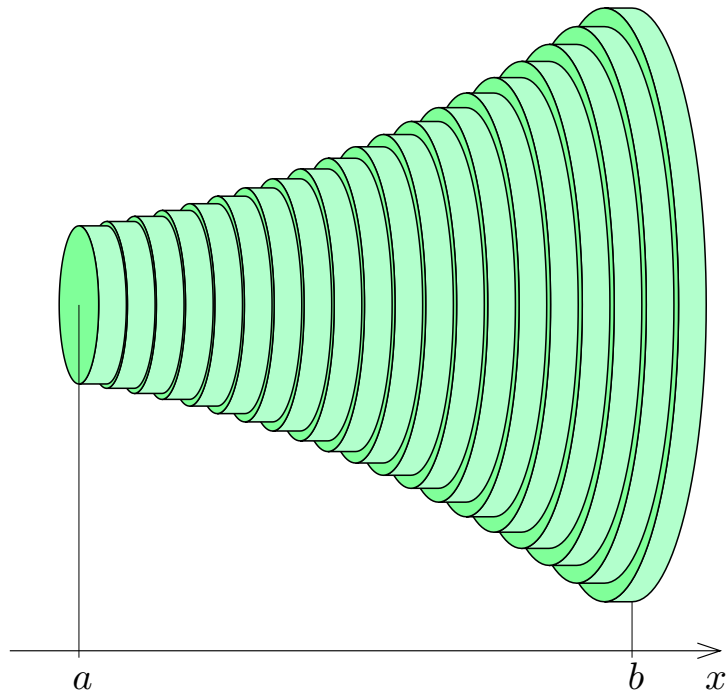
$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

について, $n \rightarrow \infty$ のとき $\delta_n \rightarrow 0$ とする. つまり, $n \rightarrow \infty$ のとき $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ の間隔は 0 に限りなく近づくとする.

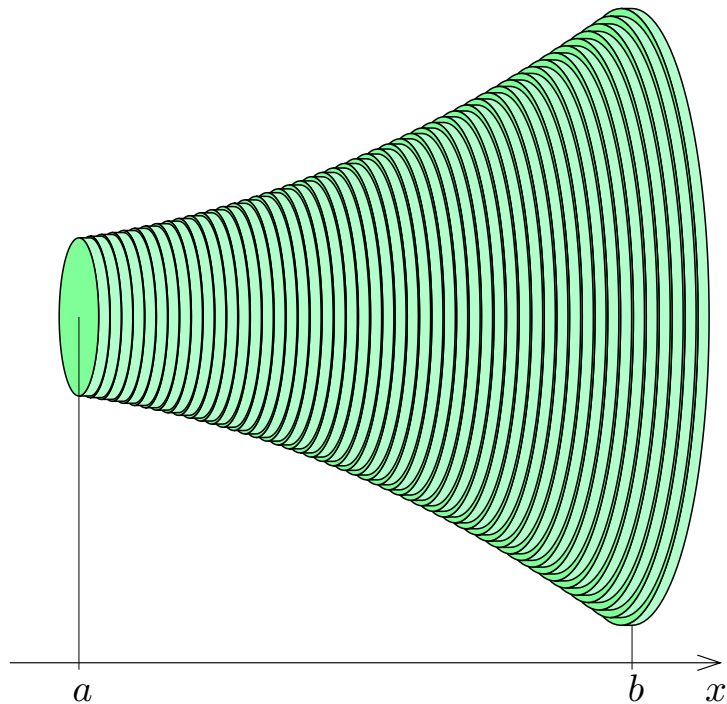
下図の 10 枚の円板を併せた立体の体積は $W_{10} = \sum_{k=1}^{10} \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$.



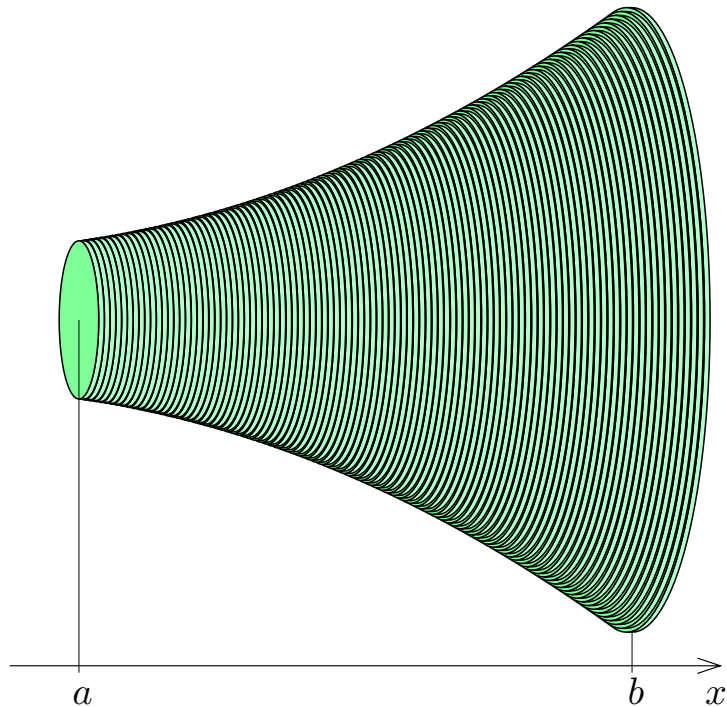
下図の 20 枚の円板を併せた立体の体積は $W_{20} = \sum_{k=1}^{20} \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$.



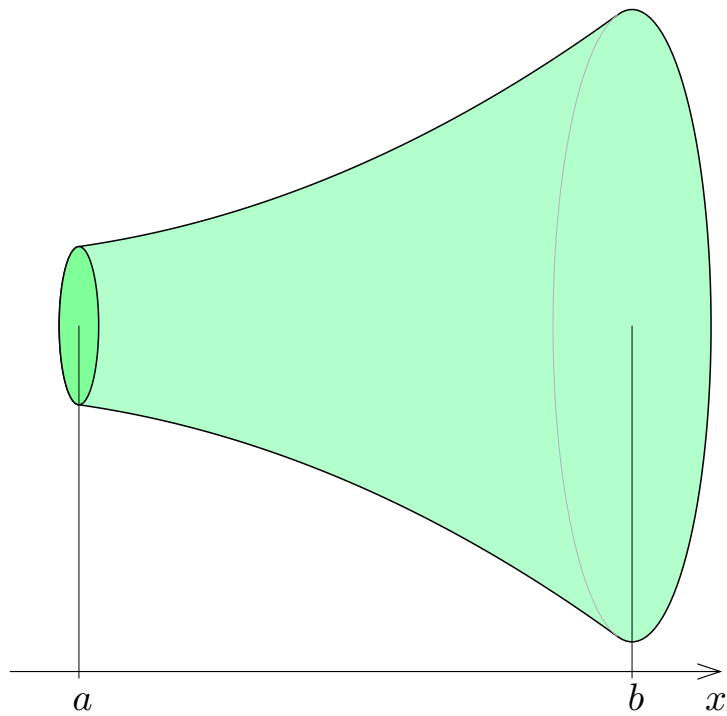
下図の 50 枚の円板を併せた立体の体積は $W_{50} = \sum_{k=1}^{50} \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$.

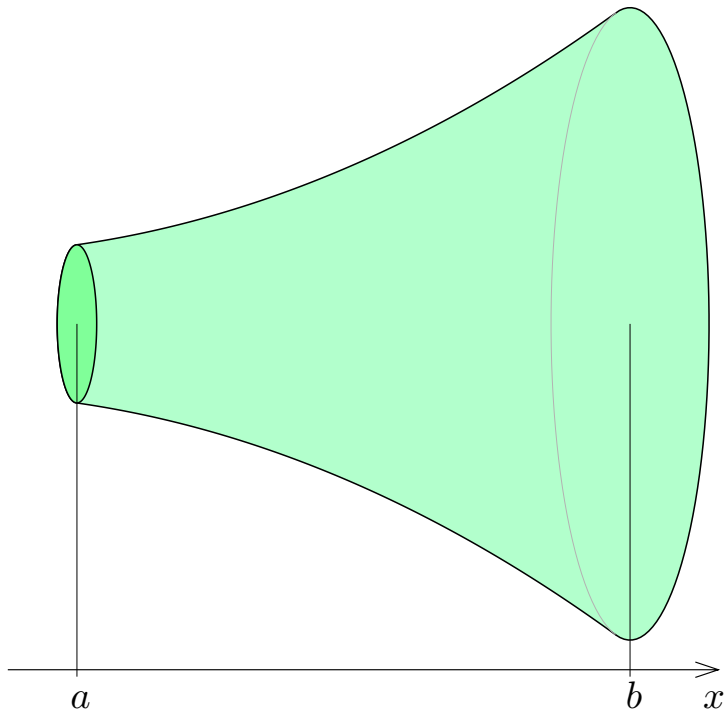


下図の 100 枚の円板を併せた立体の体積は $W_{100} = \sum_{k=1}^{100} \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$.



円板の枚数 n を限りなく増やして各円盤を限りなく薄くすると，円盤を併せた立体の体積 W_n は回転体 V の体積に限りなく近づく。





回転体 V の体積は円盤を併せた立体の体積 W_n の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ である.

このような n 枚の円盤を併せた図形の体積 $W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ は関数 $S(x)$ のリーマン和である.

このような n 枚の円盤を併せた図形の体積 $W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ は関数 $S(x)$ のリーマン和である. 回転体 V の体積は関数 $S(x)$ のリーマン和 $W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ である.

このような n 枚の円盤を併せた図形の体積 $W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ は関数 $S(x)$ のリーマン和である. 回転体 V の体積は関数 $S(x)$ のリーマン和 $W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ である. 関数 $S(x)$ は a から b まで積分可能である. $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ なので, 関数 $S(x)$ のリーマン和 $W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき定積分 $\int_a^b S(x) dx$ に収束する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = \int_a^b S(x) dx .$$

このような n 枚の円盤を併せた図形の体積 $W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ は関数 $S(x)$ のリーマン和である。回転体 V の体積は関数 $S(x)$ のリーマン和 $W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ である。関数 $S(x)$ は a から b まで積分可能である。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ なので、関数 $S(x)$ のリーマン和 $W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき定積分 $\int_a^b S(x) dx$ に収束する：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = \int_a^b S(x) dx .$$

故に、回転体 V の体積は関数 $S(x)$ の定積分 $\int_a^b S(x) dx$ である。

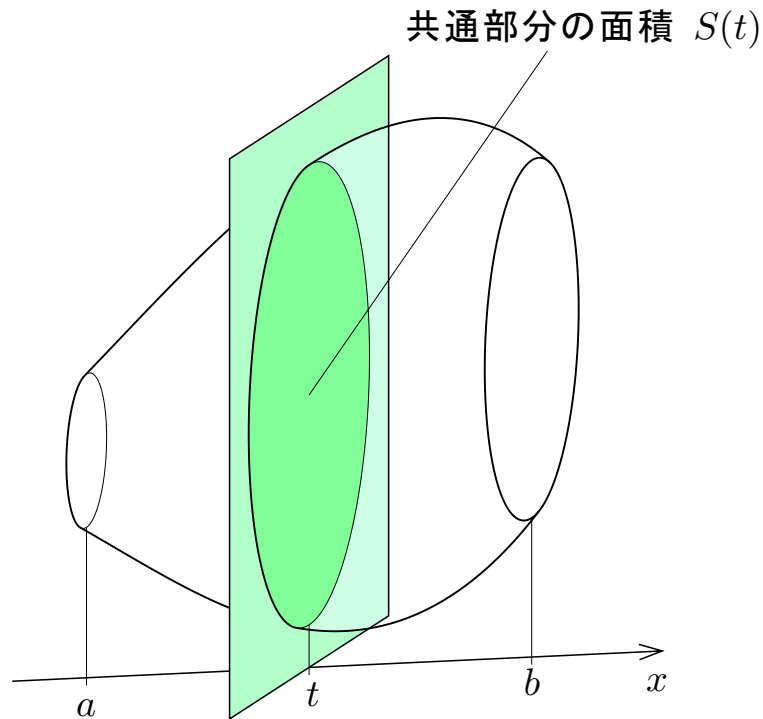
このような n 枚の円盤を併せた図形の体積 $W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ は関数 $S(x)$ のリーマン和である。回転体 V の体積は関数 $S(x)$ のリーマン和 $W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ である。関数 $S(x)$ は a から b まで積分可能である。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ なので、関数 $S(x)$ のリーマン和 $W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき定積分 $\int_a^b S(x) dx$ に収束する：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = \int_a^b S(x) dx .$$

故に、回転体 V の体積は関数 $S(x)$ の定積分 $\int_a^b S(x) dx$ である。

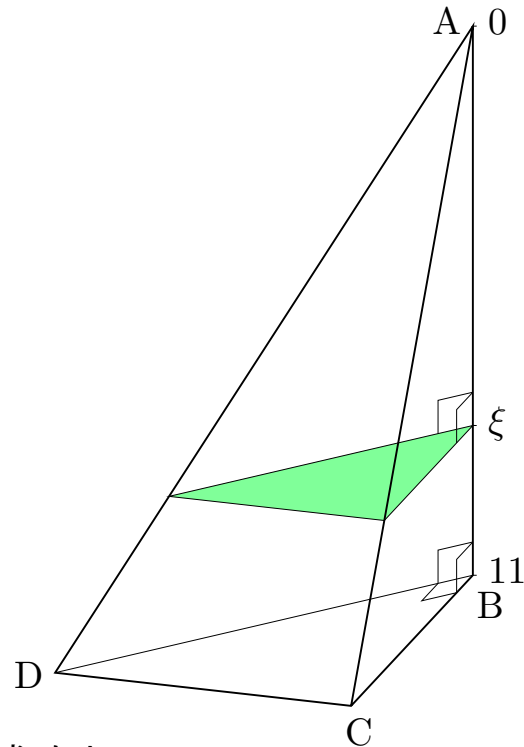
このようにして次の定理が成り立つ。

定理 立体図形 V に対して x 座標軸が設定されているとする.
 V に属す点の x 座標のうち, 最小値を a とおき, 最大値を b とおく.
区間 $[a, b]$ の各実数 t に対して, x 軸の座標 t の点
が属す x 軸に垂直な平面と V との
共通部分の面積を $S(t)$ とおく;
この関数 S は a から b まで積分可能であるとする.
このとき, 立体図形 V の体積は $\int_a^b S(t) dt$ である.



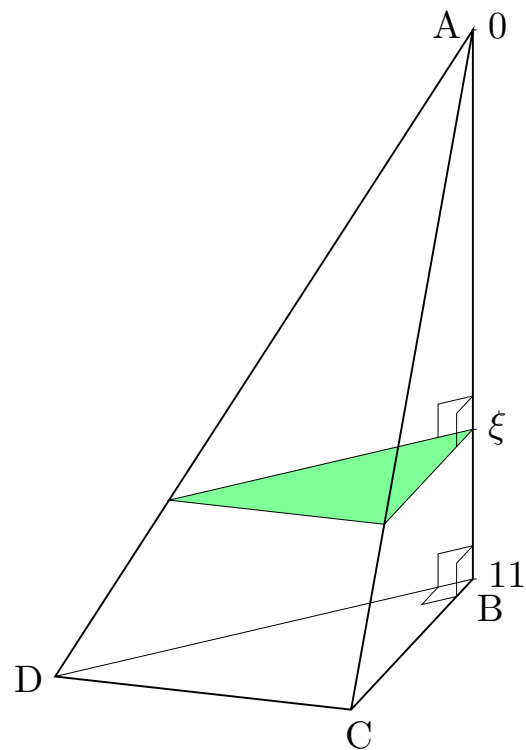
問8.4.1 空間内の4点 A, B, C, D を頂点とする三角錐 $ABCD$ において、角 ABC, ABD, CBD は直角である。 $\overline{AB} = 11$, $\overline{BC} = 5$, $\overline{BD} = 8$ とする。この三角錐の体積を考える。直角三角形 BCD を底面とする。頂点 A を原点とし、頂点 A から頂点 B への向きに座標軸をとる。この座標軸上で座標が ξ の点を切片とする座標軸に垂直な平面と三角錐 $ABCD$ との共通部分（右図の明緑色の部分）と直角三角形 BCD とは相似であり、相似比は $\xi : 11$ で、面積の比は $\xi^2 : 11^2$ である。

(1) 座標が ξ の点を切片とする座標軸に垂直な平面と三角錐 $ABCD$ との共通部分の面積を求めよ。

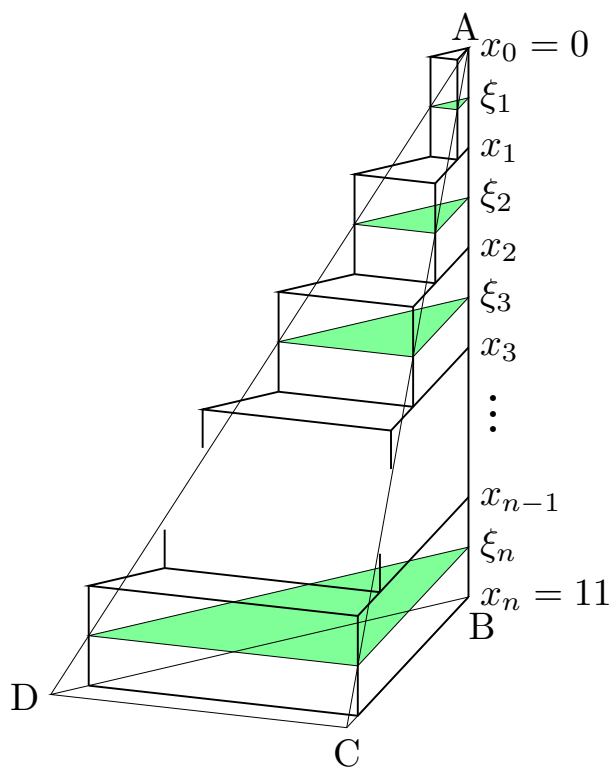


共通部分の面積は三角錐の底面と相似な
直角三角形であり、直角を挟む2辺の長さは
 $\frac{5\xi}{11}$ と $\frac{8\xi}{11}$ とである；よってその面積は

$$\frac{1}{2} \times \frac{5\xi}{11} \times \frac{8\xi}{11} = \frac{20\xi^2}{11^2} .$$



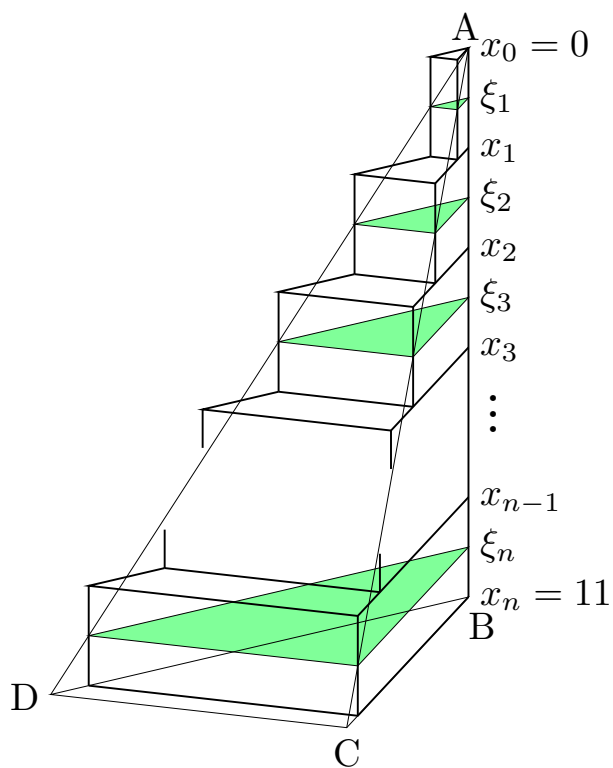
(2) 変数 n を正の自然数を表すとする.
 $0 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 11$ である実数
 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数
 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ に対して, 右図のよう
 に三角錐 ABCD を n 個の直三角柱 (側
 面は底面及び上面と垂直) を併せた立体
 で近似する: この体積 S_n を表す式を記
 せ. またこの式を何というか記せ.



(2) 変数 n を正の自然数を表すとする。
 $0 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 11$ である実数
 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数
 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ に対して, 右図のよう
 に三角錐 ABCD を n 個の直三角柱 (側
 面は底面及び上面と垂直) を併せた立体
 で近似する: この体積 S_n を表す式を記
 せ. またこの式を何というか記せ.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{20\xi_k^2}{11^2} (x_k - x_{k-1}) \right\} .$$

これは関数 $\frac{20}{11^2}x^2$ のリーマン和である.



(3)

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

について $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ とする；つまり

$n \rightarrow \infty$ のとき $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$

の間隔は総て 0 に近づくとする． $n \rightarrow \infty$

のとき薄い三角柱を併せた立体の体積 S_n

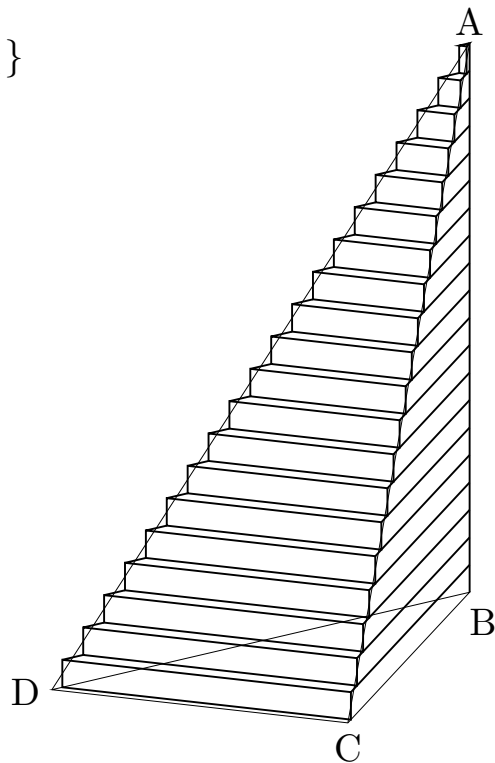
は右図のように三角錐 ABCD の体積に限り

なく近づく；つまり S_n の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

が三角錐 ABCD の体積である．このことを

用いて，定積分によって三角錐 ABCD の体

積を求めよ．



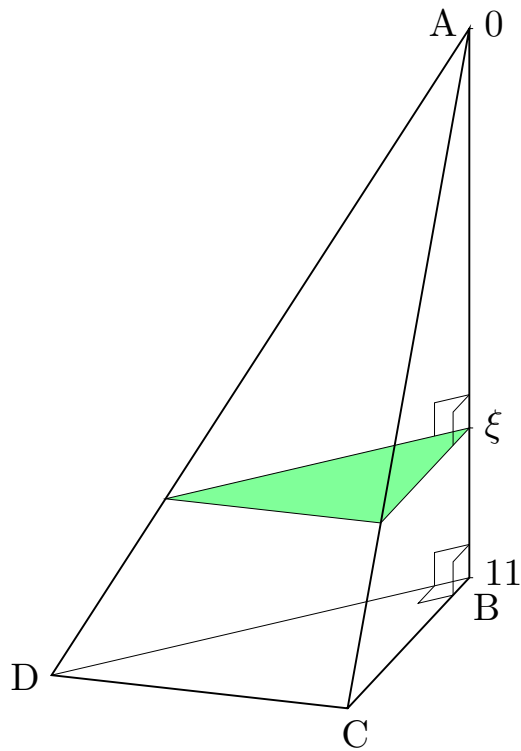
$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ なので, $n \rightarrow \infty$ のと

き関数 $\frac{20}{11^2}x^2$ のリーマン和 S_n は定積

分 $\int_0^{11} \frac{20}{11^2}x^2 dx$ に収束する. 三角錐

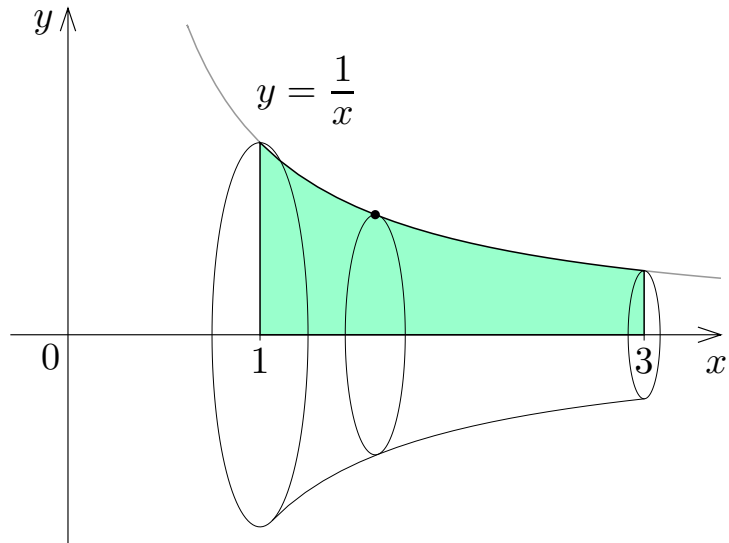
ABCD の体積は

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \int_0^{11} \frac{20}{11^2}x^2 dx \\ &= \frac{20}{11^2} \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^{11} \\ &= \frac{20}{11^2} \cdot \frac{1}{3}11^3 \\ &= \frac{220}{3} .\end{aligned}$$



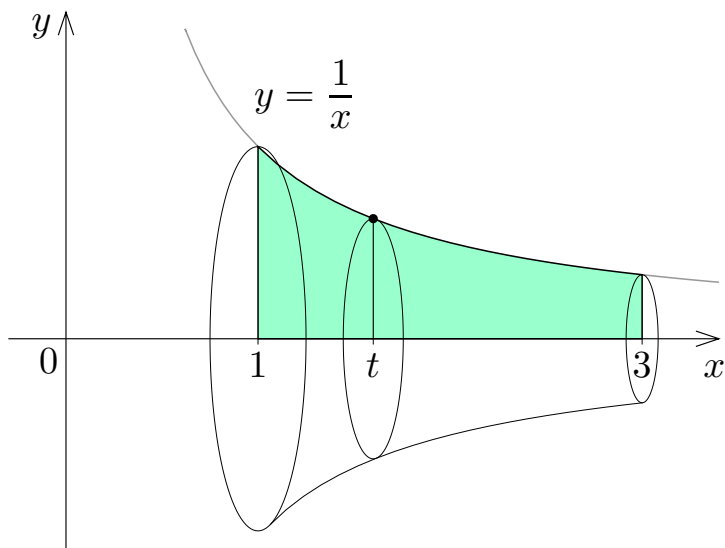
例 xy 座標平面において不等式 $1 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$ との連立で表される平面領域を考える. 3次元空間においてこの平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求める.

例 xy 座標平面において不等式 $1 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$ との連立で表される平面領域を考える. 3次元空間においてこの平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求める.



例 xy 座標平面において不等式 $1 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$ との連立で表される平面領域を考える. 3次元空間においてこの平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求める.

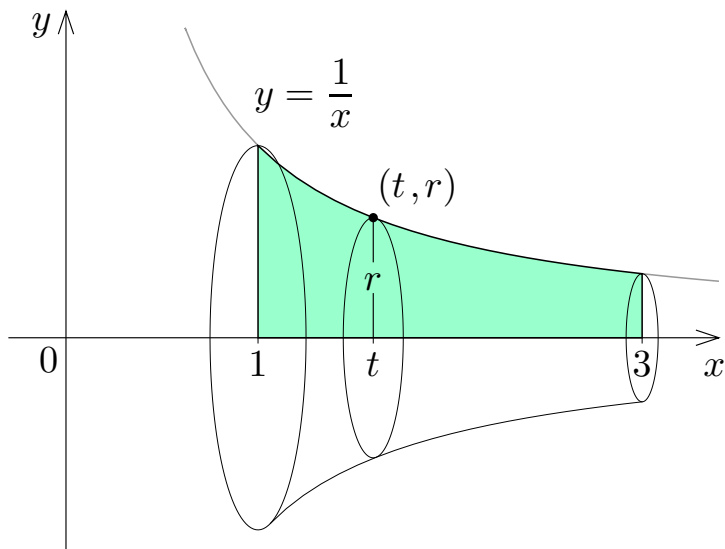
与えられた回転体を V とおく.
区間 $[1, 3]$ の各実数 t に対して,
 x 軸の座標 t の点を含み x 軸に垂直な平面と V をとの共通部分は円である;



例 xy 座標平面において不等式 $1 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$ との連立で表される平面領域を考える. 3次元空間においてこの平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求める.

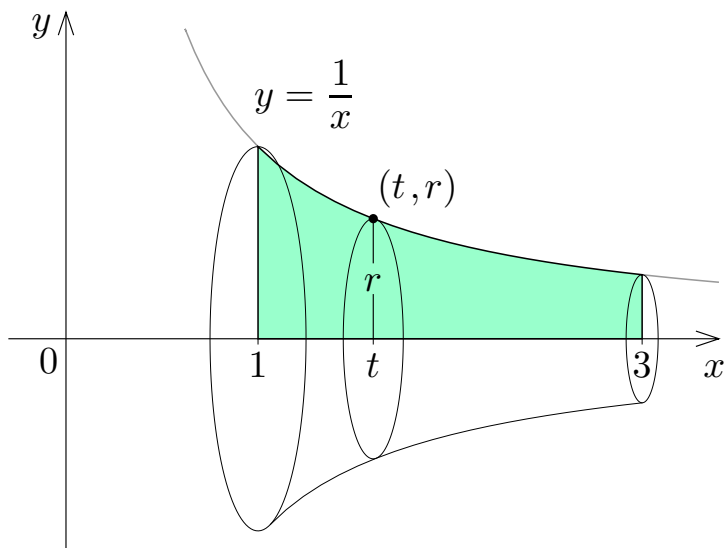
与えられた回転体を V とおく.
 区間 $[1, 3]$ の各実数 t に対して,
 x 軸の座標 t の点を含み x 軸に垂直な平面と V をとの共通部分は円である; その半径を r とおくと,
 xy 座標平面において点 (t, r) は $y = \frac{1}{x}$ のグラフに属するので,

$r =$;



例 xy 座標平面において不等式 $1 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$ との連立で表される平面領域を考える. 3次元空間においてこの平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求める.

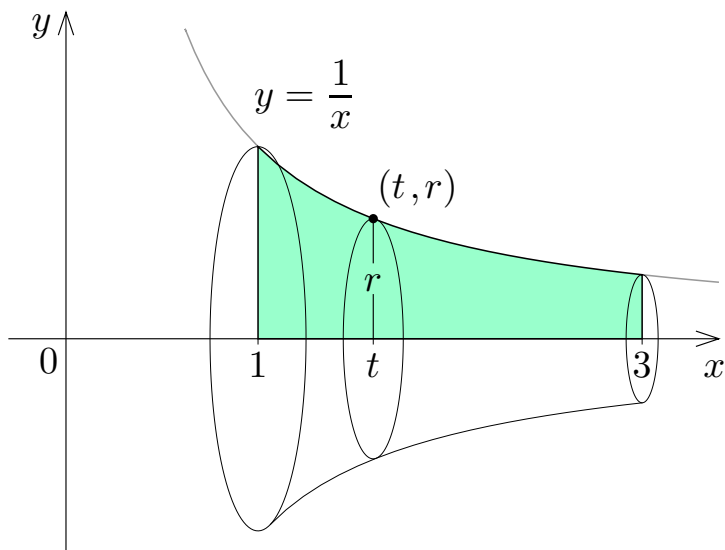
与えられた回転体を V とおく.
 区間 $[1, 3]$ の各実数 t に対して,
 x 軸の座標 t の点を含み x 軸に垂直な平面と V をとの共通部分は円である; その半径を r とおくと,
 xy 座標平面において点 (t, r) は $y = \frac{1}{x}$ のグラフに属するので,
 $r = \frac{1}{t}$;



例 xy 座標平面において不等式 $1 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$ との連立で表される平面領域を考える. 3次元空間においてこの平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求める.

与えられた回転体を V とおく.
 区間 $[1, 3]$ の各実数 t に対して,
 x 軸の座標 t の点を含み x 軸に垂直な平面と V をとの共通部分は円である; その半径を r とおくと,
 xy 座標平面において点 (t, r) は $y = \frac{1}{x}$ のグラフに属するので,
 $r = \frac{1}{t}$; よって, 共通部分の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi r^2 = \pi \left(\frac{1}{t}\right)^2 = \frac{\pi}{t^2} .$$



従って、回転体 V の体積は、

$$\begin{aligned}\int_1^3 S(t) dt &= \int_1^3 \frac{\pi}{t^2} dt = \pi \int_1^3 t^{-2} dt = \pi [-t^{-1}]_1^3 = -\pi \left[\frac{1}{t} \right]_1^3 = -\pi \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \\ &= \frac{2\pi}{3} .\end{aligned}$$

終

問8.4.2 xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq e^x - 1$ とで表される平面領域を考える. 3次元空間においてこの平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求めよ.

与えられた回転体を V とおく. 区間 $[0, 3]$ の各実数 t に対して, x 軸の座標 t の点を含み x 軸に垂直な平面と V との共通部分は円である; その半径を r とおくと, xy 座標平面において点 (t, r) は $y = e^x - 1$ のグラフに属するので, $r =$; よって, この共通部分の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi r^2 = \pi()^2 .$$

従って, 回転体 V の体積は,

$$\int_0^3 S(t) dt = \int_0^2 dt =$$

問8.4.2 xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq e^x - 1$ とで表される平面領域を考える. 3次元空間においてこの平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求めよ.

与えられた回転体を V とおく. 区間 $[0, 3]$ の各実数 t に対して, x 軸の座標 t の点を含み x 軸に垂直な平面と V との共通部分は円である; その半径を r とおくと, xy 座標平面において点 (t, r) は $y = e^x - 1$ のグラフに属するので, $r = e^t - 1$; よって, この共通部分の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi r^2 = \pi(e^t - 1)^2 .$$

従って, 回転体 V の体積は,

$$\int_0^3 S(t) dt = \int_0^3 \pi(e^t - 1)^2 dt =$$

問8.4.2 xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq e^x - 1$ とで表される平面領域を考える. 3次元空間においてこの平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求めよ.

与えられた回転体を V とおく. 区間 $[0, 3]$ の各実数 t に対して, x 軸の座標 t の点を含み x 軸に垂直な平面と V との共通部分は円である; その半径を r とおくと, xy 座標平面において点 (t, r) は $y = e^x - 1$ のグラフに属するので, $r = e^t - 1$; よって, この共通部分の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi r^2 = \pi(e^t - 1)^2 .$$

従って, 回転体 V の体積は,

$$\begin{aligned} \int_0^3 S(t) dt &= \int_0^3 \pi(e^t - 1)^2 dt = \pi \int_0^3 (e^{2t} - 2e^t + 1) dt \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} e^{2t} - 2e^t + t \right]_0^3 = \pi \left(\frac{1}{2} e^6 - 2e^3 + 3 - \frac{1}{2} + 2 \right) \\ &= \pi \left(\frac{e^6 + 9}{2} - 2e^3 \right) . \end{aligned}$$

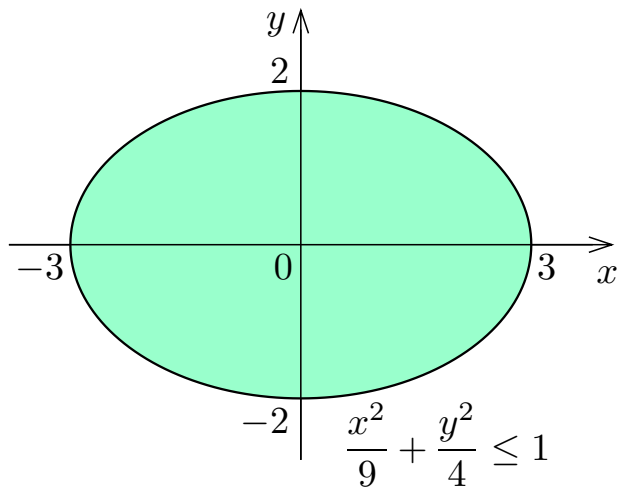
終

例 xy 座標平面において不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ が表す平面領域を, 3次元空間において x 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求める.

例 xy 座標平面において不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ が表す平面領域を、3次元空間において x 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求める。

不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ が表す平面

領域は、方程式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ が表す楕円の境界と内部とを併せた領域である。



例 xy 座標平面において不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ が表す平面領域を、3次元空間において x 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求める。

不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ が表す平面

領域は、方程式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ が表す

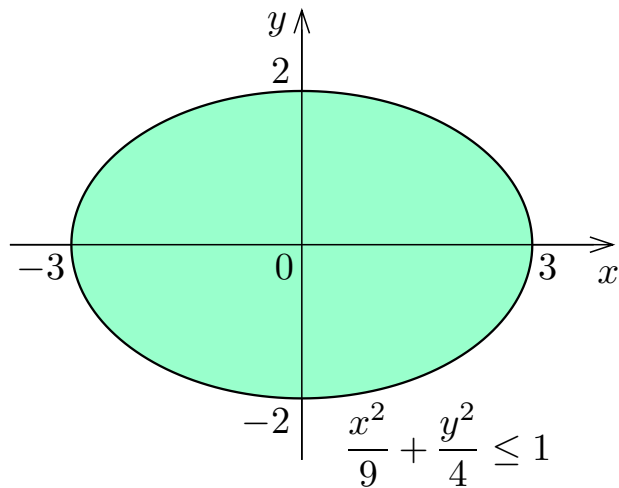
楕円の境界と内部とを併せた領域で

ある。この領域の点 (x, y) について、

$1 - \frac{x^2}{9} \geq \frac{y^2}{4} \geq 0$ なので、 $x^2 \leq 9$ 、

$x^2 - 9 \leq 0$ 、 $(x+3)(x-3) \leq 0$ 、

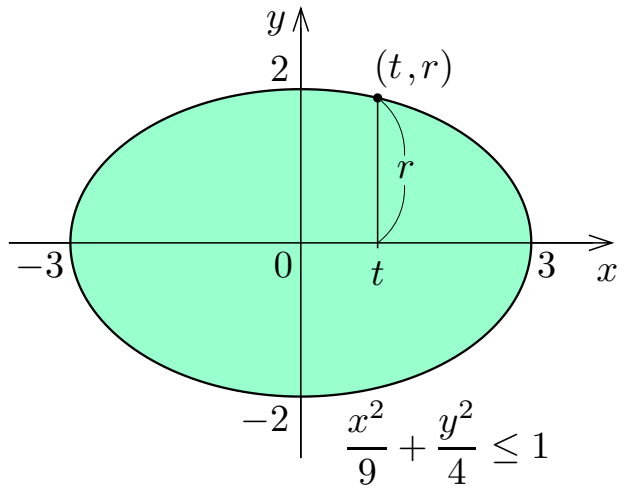
$-3 \leq x \leq 3$ 。



区間 $[-3, 3]$ の各実数 t に対して, x 軸の座標 t の点が属し x 軸に垂直な平面と V との共通部分は円である; その半径を r とおくと, xy 座標平面において点 (t, r) は楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

に属するので $\frac{t^2}{9} + \frac{r^2}{4} = 1$, よって

$$r^2 = 4 - \frac{4}{9}t^2 ;$$



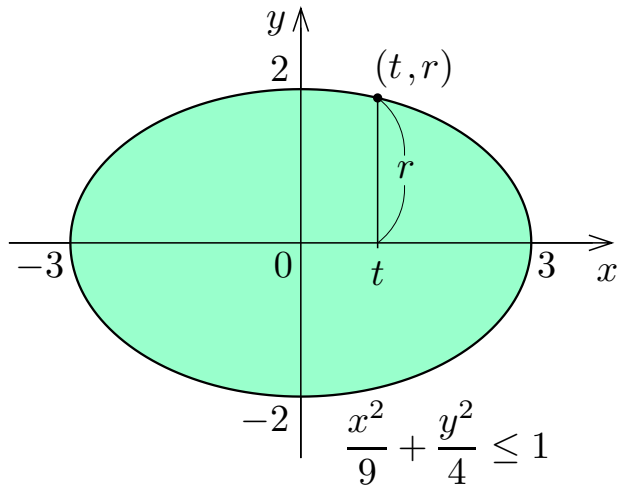
区間 $[-3, 3]$ の各実数 t に対して, x 軸の座標 t の点が属し x 軸に垂直な平面と V との共通部分は円である; その半径を r とおくと, xy 座標平面において点 (t, r) は楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

に属するので $\frac{t^2}{9} + \frac{r^2}{4} = 1$, よって

$$r^2 = 4 - \frac{4}{9}t^2 ;$$

共通部分の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi r^2 = \pi \left(4 - \frac{4}{9}t^2 \right) .$$



区間 $[-3, 3]$ の各実数 t に対して, x 軸の座標 t の点 が属し x 軸に垂直な平面と V との共通部分は円である; その半径を r とおくと, xy 座標平面において点 (t, r) は楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

に属するので $\frac{t^2}{9} + \frac{r^2}{4} = 1$, よって

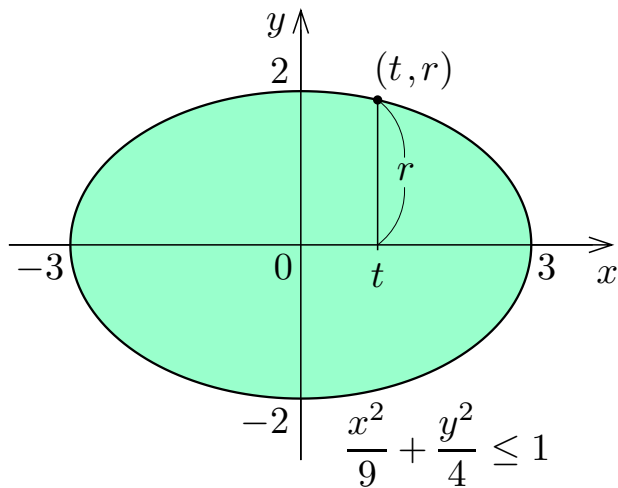
$$r^2 = 4 - \frac{4}{9}t^2 ;$$

共通部分の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi r^2 = \pi \left(4 - \frac{4}{9}t^2 \right) .$$

故に回転体 V の体積は,

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 S(t) dt &= \int_{-3}^3 \pi \left(4 - \frac{4}{9}t^2 \right) dt = \pi \left[4t - \frac{4}{27}t^3 \right]_{-3}^3 = \pi \left\{ 3 - \frac{27}{27} - \left(-3 - \frac{27}{27} \right) \right\} \\ &= 16\pi . \end{aligned}$$



問8.4.3 xy 座標平面において不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ が表す平面領域を, 3次元空間において y 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求めよ.

不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ が表す平面領域

は方程式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ が表す楕円の境界と内部とを併せた領域である. この領域

の点 (x, y) について, $1 - \frac{y^2}{4} \geq \frac{x^2}{9} \geq 0$

なので, $y^2 \leq 4$, $y^2 - 4 \leq 0$,

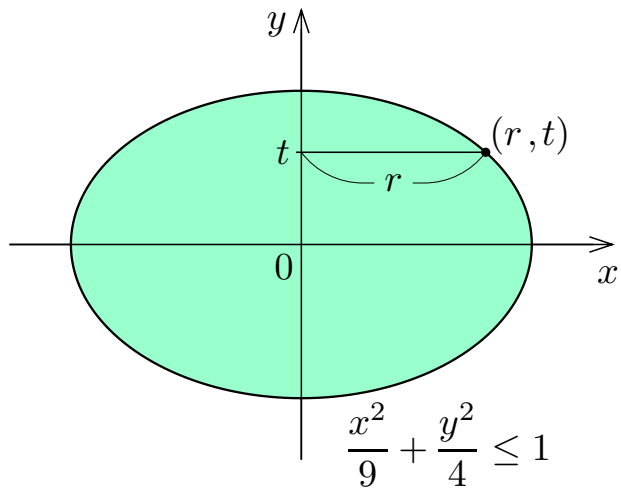
$(y+2)(y-2) \leq 0$, $-2 \leq y \leq 2$. 区間

$[-2, 2]$ の各実数 t に対して, y 軸の座標

t の点が属し y 軸に垂直な平面と V との

共通部分は円である; その半径を r とおくと, xy 座標平面において点 (r, t)

は楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ に属するので, $\frac{r^2}{9} + \frac{t^2}{4} = 1$, $r^2 = 9\left(1 - \frac{t^2}{4}\right)$.



問8.4.3 xy 座標平面において不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ が表す平面領域を, 3次元空間において y 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求めよ.

不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ が表す平面領域

は方程式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ が表す楕円の境界と内部とを併せた領域である. この領域

の点 (x, y) について, $1 - \frac{y^2}{4} \geq \frac{x^2}{9} \geq 0$

なので, $y^2 \leq 4$, $y^2 - 4 \leq 0$,

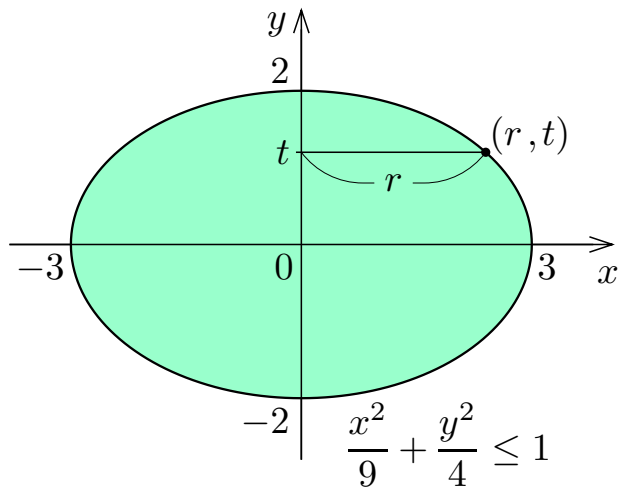
$(y+2)(y-2) \leq 0$, $-2 \leq y \leq 2$. 区間

$[-2, 2]$ の各実数 t に対して, y 軸の座標

t の点が属し y 軸に垂直な平面と V との

共通部分は円である; その半径を r とおくと, xy 座標平面において点 (r, t)

は楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ に属するので, $\frac{r^2}{9} + \frac{t^2}{4} = 1$, $r^2 = 9 - \frac{9}{4}t^2$.

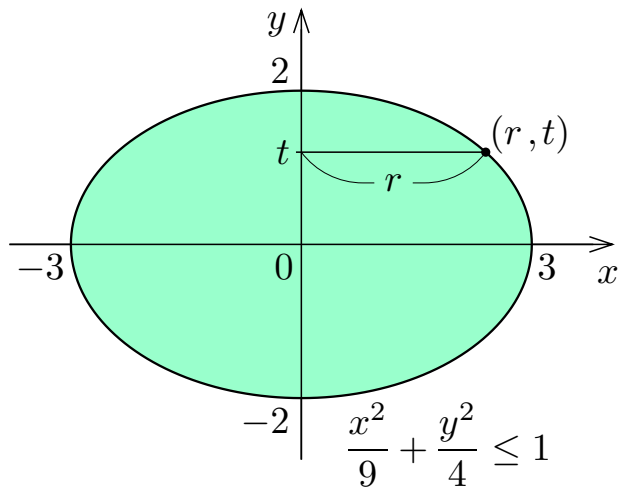


y 軸の座標 t の点 が 属し y 軸に垂直な平面と V との共通部分である円について、半径を r とおくと $r^2 = 9 - \frac{9}{4}t^2$ なので、面積 $S(t)$ は

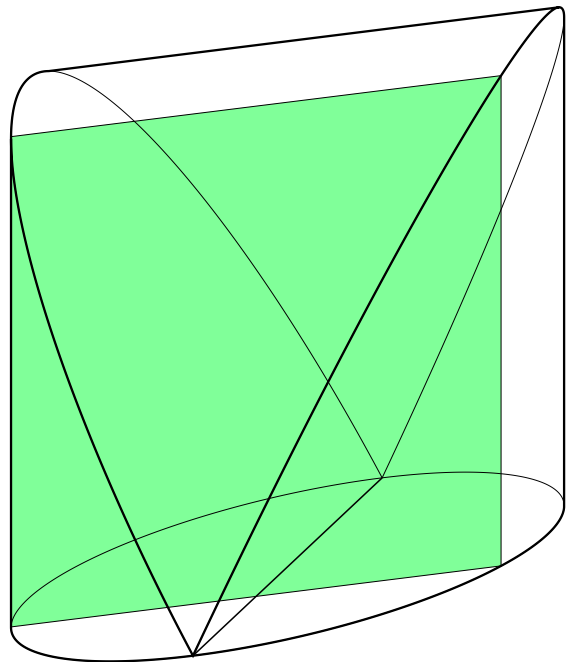
$$S(t) = \pi r^2 = \pi \left(9 - \frac{9}{4}t^2 \right) .$$

回転体 V の体積は

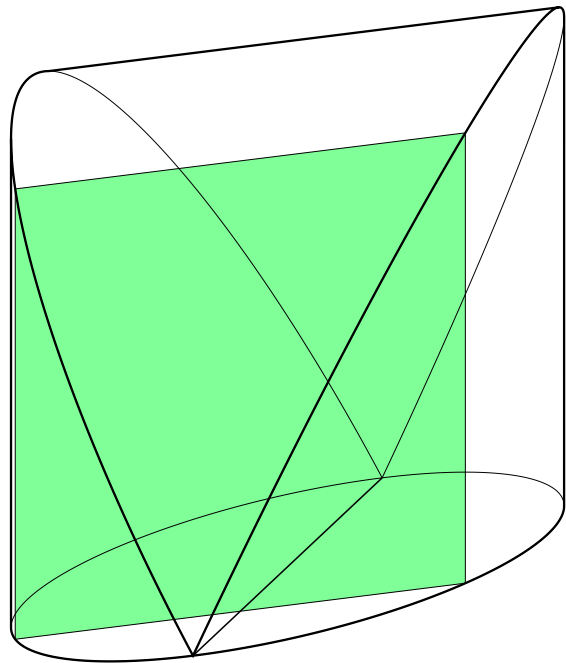
$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 S(t) dt &= \int_{-2}^2 \pi \left(9 - \frac{9}{4}t^2 \right) dt \\ &= \pi \left[9t - \frac{3}{4}t^3 \right]_{-2}^2 \\ &= 24\pi . \end{aligned}$$



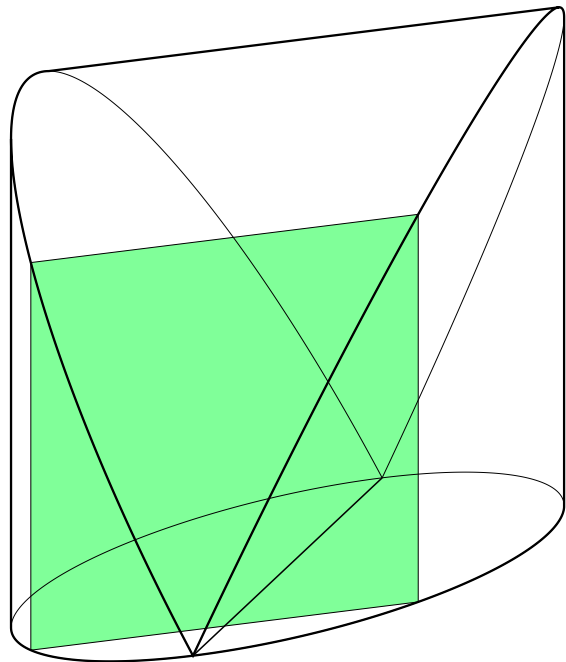
例 立体図形 V の底面は半径が r である円で囲まれる平面領域であり、底面の円のある直径に垂直な各平面と立体図形 V との共通部分は底辺が V の底面の円の弦である正方形で囲まれる平面領域である。



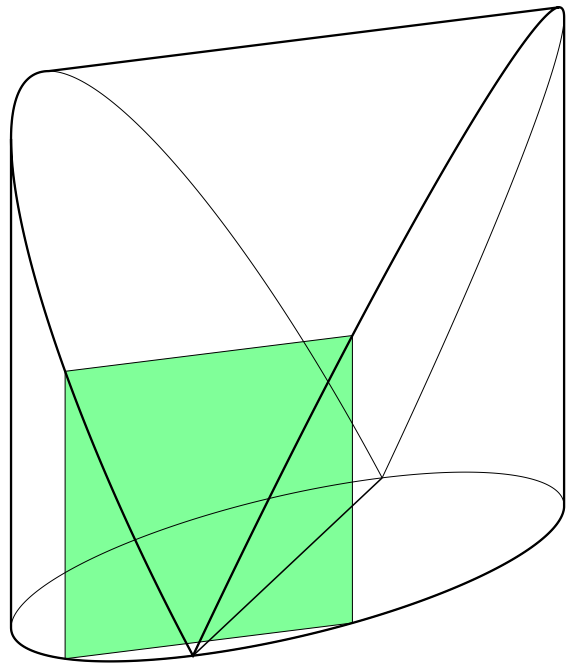
例 立体図形 V の底面は半径が r である円で囲まれる平面領域であり、底面の円のある直径に垂直な各平面と立体図形 V との共通部分は底辺が V の底面の円の弦である正方形で囲まれる平面領域である。



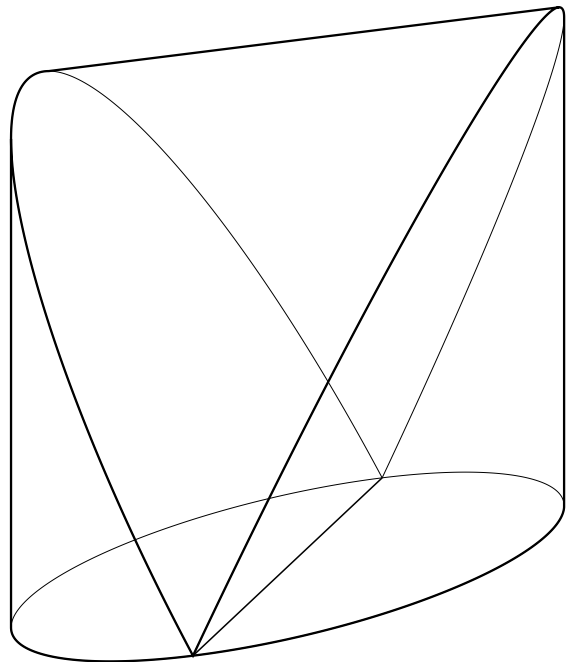
例 立体図形 V の底面は半径が r である円で囲まれる平面領域であり、底面の円のある直径に垂直な各平面と立体図形 V との共通部分は底辺が V の底面の円の弦である正方形で囲まれる平面領域である。



例 立体図形 V の底面は半径が r である円で囲まれる平面領域であり、底面の円のある直径に垂直な各平面と立体図形 V との共通部分は底辺が V の底面の円の弦である正方形で囲まれる平面領域である。

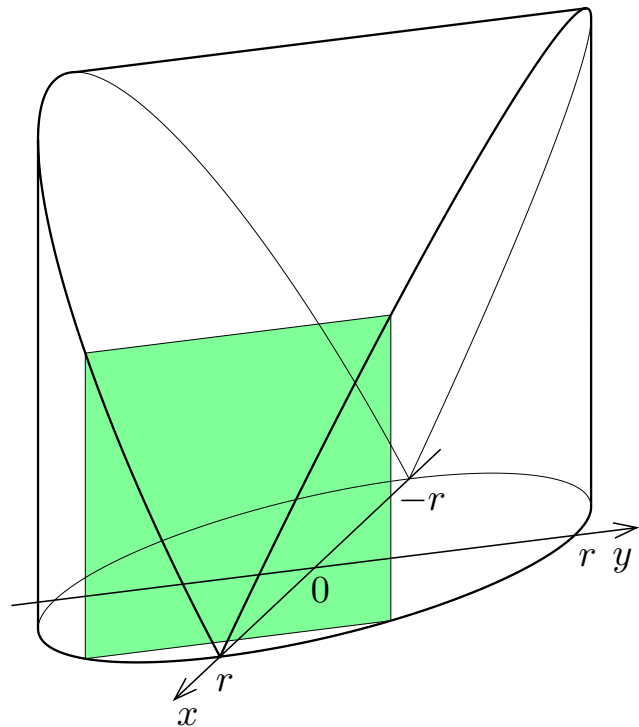


例 立体図形 V の底面は半径が r である円で囲まれる平面領域であり、底面の円のある直径に垂直な各平面と立体図形 V との共通部分は底辺が V の底面の円の弦である正方形で囲まれる平面領域である。この立体図形 V の体積を求める。

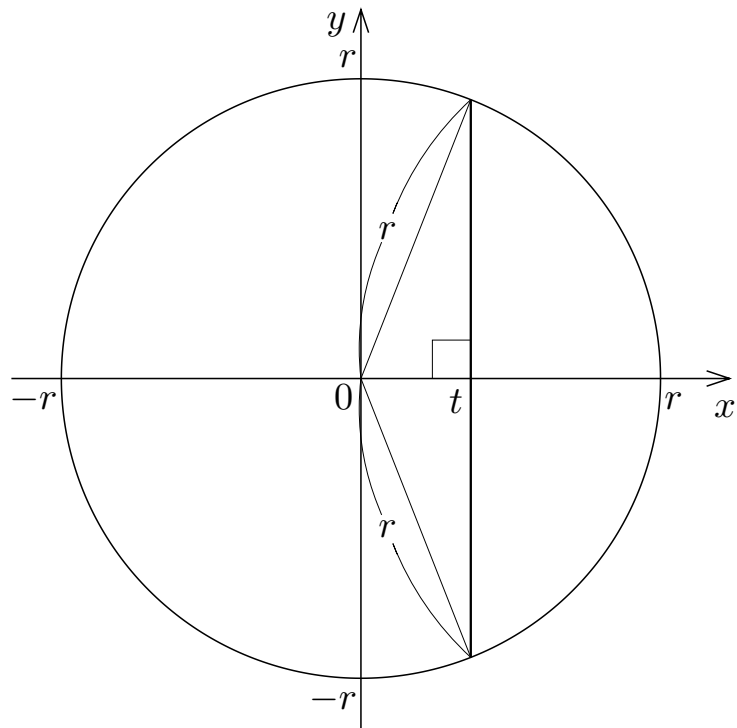


例 立体図形 V の底面は半径が r である円で囲まれる平面領域であり、底面の円のある直径に垂直な各平面と立体図形 V との共通部分は底辺が V の底面の円の弦である正方形で囲まれる平面領域である。この立体図形 V の体積を求める。

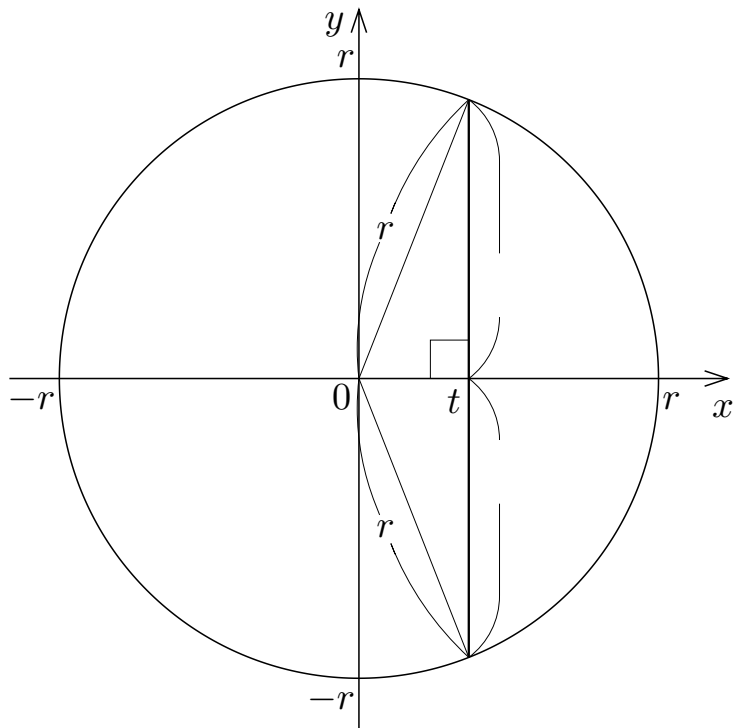
立体図形 V の底面を含む平面において底面の円の中心を原点とする xy 座標系をおく。 x 軸に垂直な各平面と立体 V との共通部分が正方形である。 V に属す点の x 座標の範囲は $-r \leq x \leq r$.



$-r \leq t \leq r$ である各実数 t に対して、 x 軸の座標が t である点が属し x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分の正方形の底辺を xy 座標平面で図示すると右図のようになる。

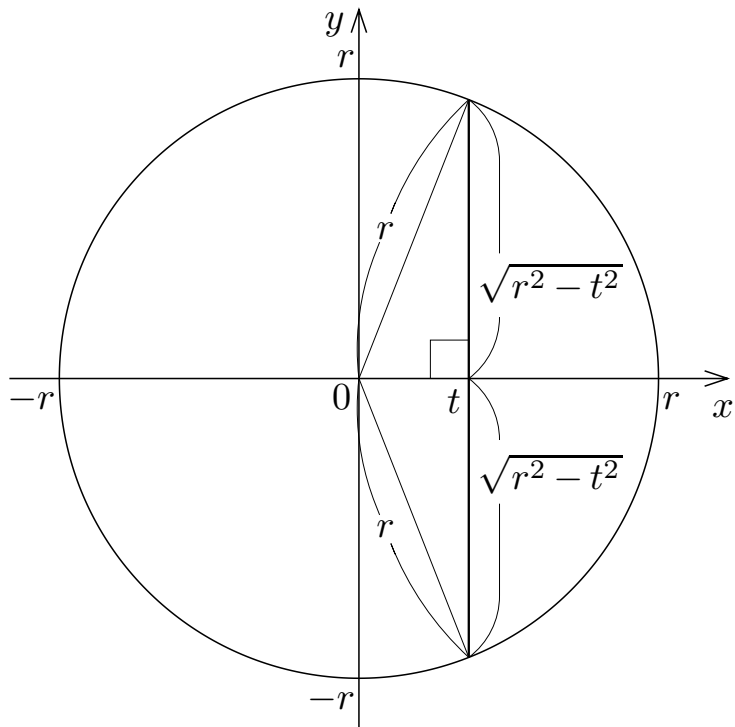


$-r \leq t \leq r$ である各実数 t に対して、 x 軸の座標が t である点が属し x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分の正方形の底辺を xy 座標平面で図示すると右図のようになる。正方形の 1 辺の長さは $\sqrt{r^2 - t^2}$ なので、正方形の面積は



$-r \leq t \leq r$ である各実数 t に対して、 x 軸の座標が t である点が属し x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分の正方形の底辺を xy 座標平面で図示すると右図のようになる。正方形の 1 辺の長さは $2\sqrt{r^2 - t^2}$ なので、正方形の面積は

$$(2\sqrt{r^2 - t^2})^2 = 4(r^2 - t^2) .$$

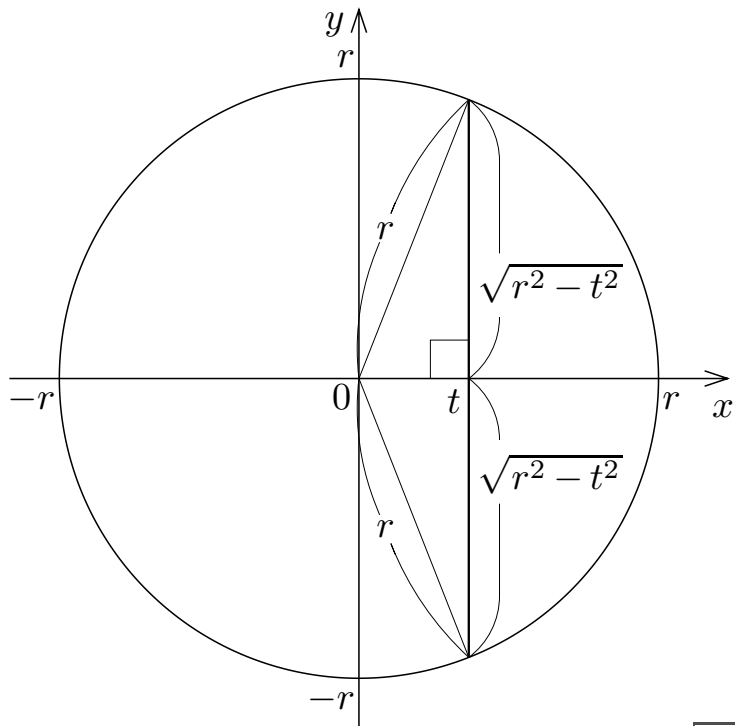


$-r \leq t \leq r$ である各実数 t に対して、 x 軸の座標が t である点が属し x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分の正方形の底辺を xy 座標平面で図示すると右図のようになる。正方形の 1 辺の長さは $2\sqrt{r^2 - t^2}$ なので、正方形の面積は

$$(2\sqrt{r^2 - t^2})^2 = 4(r^2 - t^2) .$$

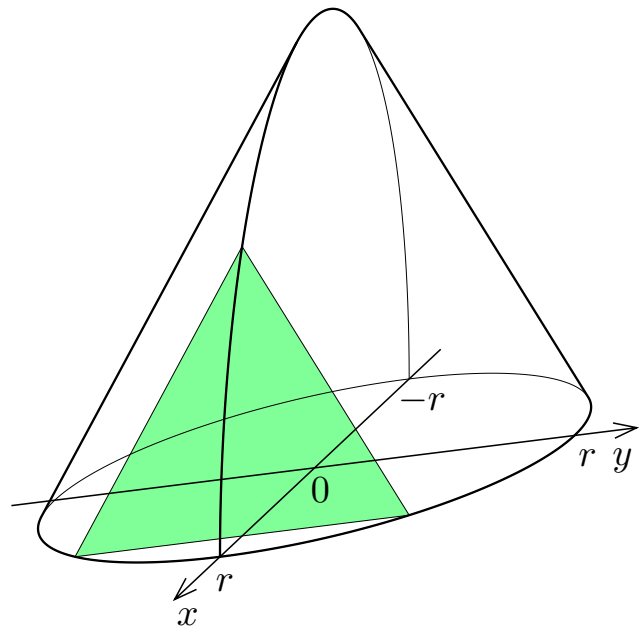
V の体積は

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r 4(r^2 - t^2) dt &= 4 \left[r^2 t - \frac{1}{3} t^3 \right]_{-r}^r \\ &= \frac{16}{3} r^3 . \end{aligned}$$

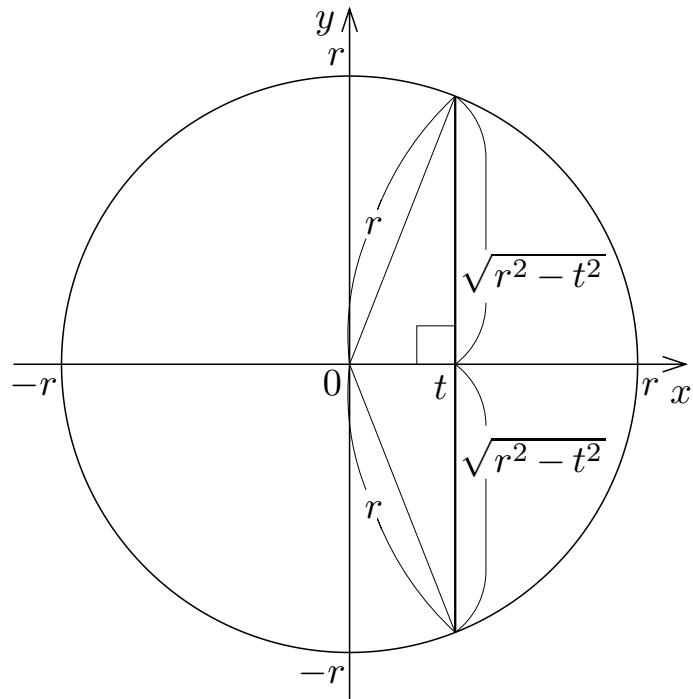


問8.4.4 立体図形 V の底面は半径が r である円で囲まれる平面領域であり、底面の円のある直径に垂直な各平面と立体図形 V との共通部分は底辺が V の底面の円の弦である正三角形で囲まれる平面領域である。この立体図形 V の体積を求めよ。

立体図形 V の底面を含む平面において底面の円の中心を原点とする xy 座標系をおく。 x 軸に垂直な各平面と立体 V との共通部分が正三角形である。 V に属す点の x 座標の範囲は $-r \leq x \leq r$.



$-r \leq t \leq r$ である各実数 t に対して、 x 軸の座標が t である点が属し x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分の正三角形の底辺を xy 座標平面で図示すると右図のようになる。正三角形の1辺の長さは $2\sqrt{r^2 - t^2}$ なので、正三角形の面積は

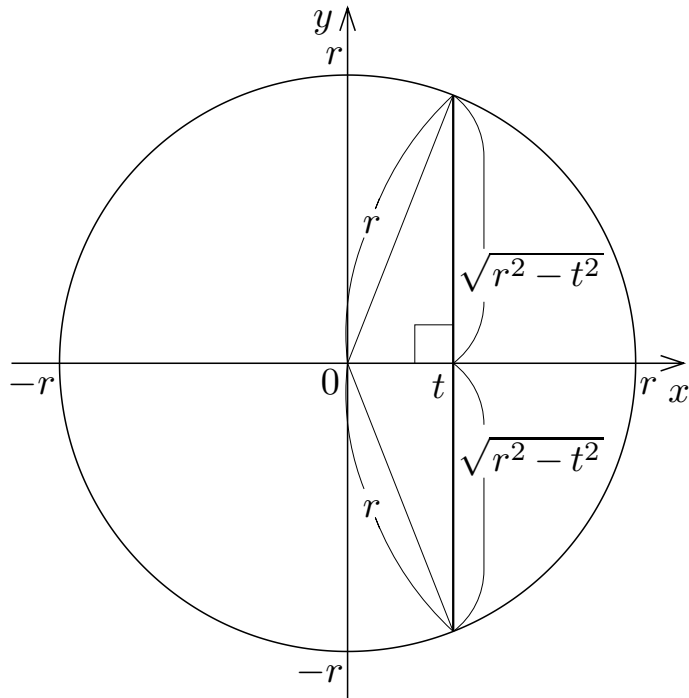


V の体積は

$-r \leq t \leq r$ である各実数 t に対して、 x 軸の座標が t である点が属し x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分の正三角形の底辺を xy 座標平面で図示すると右図のようになる。正三角形の1辺の長さは $2\sqrt{r^2 - t^2}$ なので、正三角形の面積は

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{r^2 - t^2} \cdot \sqrt{3} \sqrt{r^2 - t^2} \\
 & = \sqrt{3} (r^2 - t^2) .
 \end{aligned}$$

V の体積は

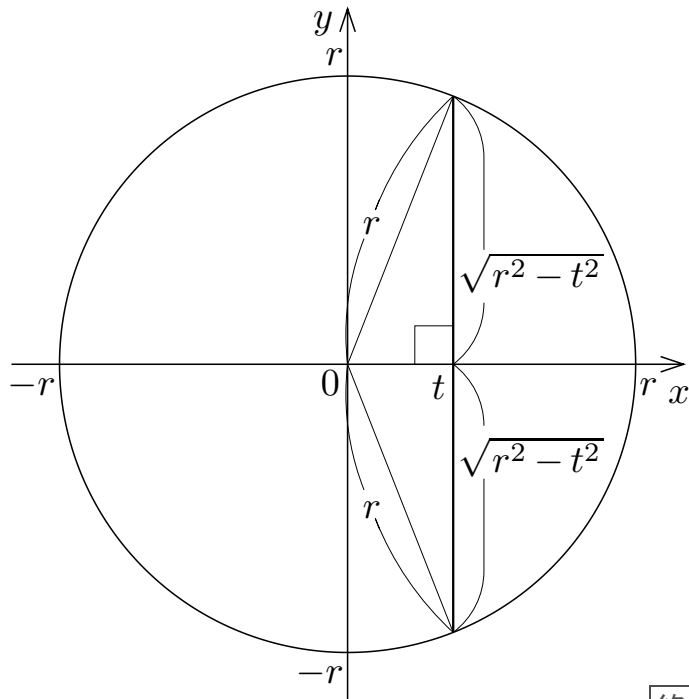


$-r \leq t \leq r$ である各実数 t に対して、 x 軸の座標が t である点が属し x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分の正三角形の底辺を xy 座標平面で図示すると右図のようになる。正三角形の1辺の長さは $2\sqrt{r^2 - t^2}$ なので、正三角形の面積は

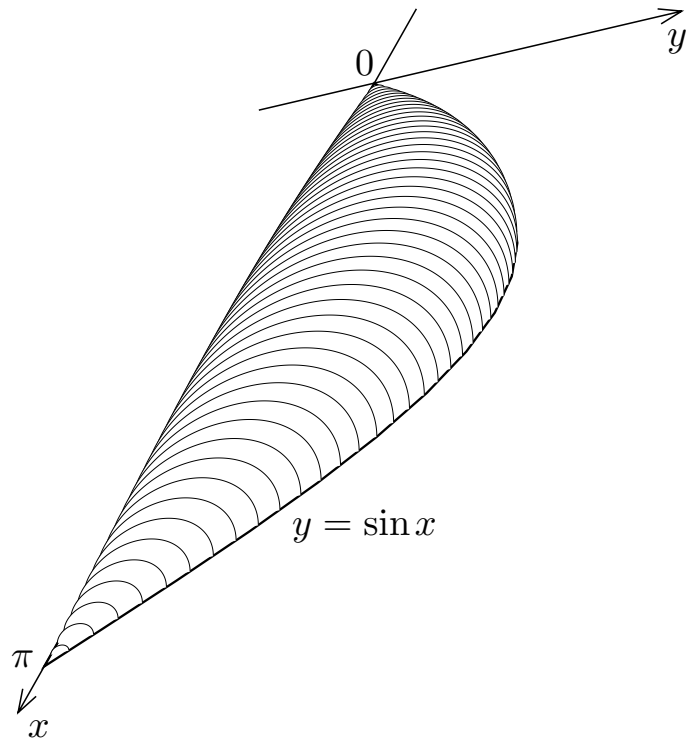
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{r^2 - t^2} \cdot \sqrt{3} \sqrt{r^2 - t^2} \\ &= \sqrt{3} (r^2 - t^2) . \end{aligned}$$

V の体積は

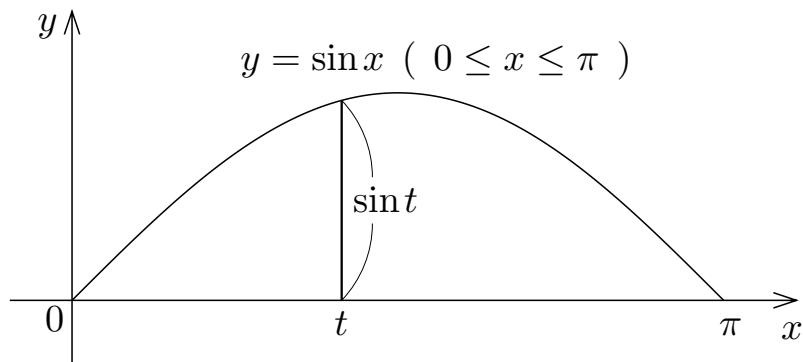
$$\begin{aligned} \int_{-r}^r \sqrt{3} (r^2 - t^2) dt &= \sqrt{3} \left[r^2 t - \frac{1}{3} t^3 \right]_{-r}^r \\ &= \frac{4}{3} \sqrt{3} r^3 . \end{aligned}$$



問8.4.5 xy 座標平面の上に載っている立体図形 V がある. V の底面は xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $0 \leq y \leq \sin x$ との連立で表される平面領域である. x 軸に垂直で x 軸との共有点の x 座標が 0 以上 π 以下である各平面と V との共通部分は半円で囲まれる平面領域であり, その半円の直径である線分の一方の端点は x 軸に属しもう一方の端点は $y = \sin x$ のグラフに属す. この立体図形 V の体積を求めよ.

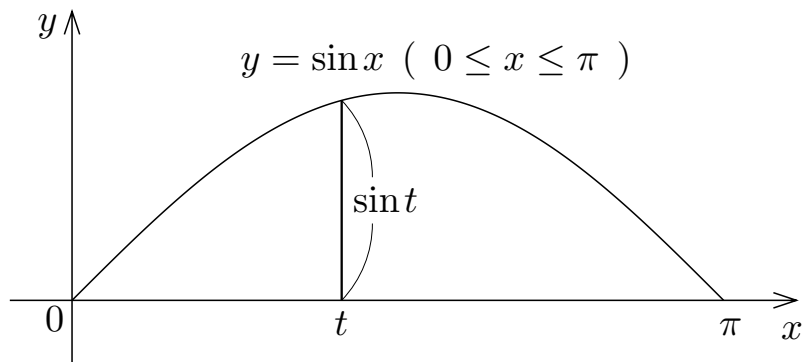


$0 \leq t \leq \pi$ である各実数 t に対して、 x 軸の座標が t である点が属し x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分の半円の直径である線分を xy 座標平面で図示すると右図のようになる。



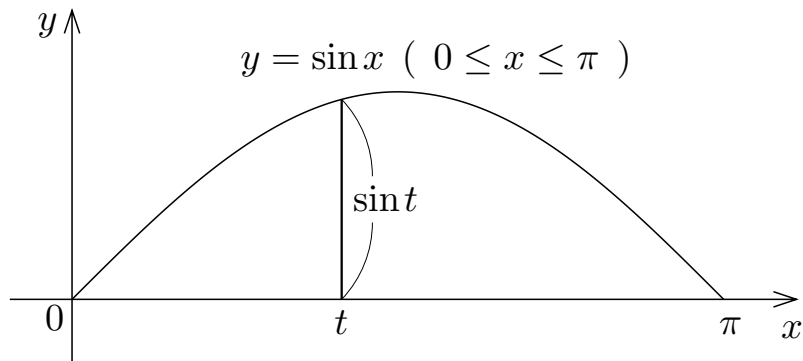
半円の直径が $\sin t$ なので、半円の面積は _____ である。 V の体積は _____

$0 \leq t \leq \pi$ である各実数 t に対して、 x 軸の座標が t である点が属し x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分の半円の直径である線分を xy 座標平面で図示すると右図のようになる。



半円の直径が $\sin t$ なので、半円の面積は $\frac{\pi}{2} \left(\frac{\sin t}{2} \right)^2$ である。 V の体積は

$0 \leq t \leq \pi$ である各実数 t に対して、 x 軸の座標が t である点が属し x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分の半円の直径である線分を xy 座標平面で図示すると右図のようになる。



半円の直径が $\sin t$ なので、半円の面積は $\frac{\pi}{2} \left(\frac{\sin t}{2} \right)^2$ である。 V の体積は

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sin t}{2} \right)^2 dt &= \frac{\pi}{8} \int_0^\pi \sin^2 t dt = \frac{\pi}{8} \int_0^\pi \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) dt = \frac{\pi}{16} \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi^2}{16} . \end{aligned}$$

終