8. 拡充 2　座標空間における立体領域の体積

xyz 座標空間には x 軸と y 軸と z 軸との 3 本の数直線が設定されている.

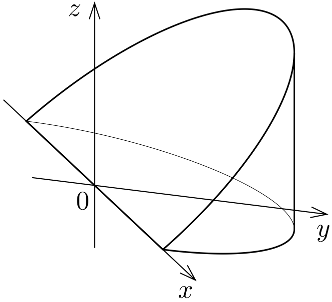
xyz 座標空間には x 軸と y 軸と z 軸との 3 本の数直線が設定されている．
xyz 座標空間における立体領域 V の体積を求めるために，

実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直な平面と V との共通部分を考えるとか，

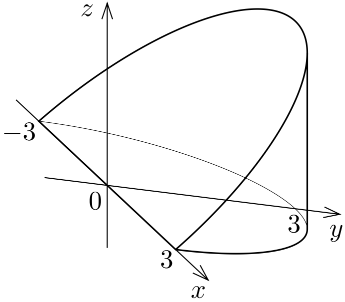
実数 y を座標とする y 軸の点が属し y 軸に垂直な平面と V との共通部分を考えるとか，

実数 z を座標とする z 軸の点が属し z 軸に垂直な平面と V との共通部分を考えるとかの方法がある．

$\boxed{例}$ xyz 座標空間において不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ と $0 \leq z \leq y$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める.



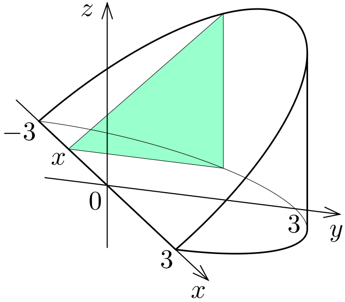
$\boxed{\text{例}}$ xyz 座標空間において不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ と $0 \leq z \leq y$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める.



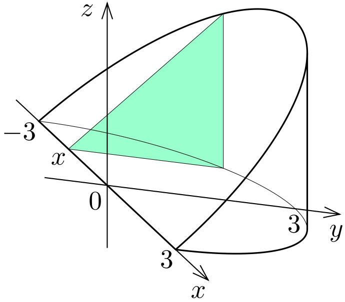
　不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ より, $x^2-9 \leq -y^2 \leq 0$, $(x+3)(x-3) \leq 0$, $-3 \leq x \leq 3$.

$\boxed{例}$ xyz 座標空間において不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ と $0 \leq z \leq y$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める.

　不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ より, $x^2-9 \leq -y^2 \leq 0$, $(x+3)(x-3) \leq 0$, $-3 \leq x \leq 3$. この範囲の実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直な平面と V との共通部分の形を考える.

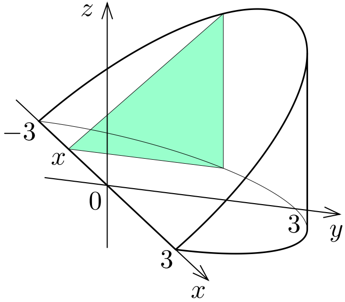


例 xyz 座標空間において不等式 $x^2+y^2\leq 9$ と $0\leq z\leq y$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める.



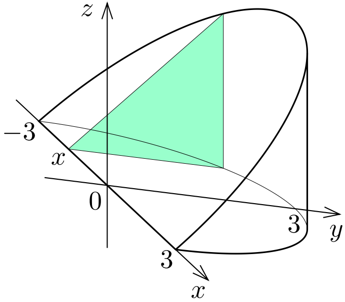
不等式 $x^2+y^2\leq 9$ より, $x^2-9\leq -y^2\leq 0$, $(x+3)(x-3)\leq 0$, $-3\leq x\leq 3$. この範囲の実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直な平面と V との共通部分の形を考える. x 軸に垂直な平面において, 点の x 座標は一定なので, 点の y 座標と z 座標とだけが様々になる ; なので x 軸に垂直な平面と V との共通部分の形は yz 座標平面で表せる.

例 xyz 座標空間において不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ と $0 \leq z \leq y$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める．



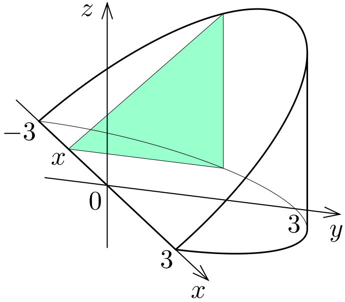
　不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ より，$x^2-9 \leq -y^2 \leq 0$ ，$(x+3)(x-3) \leq 0$ ，$-3 \leq x \leq 3$ ．この範囲の実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直な平面と V との共通部分の形を考える．不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ を y について解く：

$\boxed{\text{例}}$ xyz 座標空間において不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ と $0 \leq z \leq y$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める．



不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ より，$x^2-9 \leq -y^2 \leq 0$，$(x+3)(x-3) \leq 0$，$-3 \leq x \leq 3$．この範囲の実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直な平面と V との共通部分の形を考える．不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ を y について解く：$y^2-(9-x^2) \leq 0$，$\left(y+\sqrt{9-x^2}\right)\left(y-\sqrt{9-x^2}\right) \leq 0$，$-\sqrt{9-x^2} \leq y \leq \sqrt{9-x^2}$．

例 xyz 座標空間において不等式 $x^2+y^2\leq 9$ と $0\leq z\leq y$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める.

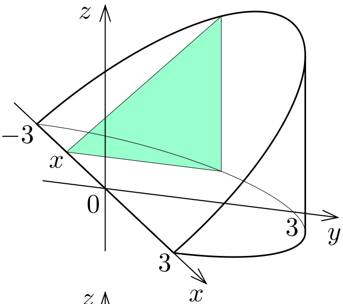


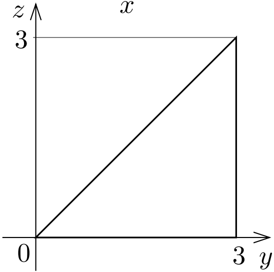
　不等式 $x^2+y^2\leq 9$ より, $x^2-9\leq -y^2\leq 0$, $(x+3)(x-3)\leq 0$, $-3\leq x\leq 3$. この範囲の実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直な平面と V との共通部分の形を考える. 不等式 $x^2+y^2\leq 9$ を y について解く: $y^2-(9-x^2)\leq 0$, $\left(y+\sqrt{9-x^2}\right)\left(y-\sqrt{9-x^2}\right)\leq 0$, $-\sqrt{9-x^2}\leq y\leq\sqrt{9-x^2}$. この不等式と不等式 $y\geq 0$ とより $0\leq y\leq\sqrt{9-x^2}$.

$\boxed{\text{例}}$ xyz 座標空間において不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ と $0 \leq z \leq y$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める.

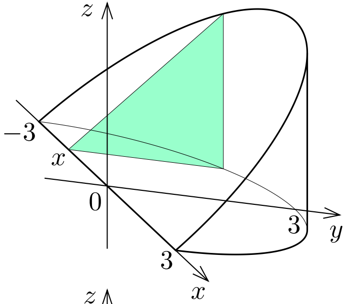
不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ より, $x^2-9 \leq -y^2 \leq 0$, $(x+3)(x-3) \leq 0$, $-3 \leq x \leq 3$. この範囲の実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直な平面と V との共通部分の形を考える. 不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ を y について解く: $y^2-(9-x^2) \leq 0$, $\left(y+\sqrt{9-x^2}\right)\left(y-\sqrt{9-x^2}\right) \leq 0$, $-\sqrt{9-x^2} \leq y \leq \sqrt{9-x^2}$. この不等式と不等式 $y \geq 0$ とより $0 \leq y \leq \sqrt{9-x^2}$. この不等式と不等式 $0 \leq z \leq y$ との連立は, yz 座標平面において,

囲まれる領域を表す.

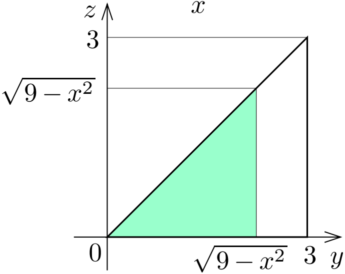




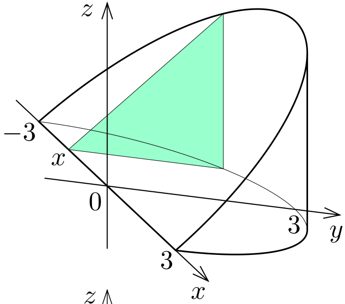
例 xyz 座標空間において不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ と $0 \leq z \leq y$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める.

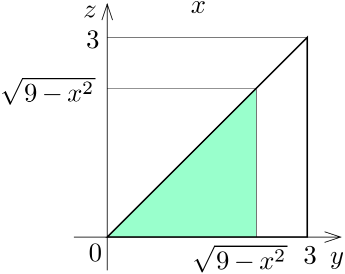


不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ より, $x^2-9 \leq -y^2 \leq 0$, $(x+3)(x-3) \leq 0$, $-3 \leq x \leq 3$. この範囲の実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直な平面と V との共通部分の形を考える. 不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ を y について解く: $y^2-(9-x^2) \leq 0$, $\left(y+\sqrt{9-x^2}\right)\left(y-\sqrt{9-x^2}\right) \leq 0$, $-\sqrt{9-x^2} \leq y \leq \sqrt{9-x^2}$. この不等式と不等式 $y \geq 0$ とより $0 \leq y \leq \sqrt{9-x^2}$. この不等式と不等式 $0 \leq z \leq y$ との連立は, yz 座標平面において, 直角を挟む 2 辺の長さが $\sqrt{9-x^2}$ である直角二等辺三角形で囲まれる領域を表す.



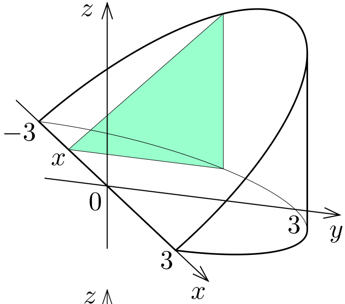
$-3 \leq x \leq 3$ である実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直な平面と V との共通部分の形は直角を挟む 2 辺の長さが $\sqrt{9-x^2}$ である直角二等辺三角形なので，

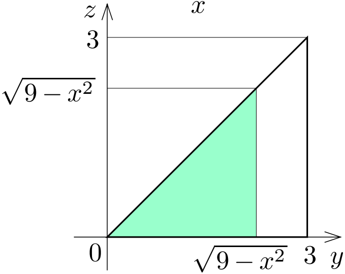




$-3 \leq x \leq 3$ である実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直な平面と V との共通部分の形は直角を挟む 2 辺の長さが $\sqrt{9-x^2}$ である直角二等辺三角形なので，その面積 $S(x)$ は

$$S(x) = \frac{1}{2}\sqrt{9-x^2}\sqrt{9-x^2} = \frac{9-x^2}{2} \ .$$



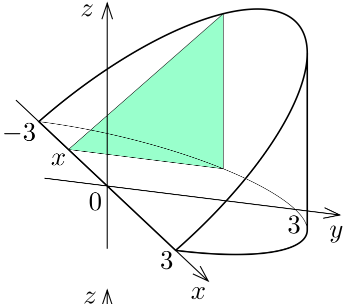


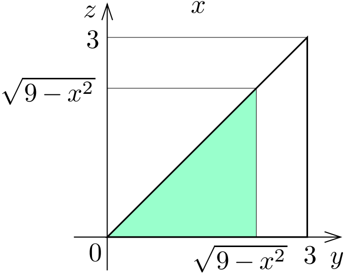
$-3 \leq x \leq 3$ である実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直な平面と V との共通部分の形は直角を挟む 2 辺の長さが $\sqrt{9-x^2}$ である直角二等辺三角形なので，その面積 $S(x)$ は

$$S(x) = \frac{1}{2}\sqrt{9-x^2}\sqrt{9-x^2} = \frac{9-x^2}{2} \ .$$

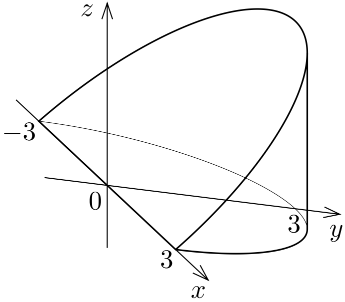
立体領域 V の体積は，

$$\int_{-3}^{3} S(x)\,dx = \int_{-3}^{3} \frac{9-x^2}{2}\,dx = \left[\frac{9}{2}x - \frac{1}{6}x^3\right]_{-3}^{3}$$
$$= 18 \ .$$

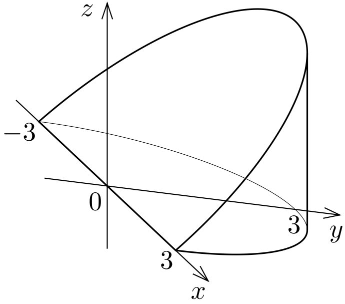




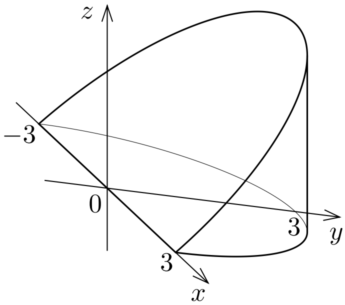
y 軸に垂直な平面と立体領域 V との共通部分を考えてもよい.



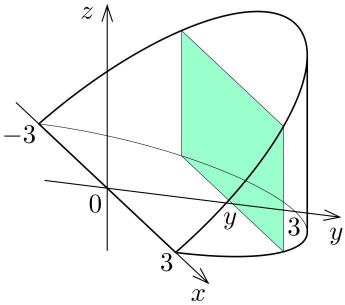
不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ より, $y^2-9 \leq -x^2 \leq 0$, $(y+3)(y-3) \leq 0$, $-3 \leq y \leq 3$.



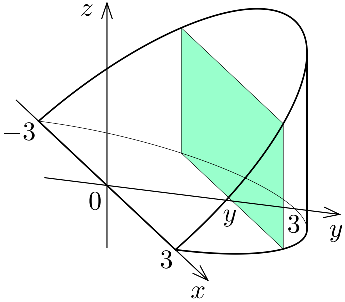
不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ より， $y^2-9 \leq -x^2 \leq 0$ ， $(y+3)(y-3) \leq 0$ ， $-3 \leq y \leq 3$ ．更に $y \geq 0$ なので $0 \leq y \leq 3$ ．



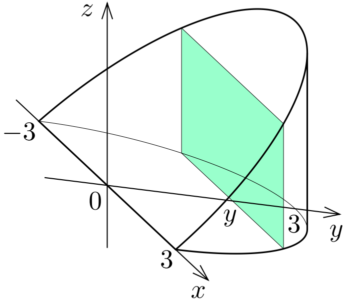
不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ より, $y^2-9 \leq -x^2 \leq 0$, $(y+3)(y-3) \leq 0$, $-3 \leq y \leq 3$. 更に $y \geq 0$ なので $0 \leq y \leq 3$. この範囲の実数 y を座標とする y 軸の点が属し y 軸に垂直な平面と V との共通部分の形を考える.



不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ より, $y^2-9 \leq -x^2 \leq 0$, $(y+3)(y-3) \leq 0$, $-3 \leq y \leq 3$. 更に $y \geq 0$ なので $0 \leq y \leq 3$. この範囲の実数 y を座標とする y 軸の点が属し y 軸に垂直な平面と V との共通部分の形を考える. y 軸に垂直な平面において, 点の y 座標は一定なので, 点の x 座標と z 座標とだけが様々になる; なので y 軸に垂直な平面と V との共通部分の形は xz 座標平面で表せる.

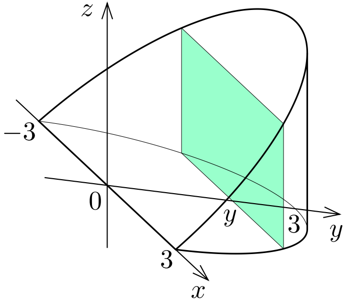


不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ より, $y^2-9 \leq -x^2 \leq 0$, $(y+3)(y-3) \leq 0$, $-3 \leq y \leq 3$. 更に $y \geq 0$ なので $0 \leq y \leq 3$. この範囲の実数 y を座標とする y 軸の点が属し y 軸に垂直な平面と V との共通部分の形を考える.



不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ を x について解く:

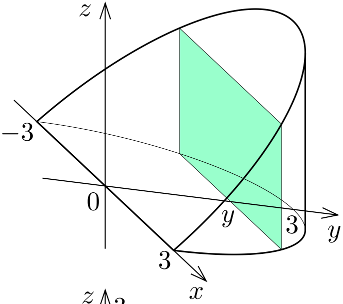
不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ より，$y^2-9 \leq -x^2 \leq 0$ ，$(y+3)(y-3) \leq 0$ ，$-3 \leq y \leq 3$ ．更に $y \geq 0$ なので $0 \leq y \leq 3$ ．この範囲の実数 y を座標とする y 軸の点が属し y 軸に垂直な平面と V との共通部分の形を考える．



不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ を x について解く：

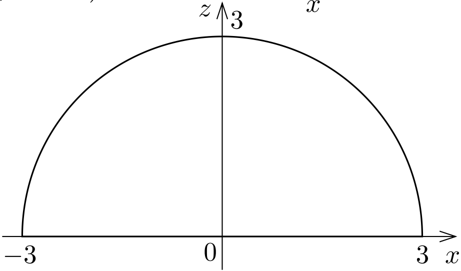
$x^2-(9-y^2) \leq 0$ ，$\left(x+\sqrt{9-y^2}\right)\left(x-\sqrt{9-y^2}\right) \leq 0$ ，$-\sqrt{9-y^2} \leq x \leq \sqrt{9-y^2}$ ．

不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ より， $y^2-9 \leq -x^2 \leq 0$ ， $(y+3)(y-3) \leq 0$ ， $-3 \leq y \leq 3$ ．更に $y \geq 0$ なので $0 \leq y \leq 3$ ．この範囲の実数 y を座標とする y 軸の点が属し y 軸に垂直な平面と V との共通部分の形を考える．

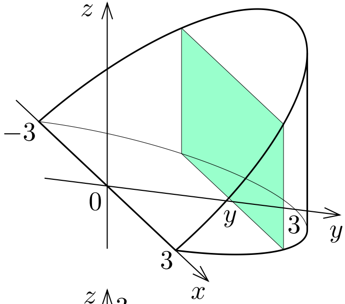


不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ を x について解く：
$x^2-(9-y^2) \leq 0$ ， $\left(x+\sqrt{9-y^2}\right)\left(x-\sqrt{9-y^2}\right) \leq 0$ ， $-\sqrt{9-y^2} \leq x \leq \sqrt{9-y^2}$ ．この不等式と不等式 $0 \leq z \leq y$ との連立は，xz 平面において，

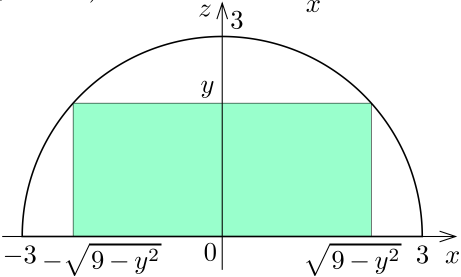
で囲まれる領域を表す．



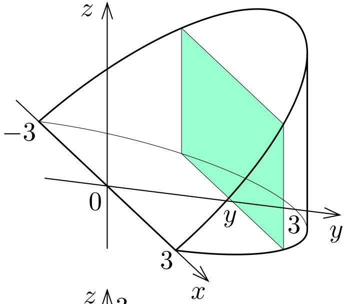
不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ より, $y^2-9 \leq -x^2 \leq 0$, $(y+3)(y-3) \leq 0$, $-3 \leq y \leq 3$. 更に $y \geq 0$ なので $0 \leq y \leq 3$. この範囲の実数 y を座標とする y 軸の点が属し y 軸に垂直な平面と V との共通部分の形を考える.

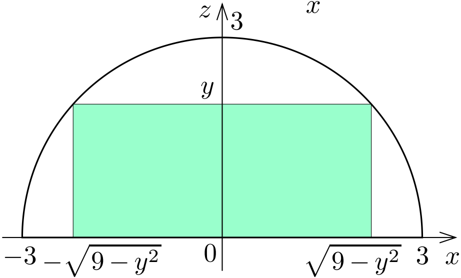


不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ を x について解く:
$x^2-(9-y^2) \leq 0$, $\left(x+\sqrt{9-y^2}\right)\left(x-\sqrt{9-y^2}\right) \leq 0$, $-\sqrt{9-y^2} \leq x \leq \sqrt{9-y^2}$. この不等式と不等式 $0 \leq z \leq y$ との連立は, xz 平面において, x 軸方向の辺の長さが $2\sqrt{9-y^2}$ で z 軸方向の辺の長さが y である長方形で囲まれる領域を表す.



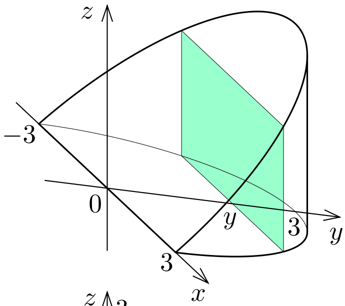
$0 \leq y \leq 3$ である実数 y を座標とする y 軸の点が属し y 軸に垂直な平面と V との共通部分の形は辺の長さが $2\sqrt{9-y^2}$ と y である長方形で囲まれる領域なので,

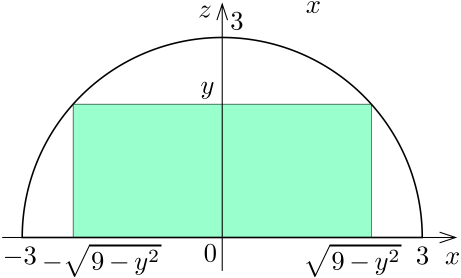




$0 \leq y \leq 3$ である実数 y を座標とする y 軸の点が属し y 軸に垂直な平面と V との共通部分の形は辺の長さが $2\sqrt{9-y^2}$ と y である長方形で囲まれる領域なので，その面積 $S(y)$ は

$$S(y) = 2\sqrt{9-y^2}\,y = 2y\sqrt{9-y^2}\ .$$

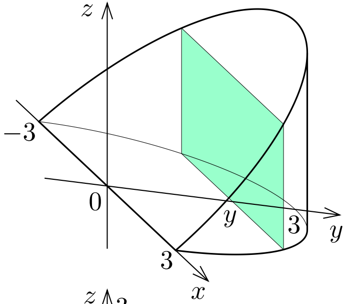


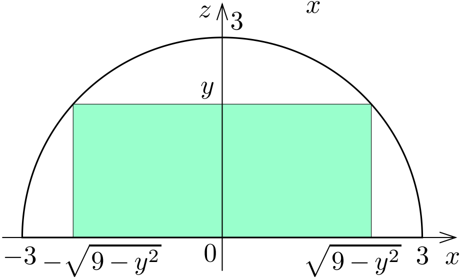


$0 \leq y \leq 3$ である実数 y を座標とする y 軸の点が属し y 軸に垂直な平面と V との共通部分の形は辺の長さが $2\sqrt{9-y^2}$ と y である長方形で囲まれる領域なので，その面積 $S(y)$ は

$$S(y) = 2\sqrt{9-y^2}\,y = 2y\sqrt{9-y^2} \ .$$

変数 t を $t = 9 - y^2$ とおく.





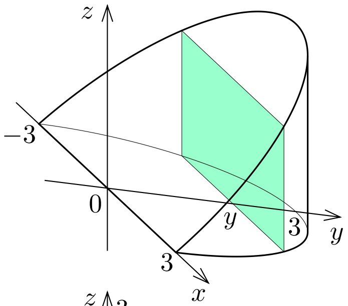
$0 \leq y \leq 3$ である実数 y を座標とする y 軸の点が属し y 軸に垂直な平面と V との共通部分の形は辺の長さが $2\sqrt{9-y^2}$ と y である長方形で囲まれる領域なので，その面積 $S(y)$ は

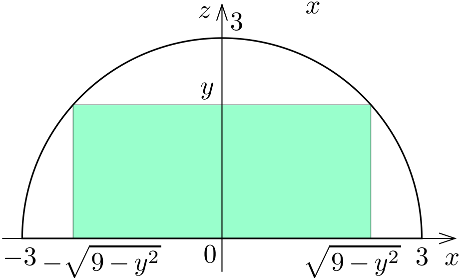
$$S(y) = 2\sqrt{9-y^2}\,y = 2y\sqrt{9-y^2} \ .$$

変数 t を $t = 9 - y^2$ とおく.

$\dfrac{dt}{dy} = -2y$ なので $2y\,dy = -dt$.

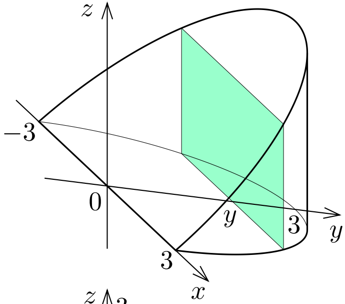
$y = 0$ のとき $t = 9$, $y = 3$ のとき $t = 0$.





$0 \leq y \leq 3$ である実数 y を座標とする y 軸の点が属し y 軸に垂直な平面と V との共通部分の形は辺の長さが $2\sqrt{9-y^2}$ と y である長方形で囲まれる領域なので，その面積 $S(y)$ は

$$S(y) = 2\sqrt{9-y^2}\,y = 2y\sqrt{9-y^2} \ .$$

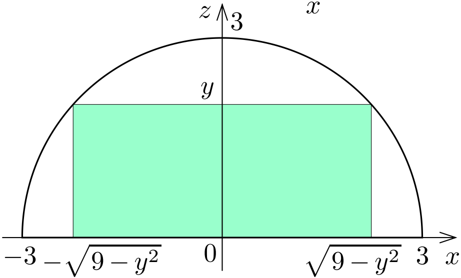


変数 t を $t = 9 - y^2$ とおく.

$\dfrac{dt}{dy} = -2y$ なので $2y\,dy = -dt$.

$y = 0$ のとき $t = 9$ ， $y = 3$ のとき $t = 0$. 立体領域 V の体積は

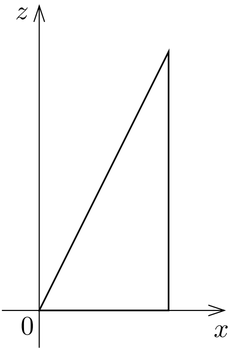
$$\int_0^3 2y\sqrt{9-y^2}\,dy = \int_9^0 t^{\frac{1}{2}}(-dt)$$
$$= -\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_9^0$$
$$= 18 \ .$$



故に立体領域 V の体積は 18 である. 終

$\boxed{問8.拡充2.1}$ xyz 座標空間において不等式 $x^2+y^2 \leq 3$ で表される円柱体と不等式 $0 \leq z \leq 2x$ とで表される領域の共通部分 V の体積を求めよ．

不等式 $x^2+y^2 \leq 3$ より，$y^2-3 \leq -x^2 \leq 0$ ，$\left(y \qquad\right)\left(y \qquad\right) \leq 0$ ，$\qquad \leq y \leq \qquad$ ．この範囲の実数 y を座標とする y 軸の点が属し y 軸に垂直な平面と立体領域 V との共通部分の形を考える．不等式 $x^2+y^2 \leq 3$ を x について解く：$x^2-(3-y^2) \leq 0$ ，$\left(x \qquad\qquad\right)\left(x \qquad\qquad\right) \leq 0$ ．$\qquad\qquad \leq x \leq \qquad\qquad$ ．この不等式と不等式 $0 \leq 2x$ つまり $0 \leq x$ とより $0 \leq x \leq \qquad\qquad$ ．この不等式と不等式 $0 \leq z \leq 2x$ との連立は，xz 座標平面において，直角を挟む 2 辺の長さが $\qquad\qquad$ と $\qquad\qquad$ である直角三角形で囲まれる領域を表す；その面積 $S(y)$ は



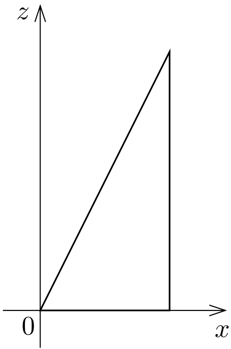
$$S(y) =$$

$\boxed{問8.拡充2.1}$ xyz 座標空間において不等式 $x^2+y^2 \leq 3$ で表される円柱体と不等式 $0 \leq z \leq 2x$ とで表される領域の共通部分 V の体積を求めよ．

不等式 $x^2+y^2 \leq 3$ より，$y^2-3 \leq -x^2 \leq 0$ ，$\left(y+\sqrt{3}\right)\left(y-\sqrt{3}\right) \leq 0$ ，$-\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$ ．この範囲の実数 y を座標とする y 軸の点が属し y 軸に垂直な平面と立体領域 V との共通部分の形を考える．不等式 $x^2+y^2 \leq 3$ を x について解く：$x^2-(3-y^2) \leq 0$ ，

$\left(x \qquad\qquad\right)\left(x \qquad\qquad\right) \leq 0$ ． $\qquad \leq$

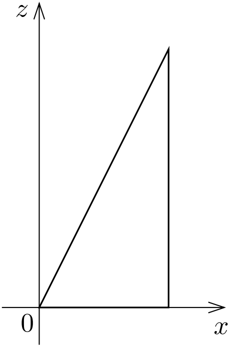
$x \leq \qquad$ ．この不等式と不等式 $0 \leq 2x$ つまり $0 \leq x$ とより $0 \leq x \leq \qquad$ ．この不等式と不等式 $0 \leq z \leq 2x$ との連立は，xz 座標平面において，直角を挟む 2 辺の長さが $\qquad$ と $\qquad$ である直角三角形で囲まれる領域を表す；その面積 $S(y)$ は



$$S(y) =$$

$\boxed{\text{問}8.\text{拡充}2.1}$ xyz 座標空間において不等式 $x^2+y^2\leq 3$ で表される円柱体と不等式 $0\leq z\leq 2x$ とで表される領域の共通部分 V の体積を求めよ．

不等式 $x^2+y^2\leq 3$ より，$y^2-3\leq -x^2\leq 0$ ，$\left(y+\sqrt{3}\right)\left(y-\sqrt{3}\right)\leq 0$ ，$-\sqrt{3}\leq y\leq\sqrt{3}$ ．この範囲の実数 y を座標とする y 軸の点が属し y 軸に垂直な平面と立体領域 V との共通部分の形を考える．不等式 $x^2+y^2\leq 3$ を x について解く：$x^2-(3-y^2)\leq 0$ ，$\left(x+\sqrt{3-y^2}\right)\left(x-\sqrt{3-y^2}\right)\leq 0$ ．$-\sqrt{3-y^2}\leq x\leq\sqrt{3-y^2}$ ．この不等式と不等式 $0\leq 2x$ つまり $0\leq x$ とより $0\leq x\leq\sqrt{3-y^2}$ ．この不等式と不等式 $0\leq z\leq 2x$ との連立は，xz 座標平面において，直角を挟む 2 辺の長さが　　　　　と　　　　　である直角三角形で囲まれる領域を表す；その面積 $S(y)$ は

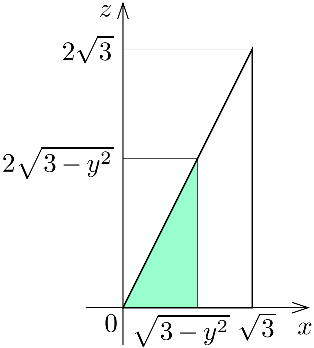


$$S(y)=$$

$\boxed{\text{問}8.\text{拡充}2.1}$ xyz 座標空間において不等式 $x^2+y^2\leq 3$ で表される円柱体と不等式 $0\leq z\leq 2x$ とで表される領域の共通部分 V の体積を求めよ．

不等式 $x^2+y^2\leq 3$ より，$y^2-3\leq -x^2\leq 0$ ，$\left(y+\sqrt{3}\right)\left(y-\sqrt{3}\right)\leq 0$ ，$-\sqrt{3}\leq y\leq\sqrt{3}$ ．この範囲の実数 y を座標とする y 軸の点が属し y 軸に垂直な平面と立体領域 V との共通部分の形を考える．不等式 $x^2+y^2\leq 3$ を x について解く：$x^2-(3-y^2)\leq 0$ ，$\left(x+\sqrt{3-y^2}\right)\left(x-\sqrt{3-y^2}\right)\leq 0$ ．$-\sqrt{3-y^2}\leq x\leq\sqrt{3-y^2}$ ．この不等式と不等式 $0\leq 2x$ つまり $0\leq x$ とより $0\leq x\leq\sqrt{3-y^2}$ ．この不等式と不等式 $0\leq z\leq 2x$ との連立は，xz 座標平面において，直角を挟む 2 辺の長さが $\sqrt{3-y^2}$ と $2\sqrt{3-y^2}$ である直角三角形で囲まれる領域を表す；その面積 $S(y)$ は

$$S(y)=\frac{1}{2}\sqrt{3-y^2}\,2\sqrt{3-t^2}=3-y^2 \ .$$



立体領域 V の体積は,

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} S(y)\,dy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3-y^2)\,dy = \left[3y - \frac{1}{3}y^3\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}\ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{例}$ xyz 座標空間において不等式 $x \geqq 0$ と $x + y^2 + z^2 \leqq 5$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める.

$\boxed{\text{例}}$ xyz 座標空間において不等式 $x \geq 0$ と $x+y^2+z^2 \leq 5$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める. x の値に対して不等式 $x+y^2+z^2 \leq 5$ つまり $y^2+z^2 \leq 5-x$ が yz 座標平面において表す領域を考えるために, x 軸に垂直な平面と立体領域 V との共通部分を考える.

$\boxed{例}$ xyz 座標空間において不等式 $x \geq 0$ と $x + y^2 + z^2 \leq 5$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める．不等式 $x \geq 0$ と $x + y^2 + z^2 \leq 5$ とより $0 \leq x \leq x + y^2 + z^2 \leq 5$.

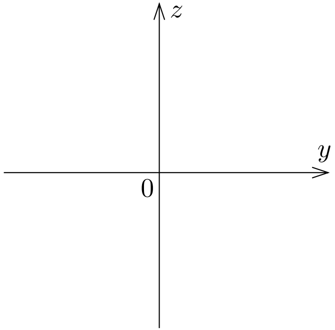
$\boxed{\text{例}}$ xyz 座標空間において不等式 $x \geq 0$ と $x+y^2+z^2 \leq 5$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める．不等式 $x \geq 0$ と $x+y^2+z^2 \leq 5$ とより $0 \leq x \leq x+y^2+z^2 \leq 5$ ． $0 \leq x \leq 5$ である実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直な平面と立体領域

V との共通部分の形を考える.

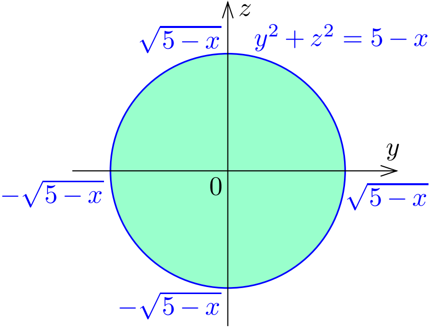
$\boxed{例}$ xyz 座標空間において不等式 $x \geq 0$ と $x+y^2+z^2 \leq 5$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める．不等式 $x \geq 0$ と $x+y^2+z^2 \leq 5$ とより $0 \leq x \leq x+y^2+z^2 \leq 5$ ． $0 \leq x \leq 5$ である実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直な平面と立体領域
V との共通部分の形を考える．不等式
$x+y^2+z^2 \leq 5$ より $y^2+z^2 \leq 5-x$ ．

$\boxed{例}$ xyz 座標空間において不等式 $x \geq 0$ と $x+y^2+z^2 \leq 5$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める．不等式 $x \geq 0$ と $x+y^2+z^2 \leq 5$ とより $0 \leq x \leq x+y^2+z^2 \leq 5$ ． $0 \leq x \leq 5$ である実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直な平面と立体領域 V との共通部分の形を考える．不等式 $x+y^2+z^2 \leq 5$ より $y^2+z^2 \leq 5-x$ ．この不等式は，yz 座標平面において，

で囲まれる領域を表す.

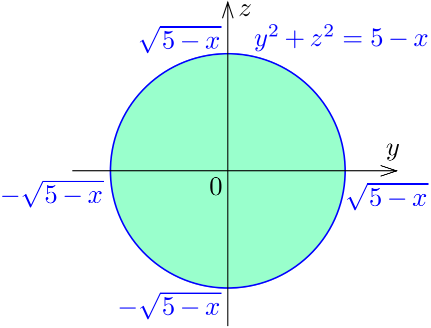


例 xyz 座標空間において不等式 $x \geq 0$ と $x+y^2+z^2 \leq 5$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める．不等式 $x \geq 0$ と $x+y^2+z^2 \leq 5$ とより $0 \leq x \leq x+y^2+z^2 \leq 5$ ． $0 \leq x \leq 5$ である実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直な平面と立体領域 V との共通部分の形を考える．不等式 $x+y^2+z^2 \leq 5$ より $y^2+z^2 \leq 5-x$ ．この不等式は，yz 座標平面において，半径が $\sqrt{5-x}$ である円で囲まれる領域を表す．

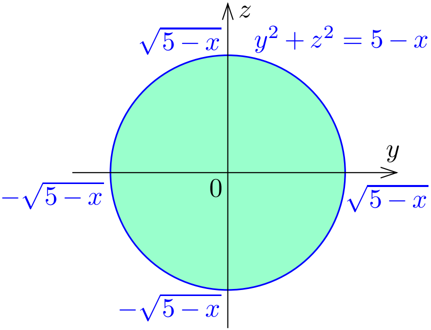


例 xyz 座標空間において不等式 $x \geq 0$ と $x+y^2+z^2 \leq 5$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める．不等式 $x \geq 0$ と $x+y^2+z^2 \leq 5$ とより $0 \leq x \leq x+y^2+z^2 \leq 5$ ． $0 \leq x \leq 5$ である実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直な平面と立体領域 V との共通部分の形を考える．不等式 $x+y^2+z^2 \leq 5$ より $y^2+z^2 \leq 5-x$ ．この不等式は，yz 座標平面において，半径が $\sqrt{5-x}$ である円で囲まれる領域を表す．その面積 $S(x)$ は

$$S(x) = \pi\sqrt{5-x}^{\,2} = \pi(5-x) \ .$$



$\boxed{\text{例}}$ xyz 座標空間において不等式 $x \geq 0$ と $x+y^2+z^2 \leq 5$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める．不等式 $x \geq 0$ と $x+y^2+z^2 \leq 5$ とより $0 \leq x \leq x+y^2+z^2 \leq 5$ ． $0 \leq x \leq 5$ である実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直な平面と立体領域 V との共通部分の形を考える．不等式 $x+y^2+z^2 \leq 5$ より $y^2+z^2 \leq 5-x$ ．この不等式は，yz 座標平面において，半径が $\sqrt{5-x}$ である円で囲まれる領域を表す．その面積 $S(x)$ は



$$S(x) = \pi\sqrt{5-x}^{\,2} = \pi(5-x) \ .$$

立体領域 V の体積は

$$\int_0^5 S(x)\,dx = \int_0^5 \pi(5-x)\,dx = \pi\left[5x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^5 = \pi\left(25-\frac{25}{2}\right) = \frac{25\pi}{2} \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問8.拡充2.2}$ xyz 座標空間において不等式 $0 \leq y \leq 6-x^2-z^2$ で表される立体領域 V の体積を求めよ.

不等式 $0 \leq y \leq 6-x^2-z^2$ より $0 \leq y \leq 6-x^2-z^2 \leq$. $0 \leq y \leq$ である実数 y を座標とする y 軸の点が属す y 軸に垂直な平面と立体領域 V との共通部分の形を考える. 不等式 $y \leq 6-x^2-z^2$ より $x^2+z^2 \leq$; この不等式は, xz 座標平面において, で囲まれる領域を表す ; その面積 $S(y)$ は

$$S(y) =$$

立体領域 V の体積は

$\boxed{問8.拡充2.2}$ xyz 座標空間において不等式 $0 \leq y \leq 6 - x^2 - z^2$ で表される立体領域 V の体積を求めよ.

不等式 $0 \leq y \leq 6 - x^2 - z^2$ より $0 \leq y \leq 6 - x^2 - z^2 \leq 6$. $0 \leq y \leq 6$ である実数 y を座標とする y 軸の点が属す y 軸に垂直な平面と立体領域 V との共通部分の形を考える. 不等式 $y \leq 6 - x^2 - z^2$ より $x^2 + z^2 \leq 6 - y$; この不等式は, xz 座標平面において, で囲まれる領域を表す ; その面積 $S(y)$ は

$$S(y) =$$

立体領域 V の体積は

$\boxed{\text{問8.拡充2.2}}$ xyz 座標空間において不等式 $0 \le y \le 6 - x^2 - z^2$ で表される立体領域 V の体積を求めよ.

　不等式 $0 \le y \le 6 - x^2 - z^2$ より $0 \le y \le 6 - x^2 - z^2 \le 6$. $0 \le y \le 6$ である実数 y を座標とする y 軸の点が属す y 軸に垂直な平面と立体領域 V との共通部分の形を考える. 不等式 $y \le 6 - x^2 - z^2$ より $x^2 + z^2 \le 6 - y$; この不等式は, xz 座標平面において, 半径が $\sqrt{6-y}$ である円で囲まれる領域を表す ; その面積 $S(y)$ は

$$S(y) = \pi \sqrt{6-y}^{\,2} = \pi(6-y) \ .$$

立体領域 V の体積は

$\boxed{\text{問8.拡充2.2}}$ xyz 座標空間において不等式 $0 \le y \le 6 - x^2 - z^2$ で表される立体領域 V の体積を求めよ.

不等式 $0 \le y \le 6 - x^2 - z^2$ より $0 \le y \le 6 - x^2 - z^2 \le 6$. $0 \le y \le 6$ である実数 y を座標とする y 軸の点が属す y 軸に垂直な平面と立体領域 V との共通部分の形を考える. 不等式 $y \le 6 - x^2 - z^2$ より $x^2 + z^2 \le 6 - y$; この不等式は, xz 座標平面において, 半径が $\sqrt{6-y}$ である円で囲まれる領域を表す ; その面積 $S(y)$ は

$$S(y) = \pi\sqrt{6-y}^{\,2} = \pi(6-y) \ .$$

立体領域 V の体積は

$$\int_0^6 S(y)\,dy = \int_0^6 \pi(6-y)\,dt = \pi\left[6y - \frac{1}{2}x^2\right]_0^6 = \pi\left(36 - \frac{36}{2}\right) = 18\pi \ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

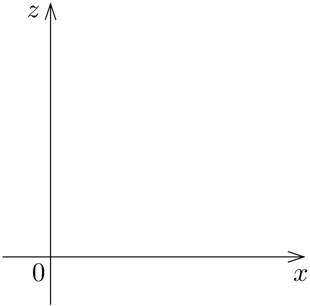
$\boxed{\text{例}}$ xyz 座標空間において不等式 $x \geq 0$ と $0 \leq y \leq 3$ と $z \geq 0$ と $x+z \leq y^2$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める.

$\boxed{例}$ xyz 座標空間において不等式 $x \geq 0$ と $0 \leq y \leq 3$ と $z \geq 0$ と $x+z \leq y^2$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める. y の値に対して不等式 $x+z \leq y^2$ が xz 座標平面において表す領域を考えるために, y 軸に垂直な平面と V との共通部分を考える.

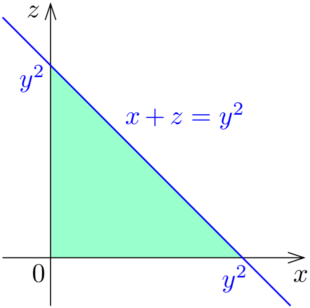
$\boxed{\text{例}}$ xyz 座標空間において不等式 $x \geq 0$ と $0 \leq y \leq 3$ と $z \geq 0$ と $x + z \leq y^2$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める. $0 \leq y \leq 3$ である実数 y を座標とする y 軸の点が属す y 軸に垂直な平面と立体領域 V との共通部分の形を考える.

例 xyz 座標空間において不等式 $x \geq 0$ と $0 \leq y \leq 3$ と $z \geq 0$ と $x + z \leq y^2$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める．$0 \leq y \leq 3$ である実数 y を座標とする y 軸の点が属す y 軸に垂直な平面と立体領域 V との共通部分の形を考える．不等式 $x \geq 0$ と $z \geq 0$ と $x + z \leq y^2$ との連立は，xz 座標平面において，

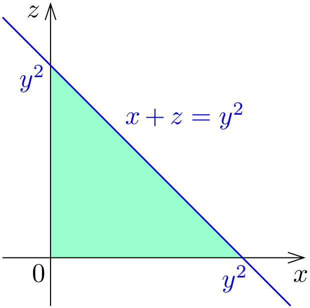
で囲まれる領域を表す．



$\boxed{例}$ xyz 座標空間において不等式 $x \geq 0$ と $0 \leq y \leq 3$ と $z \geq 0$ と $x + z \leq y^2$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める. $0 \leq y \leq 3$ である実数 y を座標とする y 軸の点が属す y 軸に垂直な平面と立体領域 V との共通部分の形を考える. 不等式 $x \geq 0$ と $z \geq 0$ と $x + z \leq y^2$ との連立は, xz 座標平面において, 直角を挟む 2 辺の長さが y^2 である直角二等辺三角形で囲まれる領域を表す.



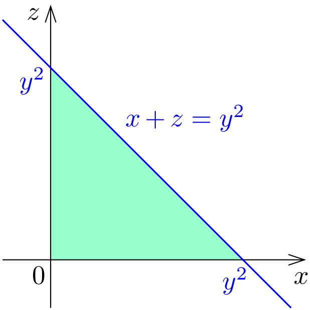
$\boxed{例}$ xyz 座標空間において不等式 $x \geq 0$ と $0 \leq y \leq 3$ と $z \geq 0$ と $x+z \leq y^2$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める．$0 \leq y \leq 3$ である実数 y を座標とする y 軸の点が属す y 軸に垂直な平面と立体領域 V との共通部分の形を考える．不等式 $x \geq 0$ と $z \geq 0$ と $x+z \leq y^2$ との連立は，xz 座標平面において，直角を挟む 2 辺の長さが y^2 である直角二等辺三角形で囲まれる領域を表す．



その面積 $S(x)$ は

$$S(y) = \frac{1}{2} \cdot y^2 \cdot y^2 = \frac{y^4}{2} \ .$$

例 xyz 座標空間において不等式 $x \geq 0$ と $0 \leq y \leq 3$ と $z \geq 0$ と $x+z \leq y^2$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める． $0 \leq y \leq 3$ である実数 y を座標とする y 軸の点が属す y 軸に垂直な平面と立体領域 V との共通部分の形を考える．不等式 $x \geq 0$ と $z \geq 0$ と $x+z \leq y^2$ との連立は，xz 座標平面において，直角を挟む 2 辺の長さが y^2 である直角二等辺三角形で囲まれる領域を表す．



その面積 $S(x)$ は

$$S(y) = \frac{1}{2} \cdot y^2 \cdot y^2 = \frac{y^4}{2} \ .$$

立体領域 V の体積は

$$\textstyle\int_0^3 S(y)\,dy = \displaystyle\int_0^3 \frac{y^4}{2}\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}y^5\right]_0^3 = \frac{243}{10} \ .$$

終

$\boxed{\text{問}8.\text{拡充}2.3}$ xyz 座標空間において不等式 $x \geq 0$ と $y \geq 0$ と $0 \leq z \leq 3$ と $x+y \leq e^z$ との連立で表される立体領域 V の体積を求めよ．e は自然対数の底である．

$0 \leq z \leq 3$ である実数 z を座標とする z 軸の点が属す z 軸に垂直な平面と立体領域 V との共通部分の形を考える．不等式 $x \geq 0$ と $y \geq 0$ と $x+y \leq e^z$ との連立は，xy 座標平面において，

で囲まれる領域を表す．その面積 $S(z)$ は

$$S(z) =$$

立体領域 V の体積は

$\boxed{\text{問}8.\text{拡充}2.3}$ xyz 座標空間において不等式 $x \geq 0$ と $y \geq 0$ と $0 \leq z \leq 3$ と $x + y \leq e^z$ との連立で表される立体領域 V の体積を求めよ．e は自然対数の底である．

　$0 \leq z \leq 3$ である実数 z を座標とする z 軸の点が属す z 軸に垂直な平面と立体領域 V との共通部分の形を考える．不等式 $x \geq 0$ と $y \geq 0$ と $x + y \leq e^z$ との連立は，xy 座標平面において，直角を挟む 2 辺の長さが e^z である直角二等辺三角形で囲まれる領域を表す．その面積 $S(z)$ は

$$S(z) = \frac{1}{2}(e^z)^2 = \frac{1}{2}e^{2z} \ .$$

立体領域 V の体積は

$\boxed{\text{問8.拡充2.3}}$ xyz 座標空間において不等式 $x \geq 0$ と $y \geq 0$ と $0 \leq z \leq 3$ と $x + y \leq e^z$ との連立で表される立体領域 V の体積を求めよ．e は自然対数の底である．

$0 \leq z \leq 3$ である実数 z を座標とする z 軸の点が属す z 軸に垂直な平面と立体領域 V との共通部分の形を考える．不等式 $x \geq 0$ と $y \geq 0$ と $x + y \leq e^z$ との連立は，xy 座標平面において，直角を挟む 2 辺の長さが e^z である直角二等辺三角形で囲まれる領域を表す．その面積 $S(z)$ は

$$S(z) = \frac{1}{2}(e^z)^2 = \frac{1}{2}e^{2z} \ .$$

立体領域 V の体積は

$$\textstyle\int_0^3 S(z)\,dz = \displaystyle\int_0^3 \frac{1}{2}e^{2z}\,dz = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2z}\right]_0^3 = \frac{e^6 - 1}{4} \ . \qquad \boxed{\text{終}}$$