8.5　関数のグラフの長さ

定積分の定義を復習する.

定義　実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = b$$

である実数 $x_0\,, x_1\,, x_2\,, x_3\,, \ldots\,, x_{n-1}\,, x_n$ 及び $\xi_1\,, \xi_2\,, \xi_3\,, \ldots\,, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ,$$

$$S_n = \qquad\qquad\qquad\qquad$$

とおく．S_n を f のリーマン和という．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \delta_n = \qquad$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 $a\,, b$ だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，リーマン和 S_n の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：$\int_a^b f(x)\,dx = \qquad\qquad .$

定義　実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

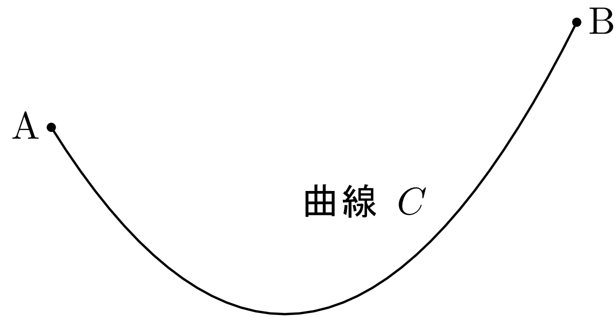
$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

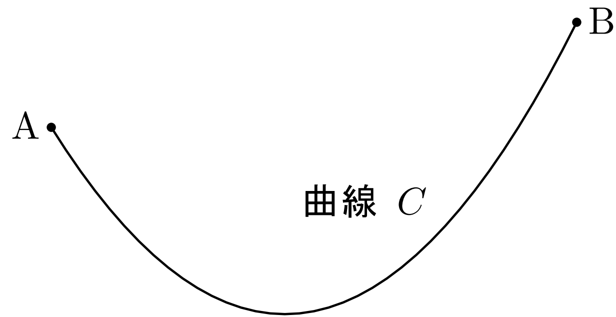
とおく．S_n を f のリーマン和という．$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，リーマン和 S_n の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n$ ．

関数 f が a から b まで積分可能であるとき，関数 f は b から a まで積分可能であるといい，f の b から a までの定積分 $\int_b^a f(x)\,dx$ を次のように定義する：$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ ．

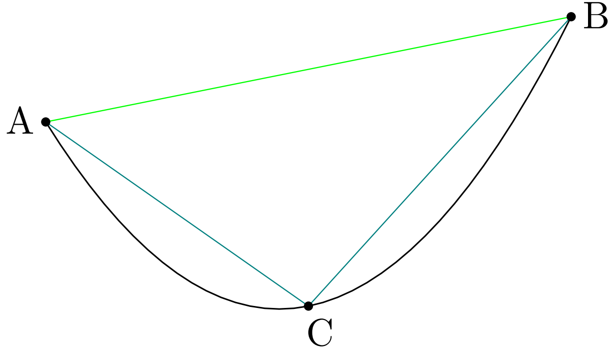
例として，右図のような，放物線の一部を C とおく．この曲線 C の長さを考える．曲線 C の端点の各々を A, B とおく．

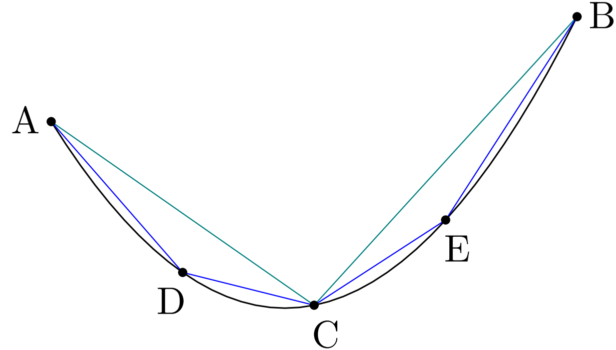


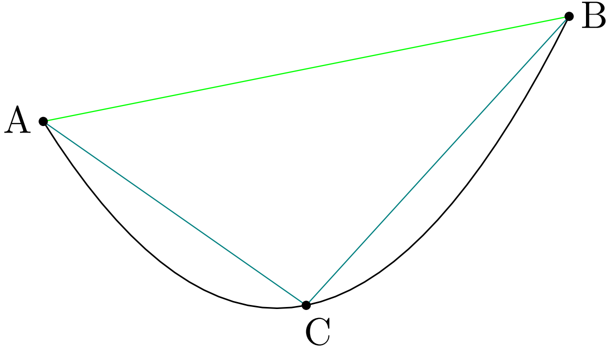
例として，右図のような，放物線の一部を C とおく．この曲線 C の長さを考える．曲線 C の端点の各々を A, B とおく．グラフに属す点のうち，点 A と点 B との中間にある点 C をとる．このとき，

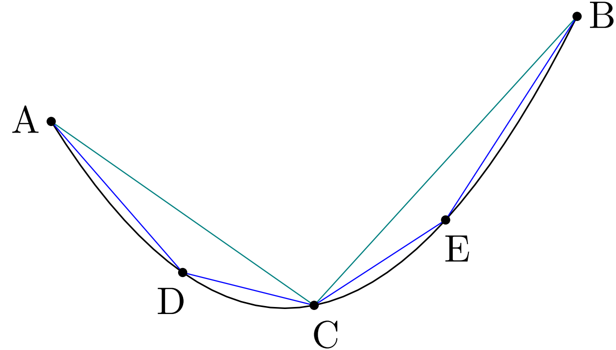


$$\text{線分 AB の長さ} < \text{折れ線 ACB の長さ} < \text{曲線 } C \text{ の長さ}.$$



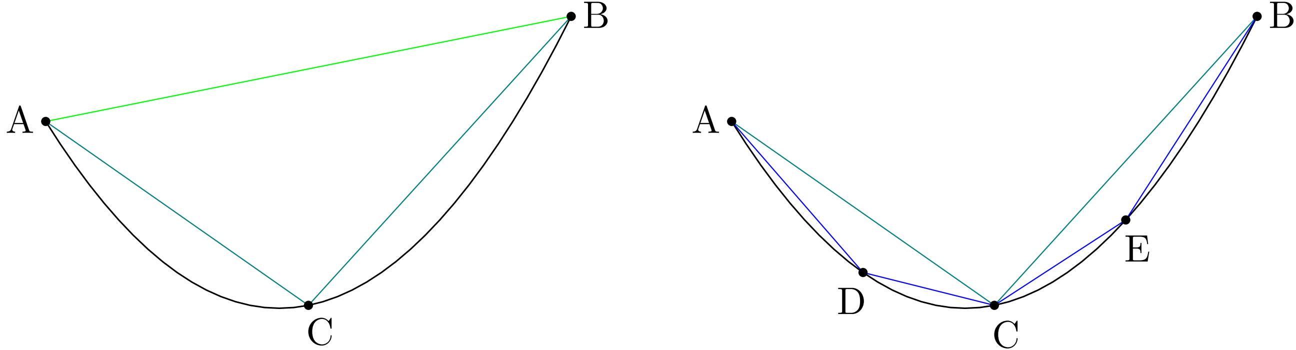






グラフに属す点のうち，点 A と点 C との中間にある点 D と，点 C と点 B との中間にある点 E とをとる．このとき，

$$\text{折れ線 ACB の長さ} < \text{折れ線 ADCEB の長さ} < \text{曲線 } C \text{ の長さ} .$$

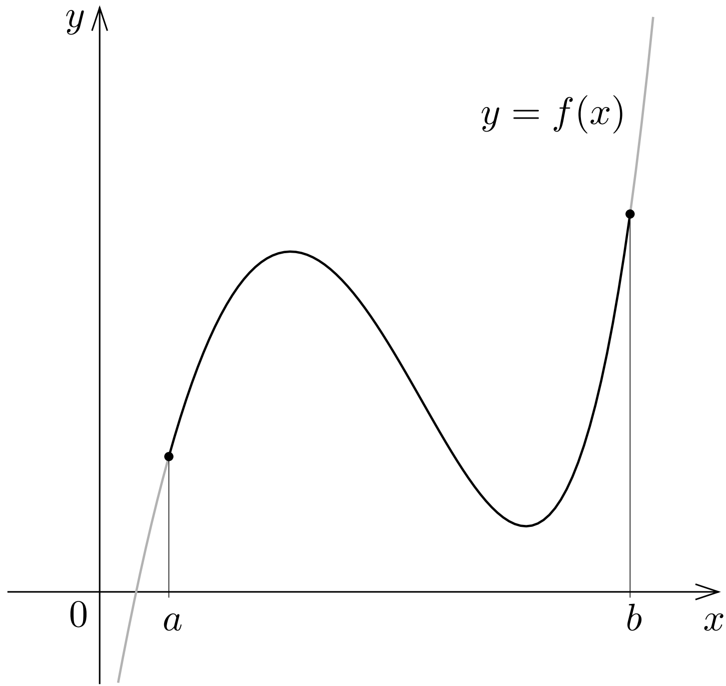


グラフに属す点のうち，点 A と点 C との中間にある点 D と，点 C と点 B との中間にある点 E をとる．このとき，

$$\text{折れ線 ACB の長さ} < \text{折れ線 ADCEB の長さ} < \text{曲線 } C \text{ の長さ} .$$

このように，節点（折れる点）がより多い折れ線で曲線を近似すると，折れ線の長さは曲線の長さに近づいてく.

実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の導関数 f' は区間 $[a, b]$ において連続であるとする．xy 座標平面において不等式 $a \leq x \leq b$ と方程式 $y = f(x)$ との連立で表される曲線の長さを考える．



正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

である実数 $x_0\,, x_1\,, x_2\,, x_3\,, \ldots\,, x_{n-1}\,, x_n$ をとる．

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0\,, x_2 - x_1\,, x_3 - x_2\,, \ldots\,, x_n - x_{n-1}\}$$

について $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$ とする．

　正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとる．

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$$

について $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とする．

　$y = f(x)$ のグラフの点 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \ldots, \mathrm{P}_{n-1}, \mathrm{P}_n$ を次のように定める：

$$\mathrm{P}_0 = \big(x_0, f(x_0)\big),\ \mathrm{P}_1 = \big(x_1, f(x_1)\big),\ \mathrm{P}_2 = \big(x_2, f(x_2)\big),\ \mathrm{P}_3 = \big(x_3, f(x_3)\big),\ \cdots,$$

$$\mathrm{P}_{n-1} = \big(x_{n-1}, f(x_{n-1})\big),\quad \mathrm{P}_n = \big(x_n, f(x_n)\big).$$

正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

である実数 $x_0\,, x_1\,, x_2\,, x_3\,, \ldots\,, x_{n-1}\,, x_n$ をとる.

$$\delta_n = \max\{\,x_1 - x_0\,, x_2 - x_1\,, x_3 - x_2\,, \ldots\,, x_n - x_{n-1}\,\}$$

について $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とする.

$y = f(x)$ のグラフの点 $\mathrm{P}_0\,, \mathrm{P}_1\,, \mathrm{P}_2\,, \mathrm{P}_3\,, \ldots\,, \mathrm{P}_{n-1}\,, \mathrm{P}_n$ を次のように定める：

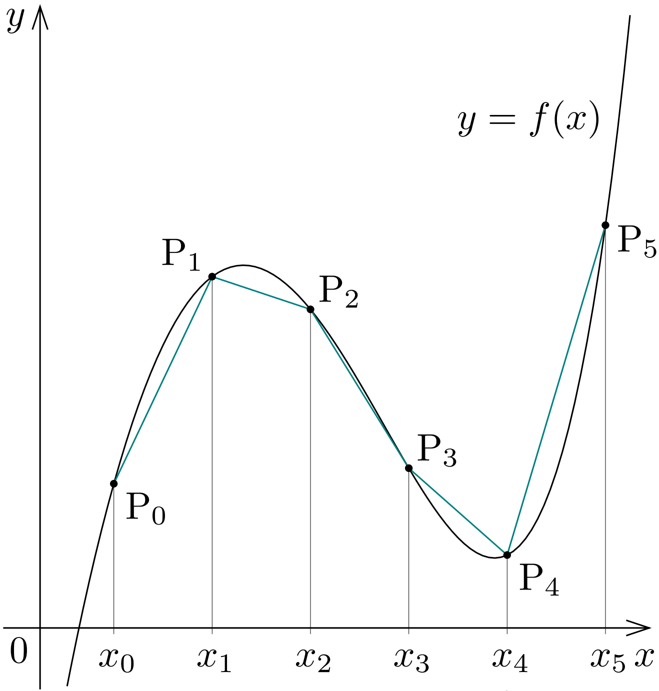
$$\mathrm{P}_0 = \bigl(x_0\,, f(x_0)\bigr)\ ,\ \mathrm{P}_1 = \bigl(x_1\,, f(x_1)\bigr)\ ,\ \mathrm{P}_2 = \bigl(x_2\,, f(x_2)\bigr)\ ,\ \mathrm{P}_3 = \bigl(x_3\,, f(x_3)\bigr)\ ,\ \cdots\ ,$$

$$\mathrm{P}_{n-1} = \bigl(x_{n-1}\,, f(x_{n-1})\bigr)\ ,\quad \mathrm{P}_n = \bigl(x_n\,, f(x_n)\bigr)\ .$$

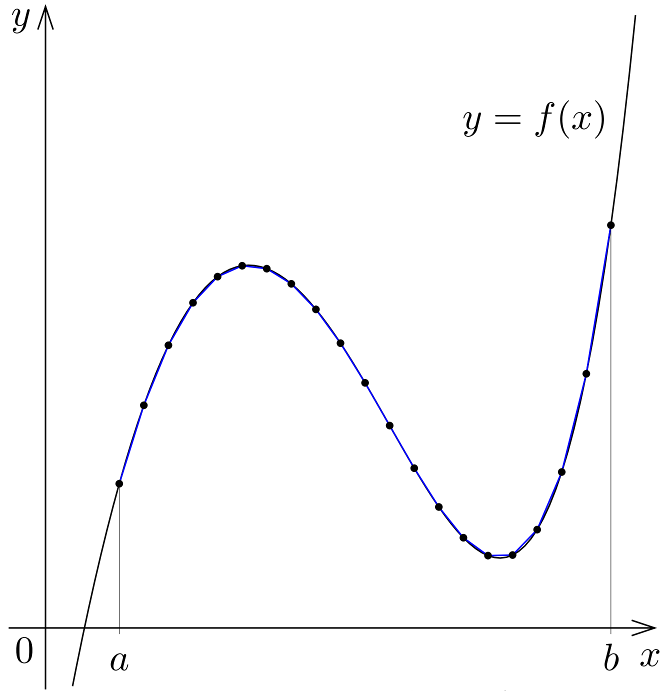
点 $\mathrm{P}_0\,, \mathrm{P}_1\,, \mathrm{P}_2\,, \mathrm{P}_3\,, \ldots\,, \mathrm{P}_{n-1}\,, \mathrm{P}_n$ を順に結ぶ折れ線の長さを L_n とおく：

$$L_n = \overline{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} + \overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} + \overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3} + \cdots + \overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}\ .$$

折れ線は例えば次の図のようになる.



$n = 5$ のときの折れ線



$n = 20$ のときの折れ線

$k=1,2,3,\ldots,n$ に対して，$\mathrm{P}_{k-1}=\big(x_{k-1},f(x_{k-1})\big)$ ，$\mathrm{P}_k=\big(x_k,f(x_k)\big)$ なので，線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ の長さ $\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ は

$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}=\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+\{f(x_k)-f(x_{k-1})\}^2}\ .$$

$k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して，$\mathrm{P}_{k-1} = \big(x_{k-1}, f(x_{k-1})\big)$，$\mathrm{P}_k = \big(x_k, f(x_k)\big)$ なので，線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ の長さ $\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ は

$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}^2}\ .$$

$x_{k-1} < x_k$ なので，平均値の定理より，

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad \text{かつ} \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k$$

である実数 ξ_k がある．

定理（平均値の定理）　実数 p と q とについて $p < q$ で，関数 f が区間 $[p, q]$ において微分可能であるならば，次のような実数 r がある：

$$f(q) - f(p) = f'(r)(q - p) \quad \text{かつ} \quad p < r < q\ .$$

$k=1,2,3,\ldots,n$ に対して，$\mathrm{P}_{k-1}=\bigl(x_{k-1},f(x_{k-1})\bigr)$ ，$\mathrm{P}_k=\bigl(x_k,f(x_k)\bigr)$ なので，線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ の長さ $\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ は

$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+\{f(x_k)-f(x_{k-1})\}^2}\ .$$

$x_{k-1}<x_k$ なので，平均値の定理より，

$$f(x_k)-f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) \quad \text{かつ} \quad x_{k-1}<\xi_k<x_k$$

である実数 ξ_k がある.

$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+\{f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}^2}$$

$k=1,2,3,\ldots,n$ に対して， $\mathrm{P}_{k-1}=\bigl(x_{k-1}, f(x_{k-1})\bigr)$ ， $\mathrm{P}_k=\bigl(x_k, f(x_k)\bigr)$ なので，線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ の長さ $\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ は

$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+\{f(x_k)-f(x_{k-1})\}^2}\ .$$

$x_{k-1}<x_k$ なので，平均値の定理より，

$$f(x_k)-f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) \quad \text{かつ} \quad x_{k-1}<\xi_k<x_k$$

である実数 ξ_k がある.

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} &= \sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+\{f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}^2}\\ &= \sqrt{(x_k-x_{k-1})^2\{1+f'(\xi_k)^2\}}\\ &= \sqrt{(x_k-x_{k-1})^2}\sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\ .\end{aligned}$$

$k=1,2,3,\ldots,n$ に対して，$\mathrm{P}_{k-1}=\bigl(x_{k-1},f(x_{k-1})\bigr)$ ，$\mathrm{P}_k=\bigl(x_k,f(x_k)\bigr)$ なので，線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ の長さ $\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ は

$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}=\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+\{f(x_k)-f(x_{k-1})\}^2}\ .$$

$x_{k-1}<x_k$ なので，平均値の定理より，

$$f(x_k)-f(x_{k-1})=f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) \quad \text{かつ} \quad x_{k-1}<\xi_k<x_k$$

である実数 ξ_k がある.

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}&=\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+\{f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}^2}\\&=\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2\{1+f'(\xi_k)^2\}}\\&=\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2}\sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\ .\end{aligned}$$

$x_{k-1}<x_k$ より $x_k-x_{k-1}>0$ なので $\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2}=x_k-x_{k-1}$ ，よって

$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}=\sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\,(x_k-x_{k-1})\ .$$

$k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して，

$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\,(x_k - x_{k-1}) \ .$$

$k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して，

$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\,(x_k - x_{k-1}) \ .$$

従って，折れ線の長さ L_n は

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\,(x_k - x_{k-1}) \right\} \ .$$

$k=1,2,3,\ldots,n$ に対して，

$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\,(x_k-x_{k-1}) \ .$$

従って，折れ線の長さ L_n は

$$L_n = \sum_{k=1}^{n}\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sum_{k=1}^{n}\left\{\sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\,(x_k-x_{k-1})\right\} \ .$$

関数 F を $F(x)=\sqrt{1+f'(x)^2}$ とおく．このとき，

$$L_n = \sum_{k=1}^{n}\{F(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \ .$$

$k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して，

$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\,(x_k - x_{k-1}) \ .$$

従って，折れ線の長さ L_n は

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\,(x_k - x_{k-1}) \right\} \ .$$

関数 F を $F(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ とおく．このとき，

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \{F(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \ .$$

$a = x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \xi_3 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < \xi_n < x_n = b$ なので，この等式の右辺は関数 F のリーマン和である．

$L_n = \sum_{k=1}^{n} \{F(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は関数 $F(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ のリーマン和である.

$L_n = \sum_{k=1}^{n} \{F(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は関数 $F(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ のリーマン和である．関数 f の導関数 $f'(x)$ は連続なので，関数 $F(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ も連続である．従って関数 F は a から b まで積分可能である．

$L_n = \sum_{k=1}^{n} \{F(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は関数 $F(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ のリーマン和である．関数 f の導関数 $f'(x)$ は連続なので，関数 $F(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ も連続である．従って関数 F は a から b まで積分可能である． $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ なので， $n \to \infty$ のとき L_n は F の定積分 $\int_a^b F(x)\,dx$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx \ .$$

$L_n = \sum_{k=1}^{n} \{F(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は関数 $F(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ のリーマン和である．関数 f の導関数 $f'(x)$ は連続なので，関数 $F(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ も連続である．従って関数 F は a から b まで積分可能である． $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ なので， $n \to \infty$ のとき L_n は F の定積分 $\int_a^b F(x)\,dx$ に収束する：

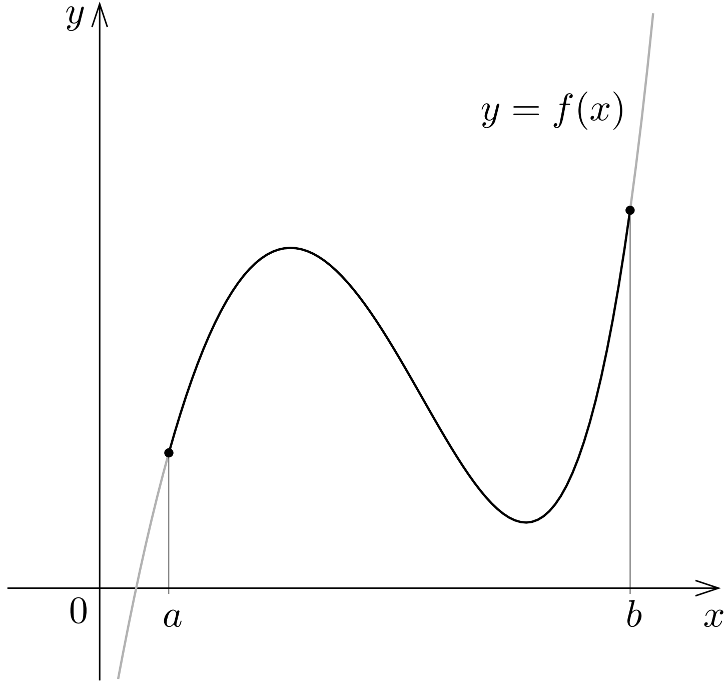
$$\lim_{n\to\infty} L_n = \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx \ .$$

方程式 $y = f(x)$ と不等式 $a \leq x \leq b$ とで表される曲線の長さは $\lim_{n\to\infty} L_n$ なので $\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$ である．

定理　実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の導関数 f' は区間 $[a, b]$ においで連続であるとする．xy 座標平面において不等式 $a \leq x \leq b$ と方程式 $y = f(x)$ との連立で表される曲線の長さは

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

である．



$\boxed{例}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 1$ と方程式 $y = 2\sqrt{x}^{3}$ との連立で表される曲線 C の長さを求める.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 1$ と方程式 $y = 2\sqrt{x}^{\,3}$ との連立で表される曲線 C の長さを求める.

$y = 2\sqrt{x}^{\,3}$ より,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x}^{\,3}\right) = 2 \cdot \frac{d}{dx} x^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x} \ ,$$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 1$ と方程式 $y = 2\sqrt{x}^{\,3}$ との連立で表される曲線 C の長さを求める.

$y = 2\sqrt{x}^{\,3}$ より,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x}^{\,3}\right) = 2 \cdot \frac{d}{dx} x^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x} \ ,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(3\sqrt{x}\right)^2 = 9x + 1 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 1$ と方程式 $y = 2\sqrt{x}^{\,3}$ との連立で表される曲線 C の長さを求める.

$y = 2\sqrt{x}^{\,3}$ より,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x}^{\,3}\right) = 2 \cdot \frac{d}{dx} x^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x}\ ,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(3\sqrt{x}\right)^2 = 9x + 1\ .$$

曲線 C の長さは $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{9x+1}\, dx$ である.

$\boxed{例}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 1$ と方程式 $y = 2\sqrt{x}^{\,3}$ との連立で表される曲線 C の長さを求める.

$y = 2\sqrt{x}^{\,3}$ より,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x}^{\,3}\right) = 2 \cdot \frac{d}{dx} x^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x} \ ,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(3\sqrt{x}\right)^2 = 9x + 1 \ .$$

曲線 C の長さは $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{9x+1}\, dx$ である. 変数 t を $t = 9x + 1$ とおく. $\dfrac{dt}{dx} = 9$ より $dx = \dfrac{1}{9} dt$. $x = 0$ のとき $t = 1$. $x = 1$ のとき $t = 10$.

$\boxed{例}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 1$ と方程式 $y = 2\sqrt{x}^3$ との連立で表される曲線 C の長さを求める.

$y = 2\sqrt{x}^3$ より,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x}^3\right) = 2 \cdot \frac{d}{dx} x^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x} \ ,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(3\sqrt{x}\right)^2 = 9x + 1 \ .$$

曲線 C の長さは $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{9x+1}\, dx$ である. 変数 t を $t = 9x + 1$ とおく. $\dfrac{dt}{dx} = 9$ より $dx = \dfrac{1}{9} dt$. $x = 0$ のとき $t = 1$. $x = 1$ のとき $t = 10$. 曲線 C の長さは

$$\int_0^1 \sqrt{9x+1}\, dx = \int_1^{10} \sqrt{t}\, \frac{1}{9} dt = \frac{1}{9} \int_1^{10} t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{9} \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right]_1^{10} = \frac{2}{27}\left(\sqrt{10}^3 - \sqrt{1}^3\right)$$

$$= \frac{2}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right) \ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{問8.5.1}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 8$ と方程式 $y = \dfrac{\sqrt{x^3}}{3}$ との連立で表される曲線 C の長さを求めよ.

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\dfrac{\sqrt{x^3}}{3} = \dfrac{1}{3}\dfrac{d}{dx}x^{\frac{3}{2}} = \qquad\qquad = \qquad\qquad$ なので, 曲線 C の長さは

$$\int_0^8 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^8 \sqrt{\qquad\qquad\qquad}\, dx = \int_0^8 \sqrt{\qquad\qquad}\, dx$$

変数 t を $t = \qquad\qquad$ とおく. $\dfrac{dt}{dx} = \qquad$ なので $dx = \quad dt$. $x = 0$ のとき $t = \quad$. $x = 8$ のとき $t = \quad$.

$$\int_0^8 \sqrt{\qquad\qquad}\, dx = $$

曲線 C の長さは $\qquad\qquad\qquad$ である.

$\boxed{\text{問}8.5.1}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 8$ と方程式 $y = \dfrac{\sqrt{x^3}}{3}$ との連立で表される曲線 C の長さを求めよ.

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\dfrac{\sqrt{x^3}}{3} = \dfrac{1}{3}\dfrac{d}{dx}x^{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$ なので，曲線 C の長さは

$$\int_0^8 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = \int_0^8 \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^2}dx = \int_0^8 \sqrt{\frac{x}{4}+1}dx \ .$$

変数 t を $t =$ とおく. $\dfrac{dt}{dx} =$ なので $dx =$ dt . $x = 0$ のとき $t =$. $x = 8$ のとき $t =$.

$$\int_0^8 \sqrt{}\, dx =$$

曲線 C の長さは であ る.

$\boxed{問 8.5.1}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 8$ と方程式 $y = \dfrac{\sqrt{x^3}}{3}$ との連立で表される曲線 C の長さを求めよ.

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\dfrac{\sqrt{x^3}}{3} = \dfrac{1}{3}\dfrac{d}{dx}x^{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$ なので, 曲線 C の長さは

$$\int_0^8 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^8 \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^2}\,dx = \int_0^8 \sqrt{\frac{x}{4}+1}\,dx \ .$$

変数 t を $t = \dfrac{x}{4}+1$ とおく. $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{4}$ なので $dx = 4\,dt$. $x = 0$ のとき $t = 1$. $x = 8$ のとき $t = 3$.

$$\int_0^8 \sqrt{\frac{x}{4}+1}\,dx = 4\int_1^3 t^{\frac{1}{2}}\,dt = 4\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^3 = 8\sqrt{3} - \frac{8}{3} \ .$$

曲線 C の長さは $8\sqrt{3} - \dfrac{8}{3}$ である. $\boxed{終}$

例 xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 3$ と方程式 $y = \sqrt{12 - x^2}$ との連立で表される曲線 C の長さを求める.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 3$ と方程式 $y = \sqrt{12 - x^2}$ との連立で表される曲線 C の長さを求める.

$0 \leq x \leq 3$ の範囲で，変数 x の関数 $y = \sqrt{12 - x^2}$ について，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{12 - x^2} = \frac{d}{dx}(12 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(12 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{12 - x^2}} ,$$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 3$ と方程式 $y=\sqrt{12-x^2}$ との連立で表される曲線 C の長さを求める.

$0 \leq x \leq 3$ の範囲で，変数 x の関数 $y=\sqrt{12-x^2}$ について，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\sqrt{12-x^2}=\frac{d}{dx}(12-x^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(12-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{12-x^2}},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{12-x^2}}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{12-x^2}}=\sqrt{\frac{12}{12-x^2}}=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12-x^2}},$$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 3$ と方程式 $y=\sqrt{12-x^2}$ との連立で表される曲線 C の長さを求める.

$0 \leq x \leq 3$ の範囲で, 変数 x の関数 $y=\sqrt{12-x^2}$ について,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{12-x^2} = \frac{d}{dx}(12-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(12-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{12-x^2}} ,$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{12-x^2}}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{12-x^2}} = \sqrt{\frac{12}{12-x^2}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12-x^2}} ,$$

曲線 C の長さは

$$\int_0^3 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^3 \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12-x^2}}\,dx$$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 3$ と方程式 $y=\sqrt{12-x^2}$ との連立で表される曲線 C の長さを求める.

$0 \leq x \leq 3$ の範囲で，変数 x の関数 $y=\sqrt{12-x^2}$ について，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\sqrt{12-x^2}=\frac{d}{dx}(12-x^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(12-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{12-x^2}}\ ,$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{12-x^2}}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{12-x^2}}=\sqrt{\frac{12}{12-x^2}}=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12-x^2}}\ ,$$

曲線 C の長さは

$$\begin{aligned}\int_0^3\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx &= \int_0^3\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12-x^2}}dx=\sqrt{12}\left[\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{12}}\right]_0^3\\ &=\sqrt{12}\left(\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin^{-1}0\right)=\sqrt{12}\cdot\frac{\pi}{3}\\ &=\frac{\sqrt{12}\,\pi}{3}\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}8.5.2}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 3$ と方程式 $y = \sqrt{36 - x^2}$ とで表される曲線 C の長さを求めよ.

$0 \leq x \leq 3$ の範囲で，変数 x の関数 $y = \sqrt{36 - x^2}$ について，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{36 - x^2} =$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} =$$

$$\int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx =$$

曲線 C の長さは　　である.

$\boxed{問8.5.2}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 3$ と方程式 $y=\sqrt{36-x^2}$ とで表される曲線 C の長さを求めよ.

$0 \leq x \leq 3$ の範囲で，変数 x の関数 $y=\sqrt{36-x^2}$ について，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{36-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{36-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{36-x^2}} \ ,$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{36-x^2}}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{36-x^2}} = \sqrt{\frac{36}{36-x^2}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{36-x^2}} \ ,$$

$$\int_0^3 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^3 \frac{6}{\sqrt{36-x^2}}\,dx$$

曲線 C の長さは　　である.

$\boxed{\text{問}8.5.2}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 3$ と方程式 $y = \sqrt{36 - x^2}$ とで表される曲線 C の長さを求めよ．

$0 \leq x \leq 3$ の範囲で，変数 x の関数 $y = \sqrt{36 - x^2}$ について，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{36 - x^2} = \frac{1}{2\sqrt{36 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{36 - x^2}} ,$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{36 - x^2}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{36 - x^2}} = \sqrt{\frac{36}{36 - x^2}}$$
$$= \frac{6}{\sqrt{36 - x^2}} ,$$

$$\int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^3 \frac{6}{\sqrt{36 - x^2}}\, dx = 6\left[\sin^{-1}\frac{x}{6}\right]_0^3$$
$$= 6\left(\sin^{-1}\frac{1}{2} - \sin^{-1}0\right) = 6 \cdot \frac{\pi}{6}$$
$$= \pi .$$

曲線 C の長さは π である．

$\boxed{\text{終}}$