8.5 関数のグラフの長さ

定積分の定義を復習する.

a =である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$  及び  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$  をとり,  $\delta_n =$ 

定義 実数 a と b とについて  $a \le b$  で、関数 f の定義域は区間 [a,b] を含

むとする. 正の各自然数 n に対して.

と定める. 正の自然数を表す変数 
$$n$$
 の関数  $S_n$  を  $f$  のリーマン和という.

 $S_n =$ 

 $\lim_{n o\infty}\delta_n=$  であるどのようなリーマン和  $S_n$  も  $n o\infty$  のとき収束して極限 値  $\lim S_n$  が関数 f 及び実数 a,b だけから唯一つに決まるならば、関数 f

は a から b まで (定) 積分可能であるといい.

を a から b までの f の定積分といい、  $\int_{a}^{b} f(x) dx$  と書き表す:

 $\int_a^b f(x) dx =$ 

むとする. 正の各自然数 n に対して,  $a=x_0\leq \xi_1\leq x_1\leq \xi_2\leq x_2\leq \xi_3\leq x_3\leq \cdots \leq x_{n-1}\leq \xi_n\leq x_n=b$ 

定義 実数 a と b とについて  $a \le b$  で、関数 f の定義域は区間 [a,b] を含

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  をとり,  $\delta_n =$  ,

 $S_n =$ 

と定める. 正の自然数を表す変数 
$$n$$
 の関数  $S_n$  を  $f$  のリーマン和という.  $\lim \delta_n =$  であるどのようなリーマン和  $S_n$  も  $n \to \infty$  のとき収束して極限

値  $\lim_{n \to \infty} S_n$  が関数 f 及び実数 a,b だけから唯一つに決まるならば、関数 f は a から b まで(定)積分可能であるといい、

 $oldsymbol{\epsilon}$  なく、 $oldsymbol{\epsilon}$  がら b までの f の定積分といい, $\int_a^b f(x)\,dx$  と書き表す:

を a から b まとの f の足積分といい,  $\int_a f(x) dx$  と音さ表す:  $\int_a^b f(x) dx =$  .

 $a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \dots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = b$ 

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  をとり、 $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ 、

定義 実数 a と b とについて  $a \le b$  で、関数 f の定義域は区間 [a,b] を含

むとする. 正の各自然数 n に対して.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{ f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) \}$$

と定める. 正の自然数を表す変数 n の関数  $S_n$  を f のリーマン和という.  $\lim_{n \to \infty} \delta_n =$  であるどのようなリーマン和  $S_n$  も  $n \to \infty$  のとき収束して極限

値  $\lim_{n o\infty}S_n$  が関数 f 及び実数 a,b だけから唯一つに決まるならば、関数 f は a から b まで(定)積分可能であるといい、

を a から b までの f の定積分といい, $\int_a^b f(x) dx$  と書き表す:

を a から b までの f の定積分といい、  $\int_a^* f(x) dx$  と書き表す:  $\int_a^b f(x) dx =$  .

むとする. 正の各自然数 n に対して,  $a=x_0\leq \xi_1\leq x_1\leq \xi_2\leq x_2\leq \xi_3\leq x_3\leq \cdots \leq x_{n-1}\leq \xi_n\leq x_n=b$ 

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  をとり、  $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ 

定義 実数 a と b とについて  $a \le b$  で、関数 f の定義域は区間 [a,b] を含

$$S_n = \sum\limits_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$$
と定める.正の自然数を表す変数  $n$  の関数  $S_n$  を  $f$  のリーマン和という.

 $\lim_{n o\infty}\delta_n=0$  であるどのようなリーマン和  $S_n$  も  $n o\infty$  のとき収束して極限

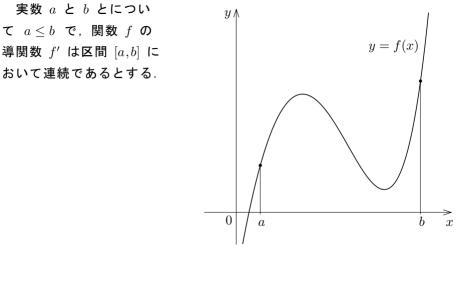
値  $\lim_{n\to\infty}S_n$  が関数 f 及び実数 a,b だけから唯一つに決まるならば、関数 f は a から b まで(定)積分可能であるといい、 f のリーマン和  $S_n$  の極限

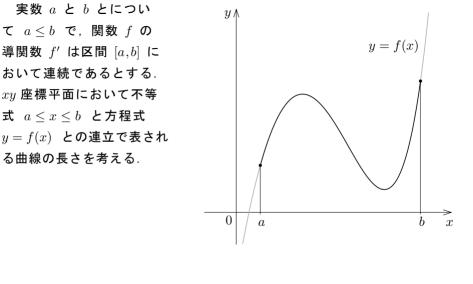
値  $\lim S_n$  を a から b までの f の定積分といい、 $\int_a^b f(x) dx$  と書き表す:

値  $\lim_{n \to \infty} S_n$  を a から b までの f の定積分といい、 $\int_a^b f(x) \, dx$  と書き表す: $\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \to \infty} S_n$  .

分可能であるといい、f の b から a までの定積分  $\int_{b}^{a} f(x) dx$  を次のように定 義する:  $\int_a^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$ .

関数 f が a から b まで積分可能であるとき、関数 f は b から a まで積





正の各自然数 n に対して.  $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

について  $\lim \delta_n = 0$  とする.

である実数 
$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$$
 をとる.

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$$
 をとる.

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$$
 をとる. 
$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

正の各自然数 n に対して.  $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 

について  $\lim \delta_n = 0$  とする.

である実数 
$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$$
 をとる.

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n \in \mathbb{Z}$$

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}\$$

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}\$$

y = f(x) のグラフの点  $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}, P_n$  を次のように定める:  $P_0 = (x_0, f(x_0)), P_1 = (x_1, f(x_1)), P_2 = (x_2, f(x_2)), P_3 = (x_3, f(x_3)), \cdots,$ 

 $P_{n-1} = (x_{n-1}, f(x_{n-1})), P_n = (x_n, f(x_n)).$ 

正の各自然数 n に対して.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$  をとる.

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}\$$

について 
$$\lim_{n \to \infty} \delta_n = 0$$
 とする.

$$y=f(x)$$
 のグラフの点  $\mathrm{Poly}$ 

u = f(x) のグラフの点  $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}, P_n$  を次のように定める:

 $P_0 = (x_0, f(x_0)), P_1 = (x_1, f(x_1)), P_2 = (x_2, f(x_2)), P_3 = (x_3, f(x_3)), \cdots,$ 

点  $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}, P_n$  を順に結ぶ折れ線の長さを  $L_n$  とおく:

$$(x_0)$$
,  $P_1 = (x_1, f(x_1))$ ,  $P_2 = (x_2)$ 

 $P_{n-1} = (x_{n-1}, f(x_{n-1})), P_n = (x_n, f(x_n)).$ 

:さを 
$$L_n$$
 とおく:

の長さを 
$$L_n$$
 とおく:

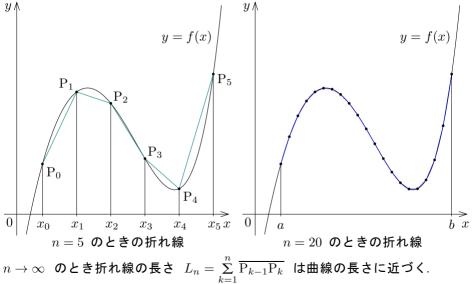
長さを 
$$L_n$$
 とおく:

の長さを 
$$L_n$$
 とおく:

$$\frac{n}{n}$$

$$\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \overline{P_{k-1} P_k}$$
.

$$L_n = \overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \dots + \overline{P_{n-1}P_n} = \sum_{k=1}^n \overline{P_{k-1}P_k}$$
.



$$k=1,2,3,\dots,n$$
 に対して、 $\mathrm{P}_{k-1}=\left(x_{k-1},f(x_{k-1})\right)$  、  $\mathrm{P}_k=\left(x_k,f(x_k)\right)$ なので、線分  $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$  の長さ  $\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$  は  $\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}=\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+\{f(x_k)-f(x_{k-1})\}^2}$  .

$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}=\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+\{f(x_k)-f(x_{k-1})\}^2}$$
 .  $x_{k-1}< x_k$  なので、平均値の定理より、  $f(x_k)-f(x_{k-1})=f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$  かつ  $x_{k-1}<\xi_k< x_k$ 

(平均値の定理) 実数 a と b とについて a < b で, 関数 f が区間 [a,b] にお

f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) to a < c < b.

いて微分可能であるならば、次のような実数 c がある:

 $k=1,2,3,\ldots,n$  に対して、 $P_{k-1}=(x_{k-1},f(x_{k-1}))$  、 $P_k=(x_k,f(x_k))$ 

なので、線分  $P_{k-1}P_k$  の長さ  $\overline{P_{k-1}P_k}$  は

である実数  $\xi_k$  がある.

なので、線分 
$$\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$$
 の長さ  $\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$  は 
$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}=\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+\{f(x_k)-f(x_{k-1})\}^2}\ .$$
  $x_{k-1}< x_k$  なので、平均値の定理より、

 $f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$  by  $x_{k-1} < \xi_k < x_k$ 

である実数 
$$\xi_k$$
 がある.

ある実数 
$$\xi_k$$
 がある.

 $k=1,2,3,\ldots,n$  に対して、 $P_{k-1}=\left(x_{k-1},f(x_{k-1})\right)$  、 $P_k=\left(x_k,f(x_k)\right)$ 

実数 
$$\xi_k$$
 がある.  $\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}=\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+\{f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}^2}$ 

$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+\{f(x_k)-f(x_{k-1})\}^2}$$
 .  $x_{k-1} < x_k$  なので、平均値の定理より、 
$$f(x_k)-f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$$
 かつ  $x_{k-1} < \xi_k < x_k$  である実数  $\xi_k$  がある. 
$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+\{f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}^2}$$

 $= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 \{1 + f'(\xi_k)^2\}}$  $= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2} \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}.$ 

 $k=1,2,3,\ldots,n$  に対して、 $P_{k-1}=\left(x_{k-1},f(x_{k-1})\right)$  、 $P_k=\left(x_k,f(x_k)\right)$ 

なので、線分  $P_{k-1}P_k$  の長さ  $\overline{P_{k-1}P_k}$  は

なので、線分 
$$P_{k-1}P_k$$
 の長さ  $\overline{P_{k-1}P_k}$  は 
$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+\{f(x_k)-f(x_{k-1})\}^2} \ .$$
  $x_{k-1} < x_k$  なので、平均値の定理より、
$$f(x_k)-f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) \quad \text{かつ} \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k$$
 である実数  $\xi_k$  がある。
$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+\{f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}^2}$$
 
$$= \sqrt{(x_k-x_{k-1})^2\{1+f'(\xi_k)^2\}}$$
 
$$= \sqrt{(x_k-x_{k-1})^2}\sqrt{1+f'(\xi_k)^2} \ .$$

 $k=1,2,3,\ldots,n$  に対して、 $P_{k-1}=\left(x_{k-1},f(x_{k-1})\right)$  、 $P_k=\left(x_k,f(x_k)\right)$ 

 $x_{k-1} < x_k$  より  $x_k - x_{k-1} > 0$  なので  $\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2} = x_k - x_{k-1}$  , よって

 $\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2} (x_k - x_{k-1})$ .

$$k=1,2,3,\dots,n$$
 に対して、 $\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}=\sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\left(x_k-x_{k-1}
ight)$  .

$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}=\sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\left(x_k-x_{k-1}
ight)\,.$$
従って,折れ線の長さ  $L_n$  は

k = 1, 2, 3, ..., n に対して,

$$\sum_{l=1}^{n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{\mathbf{J}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{P}$$

$$L_n = \sum_{k=1}^n \overline{P_{k-1}P_k} = \sum_{k=1}^n \left\{ \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2} (x_k - x_{k-1}) \right\}.$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mathbf{F}}_{i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{P}$$

$$k=1$$

$$\sum^{n} \overline{P}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\mathbf{F}}_{i}$$

従って、折れ線の長さ
$$L_n$$
は

k = 1, 2, 3, ..., n に対して、

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{1}$$

$$P_k$$

$$L_n=\sum_{k=1}^{\infty}P_{k-1}P_k=\sum_{k=1}^{\infty}\{\sqrt{1+f'(\zeta_k)^2}\}$$
関数  $F$  を  $F(x)=\sqrt{1+f'(x)^2}$  とおく. このとき,

$$\frac{P_{k}}{1+}$$

$$P_k$$
 $1$ 
 $1$ 

$$\sum_{k=1}^{l} \overline{\mathbf{P}_k}$$

 $L_n = \sum_{k=1}^n \{ F(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \} .$ 

# $L_n = \sum_{k=1}^n \overline{P_{k-1}P_k} = \sum_{k=1}^n \left\{ \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2} (x_k - x_{k-1}) \right\}.$

 $P_{k-1}P_k = \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2} (x_k - x_{k-1})$ .

従って、折れ線の長さ 
$$L_n$$
 は

k = 1.2, 3, ..., n に対して.

 $L_n = \sum_{k=1}^n \overline{P_{k-1}P_k} = \sum_{k=1}^n \left\{ \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2} (x_k - x_{k-1}) \right\}.$ 関数 F を  $F(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$  とおく. このとき,

 $L_n = \sum_{k=1}^n \{ F(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \}$ .

 $P_{k-1}P_k = \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2} (x_k - x_{k-1})$ .

 $a = x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \xi_3 < x_3 < \dots < x_{n-1} < \xi_n < x_n = b$  toot,  $\exists$ 

の等式の右辺は関数 F のリーマン和である.

 $L_n = \sum\limits_{k=1}^n \{F(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$  は関数  $F(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$  のリーマン和であ

る. 関数 
$$f$$
 の導関数  $f'(x)$  は連続なので、関数  $F(x)=\sqrt{1+f'(x)^2}$  も連続である. 従って関数  $F$  は  $a$  から  $b$  まで積分可能である.

 $L_n = \sum_{k=1}^n \{F(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$  は関数  $F(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$  のリーマン和であ

る. 関数 
$$f$$
 の導関数  $f'(x)$  は連続なので、関数  $F(x)=\sqrt{1+f'(x)^2}$  も連続である. 従って関数  $F$  は  $a$  から  $b$  まで積分可能である.  $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$  なの

で、 $n \to \infty$  のとき  $L_n$  は F の定積分  $\int_a^b F(x) dx$  に収束する:

, 
$$n o\infty$$
 のとき  $L_n$  は  $F$  の定積分  $\int_a^b F(x)dx$  に収束する: $\lim_{n o\infty} L_n = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$  .

 $L_n = \sum_{k=1}^n \{F(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$  は関数  $F(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$  のリーマン和であ

る. 関数 
$$f$$
 の導関数  $f'(x)$  は連続なので、関数  $F(x)=\sqrt{1+f'(x)^2}$  も連続である. 従って関数  $F$  は  $a$  から  $b$  まで積分可能である.  $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$  なの

で、 $n \to \infty$  のとき  $L_n$  は F の定積分  $\int_a^b F(x) dx$  に収束する:

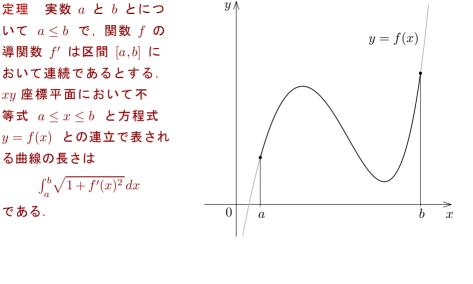
ので  $\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2} dx$  である.

$$\lim_{n \to \infty} L_n = \int_0^b F(x) dx = \int_0^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

 $L_n = \sum_{k=1}^n \{F(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$  は関数  $F(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$  のリーマン和であ

 $\lim_{n\to\infty} L_n = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$ 

$$\lim_{n o\infty}L_n=\int_a^bF(x)dx=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$
 .  
方程式  $y=f(x)$  と不等式  $a\leq x\leq b$  とで表される曲線の長さは  $\lim L_n$  な



 $rac{|M|}{xy}$  座標平面において不等式  $0 \leq x \leq 1$  と方程式  $y = 2\sqrt{x^3}$  との連立で表 される曲線 C の長さを求める.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left( 2\sqrt{x^3} \right) = 2 \cdot \frac{d}{dx} x^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x} ,$$

| M | xy 座標平面において不等式  $0 \leq x \leq 1$  と方程式  $y = 2\sqrt{x^3}$  との連立で表

される曲線 C の長さを求める.  $y=2\sqrt{x^3}$  より,

される曲線 
$$C$$
 の長さを求める.  $y=2\sqrt{x^3}$  より, 
$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\big(2\sqrt{x^3}\big)=2\cdot\frac{d}{dx}x^{\frac{3}{2}}=2\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=3\sqrt{x}\ ,$$
 
$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\left(3\sqrt{x}\right)^2=9x+1\ .$$

| M | xy 座標平面において不等式  $0 \leq x \leq 1$  と方程式  $y = 2\sqrt{x^3}$  との連立で表

される曲線 
$$C$$
 の長さを求める.  $y=2\sqrt{x^3}$  より, 
$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x^3}\right)=2\cdot\frac{d}{dx}x^{\frac{3}{2}}=2\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=3\sqrt{x}\ ,$$

 $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(3\sqrt{x}\right)^2 = 9x + 1$ .

| M | xy 座標平面において不等式  $0 \leq x \leq 1$  と方程式  $y = 2\sqrt{x^3}$  との連立で表

$$\int_{0}^{1} \int_{1}^{1} \frac{(dy)^{2}}{(dy)^{2}} dy = \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \frac{(dy)^{2}}{(dy)^{2}} dy$$

曲線 C の長さは  $\int_0^1 \sqrt{1+\left(rac{dy}{dx}
ight)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{9x+1} \, dx$  である.

の長さは 
$$\int_0 \sqrt{1+\left(rac{dy}{dx}
ight)} \ dx = \int_0^1 \sqrt{9x+1} \ dx$$
 である

される曲線 
$$C$$
 の長さを求める.  $y=2\sqrt{x^3}$  より、 
$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(2\sqrt{x^3})=2\cdot\frac{d}{dx}x^{\frac{3}{2}}=2\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=3\sqrt{x} \ ,$$
  $1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\left(3\sqrt{x}\right)^2=9x+1 \ .$ 

| M | xy 座標平面において不等式  $0 \leq x \leq 1$  と方程式  $y = 2\sqrt{x^3}$  との連立で表

曲線 C の長さは  $\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\int_0^1 \sqrt{9x+1}\,dx$  である. 変数 t を

t=9x+1 とおく.  $\frac{dt}{dx}=9$  より  $dx=\frac{1}{9}dt$ .

される曲線 
$$C$$
 の長さを求める.  $y=2\sqrt{x^3}$  より, 
$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\big(2\sqrt{x^3}\big)=2\cdot\frac{d}{dx}x^{\frac{3}{2}}=2\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=3\sqrt{x}\ ,$$
  $1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\left(3\sqrt{x}\right)^2=9x+1\ .$ 

曲線 C の長さは  $\int_0^1 \sqrt{1+\left(rac{dy}{dx}
ight)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{9x+1} \, dx$  である. 変数 t を

| M | xy 座標平面において不等式  $0 \leq x \leq 1$  と方程式  $y = 2\sqrt{x^3}$  との連立で表

t=9x+1 とおく.  $\frac{dt}{dx}=9$  より  $dx=\frac{1}{9}dt$  . x=0 のとき t=1 . x=1

のとき t=10.

例 
$$xy$$
 座標平面において不等式  $0 \le x \le 1$  と方程式  $y = 2\sqrt{x^3}$  との連立で表される曲線  $C$  の長さを求める.  $y = 2\sqrt{x^3}$  より, 
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(2\sqrt{x^3}\right) = 2 \cdot \frac{d}{dx} x^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x} \ ,$$
 
$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(3\sqrt{x}\right)^2 = 9x + 1 \ .$$
 曲線  $C$  の長さは  $\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{9x + 1} \, dx$  である. 変数  $t$  を

t=9x+1 とおく.  $\frac{dt}{dx}=9$  より  $dx=\frac{1}{9}dt$  . x=0 のとき t=1 . x=1

のとき t=10 . 曲線 C の長さは

$$\int_0^1 \sqrt{9x}$$

 $\int_0^1 \sqrt{9x+1} \, dx = \int_1^{10} \sqrt{t} \, \frac{1}{9} \, dt = \frac{1}{9} \int_1^{10} t^{\frac{1}{2}} \, dt = \frac{1}{9} \left[ \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_1^{10} = \frac{2}{27} \left( \sqrt{10^3} - \sqrt{1^3} \right)$ 

曲線 C の長さは である.

問
$$8.5.1$$
  $xy$  座標平面において不等式  $0 \le x \le 8$  と方程式  $y = \frac{\sqrt{x^3}}{3}$  との連立で表される曲線  $C$  の長さを求めよ. 
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{\sqrt{x^3}}{3} = \frac{1}{3} \frac{d}{dx} x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{x}$$
 なので、曲線  $C$  の長さは

変数 t を t= とおく.  $\dfrac{dt}{dx}=$  なので dx= dt . x=0 のとき t = . x = 8 のとき t = .

曲線 C の長さは である.

 $\int_{0}^{8} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{2}} dx = \int_{0}^{8} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^{2}} dx = \int_{0}^{8} \sqrt{\frac{x}{4} + 1} dx.$ 

$$\frac{g}{x} = \frac{d}{dx} \frac{\sqrt{x}}{3} = \frac{1}{3} \frac{d}{dx} x^{\frac{7}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{g}{2} x^{\frac{7}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{x}$$
 なので、曲線  $C$  の長さは 
$$\int_{0}^{8} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{2}} dx = \int_{0}^{8} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^{2}} dx = \int_{0}^{8} \sqrt{\frac{x}{4} + 1} dx .$$

変数 t を  $t=rac{x}{4}+1$  とおく.  $rac{dt}{dx}=rac{1}{4}$  なので dx=4dt . x=0 のとき

t=1 . x=8 のとき t=3 .  $\int_0^8 \sqrt{\frac{x}{4} + 1} dx = 4 \int_1^3 t^{\frac{1}{2}} dt = 4 \left[ \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_1^3 = 8\sqrt{3} - \frac{8}{3}.$ 

$$\int_0^{\infty} \sqrt{\frac{x}{4}} + 1 dx = 4 \int_1^3 t^{\frac{7}{2}} dt = 4 \left\lfloor \frac{2}{3} t^{\frac{7}{2}} \right\rfloor_1 = 8\sqrt{3} - \frac{8}{3} .$$
 曲線  $C$  の長さは  $8\sqrt{3} - \frac{8}{3}$  である.

例 
$$xy$$
 座標平面において不等式  $0 \le x \le 3$  と方程式  $y = \sqrt{12 - x^2}$  との連立で表される曲線  $C$  の長さを求める.

例 
$$xy$$
 座標平面において不等式  $0 \le x \le 3$  と方程式  $y = \sqrt{12 - x^2}$  との連立で表される曲線  $C$  の長さを求める.  $0 \le x \le 3$  の範囲で、変数  $x$  の関数  $y = \sqrt{12 - x^2}$  について、 
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{12 - x^2} = \frac{d}{dx}(12 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(12 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{12 - x^2}}$$
 ,

 $y = \sqrt{12 - x^2}$  について,

 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{12 - x^2} = \frac{d}{dx}(12 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(12 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{12 - x^2}},$ 

例 
$$xy$$
 座標平面において不等式  $0 \le x \le 3$  と方程式  $y = \sqrt{12 - x^2}$  との連立で表される曲線  $C$  の長さを求める。  $0 \le x \le 3$  の範囲で、変数  $x$  の関数  $y = \sqrt{12 - x^2}$  について、 
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{12 - x^2} = \frac{d}{dx}(12 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(12 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{12 - x^2}}$$
 ,

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{12 - x^2}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{12 - x^2}} = \sqrt{\frac{12}{12 - x^2}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12 - x^2}},$$

立で表される曲線 
$$C$$
 の長さを求める.  $0 \le x \le 3$  の範囲で、変数  $x$  の関数  $y = \sqrt{12-x^2}$  について、 
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{12-x^2} = \frac{d}{dx}(12-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(12-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{12-x^2}} \; ,$$

 $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{12-x^2}}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{12-x^2}} = \sqrt{\frac{12}{12-x^2}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12-x^2}}$ 

例 xy 座標平面において不等式  $0 \le x \le 3$  と方程式  $y = \sqrt{12 - x^2}$  との連

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)} = \sqrt{1 + \left(-\frac{u}{\sqrt{12 - x^2}}\right)} = \sqrt{1 + \frac{u}{12 - x^2}} = \sqrt{\frac{12}{12 - x^2}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12 - x^2}}$$
 曲線  $C$  の長さは

曲線 
$$C$$
 の長さは  $\int_{-1}^3 \sqrt{12} dy$   $\int_{-1}^3 \sqrt{12} dy$ 

$$\int_{-\infty}^{3} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{-\infty}^{3} \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12}} dx$$

$$\int_{0}^{3} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{2}} dx = \int_{0}^{3} \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12 - x^{2}}} dx$$

$$J_0 \bigvee dx$$
  $J_0 \sqrt{12-x^2}$ 

例 
$$xy$$
 座標平面において不等式  $0 \le x \le 3$  と方程式  $y = \sqrt{12-x^2}$  との連立で表される曲線  $C$  の長さを求める.  $0 \le x \le 3$  の範囲で、変数  $x$  の関数  $y = \sqrt{12-x^2}$  について、 
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{12-x^2} = \frac{d}{dx}(12-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(12-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{12-x^2}} \;,$$
 
$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{12-x^2}}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{12-x^2}} = \sqrt{\frac{12}{12-x^2}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12-x^2}} \;,$$
 曲線  $C$  の長さは 
$$\int_0^3 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^3 \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12-x^2}} dx = \sqrt{12} \left[\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{12}}\right]_0^3 = \sqrt{12} \left(\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin^{-1}0\right) = \sqrt{12} \cdot \frac{\pi}{3}$$
 
$$= \frac{\sqrt{12}\pi}{2} \;.$$

終

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{36 - x^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} =$$

 $\int_{0}^{3} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx =$ 

表される曲線 C の長さを求めよ.

問8.5.2 xy 座標平面において不等式  $0 \le x \le 3$  と方程式  $y = \sqrt{36-x^2}$  とで

 $0 \le x \le 3$  の範囲で、変数 x の関数  $y = \sqrt{36 - x^2}$  について.

曲線 C の長さは である.

問
$$8.5.2$$
  $xy$  座標平面において不等式  $0 \le x \le 3$  と方程式  $y = \sqrt{36 - x^2}$  とで表される曲線  $C$  の長さを求めよ.  $0 \le x \le 3$  の範囲で、変数  $x$  の関数  $y = \sqrt{36 - x^2}$  について、

 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{36-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{36-x^2}}\cdot(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{36-x^2}}$ 

$$\sqrt{1+\left(rac{dy}{dx}
ight)^2}=$$

曲線 C の長さは である.

 $\int_{0}^{3} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx =$ 

問
$$8.5.2$$
  $xy$  座標平面において不等式  $0 \le x \le 3$  と方程式  $y = \sqrt{36 - x^2}$  とで表される曲線  $C$  の長さを求めよ.  $0 \le x \le 3$  の範囲で、変数  $x$  の関数  $y = \sqrt{36 - x^2}$  について、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{36 - x^2} = \frac{1}{2\sqrt{36 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{36 - x^2}},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{36 - x^2}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{36 - x^2}} = \sqrt{\frac{36}{36 - x^2}}$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dx}\right)} = \sqrt{1 + \left(-\frac{\sqrt{36 - x^2}}{\sqrt{36 - x^2}}\right)} = \sqrt{1 + \frac{36 - x^2}{36 - x^2}} = \sqrt{\frac{6}{36 - x^2}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{36 - x^2}},$$

$$= \frac{6}{\sqrt{36 - x^2}},$$

$$\int_{a}^{3} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx =$$

曲線 C の長さは である.

表される曲線 
$$C$$
 の長さを求めよ。  $0 \le x \le 3$  の範囲で、変数  $x$  の関数  $y = \sqrt{36-x^2}$  について、  $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{36-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{36-x^2}}\cdot(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{36-x^2}}$  ,

問8.5.2 xy 座標平面において不等式  $0 \le x \le 3$  と方程式  $y = \sqrt{36-x^2}$  とで

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{36 - x^2}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{36 - x^2}} = \sqrt{\frac{36}{36 - x^2}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{36 - x^2}},$$

$$\int_{-\infty}^{3} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{2}\right)^2} dx = \int_{-\infty}^{3} \frac{6}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{2}\right)^2}} dx$$

$$\int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^3 \frac{6}{\sqrt{36 - x^2}} dx$$

曲線 *C* の長さは である.

問
$$8.5.2$$
  $xy$  座標平面において不等式  $0 \le x \le 3$  と方程式  $y = \sqrt{36-x^2}$  とで表される曲線  $C$  の長さを求めよ.  $0 \le x \le 3$  の範囲で、変数  $x$  の関数  $y = \sqrt{36-x^2}$  について、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{36 - x^2} = \frac{1}{2\sqrt{36 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{36 - x^2}} ,$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{36 - x^2}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{36 - x^2}} = \sqrt{\frac{36}{36 - x^2}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{36 - x^2}},$$

$$\int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^3 \frac{6}{\sqrt{36 - x^2}} dx = 6 \left[\sin^{-1} \frac{x}{6}\right]_0^3$$
$$= 6 \left(\sin^{-1} \frac{1}{2} - \sin^{-1} 0\right) = 6 \cdot \frac{\pi}{6}$$

曲線 C の長さは  $\pi$  である.

終