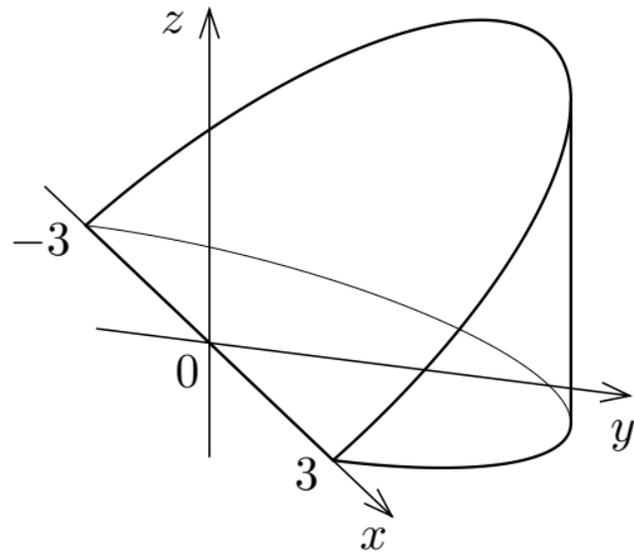


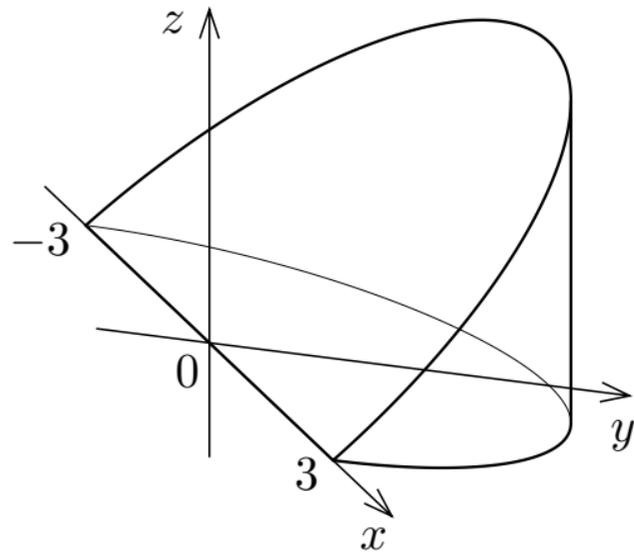
8. 補遺 2 座標空間における立体領域の体積

例 xyz 座標空間において不等式 $x^2 + y^2 \leq 9$
と $0 \leq z \leq y$ との連立で表される立体領域 V
の体積を求める.



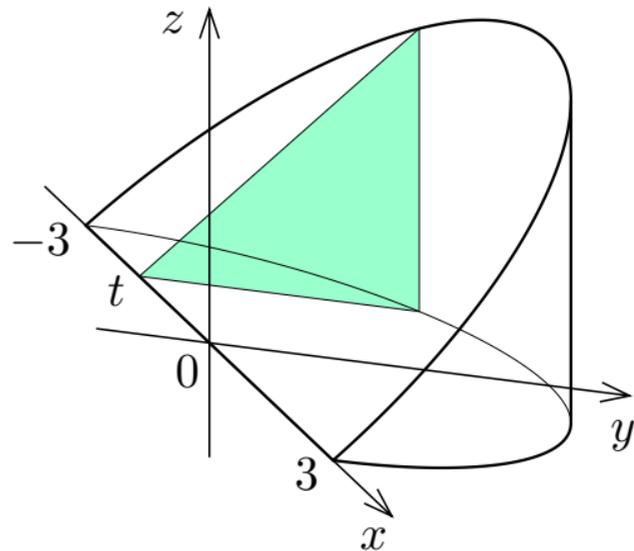
例 xyz 座標空間において不等式 $x^2 + y^2 \leq 9$
と $0 \leq z \leq y$ との連立で表される立体領域 V
の体積を求める.

立体領域 V の各点 (x, y, z) について,
 $x^2 + y^2 \leq 9$ なので, $x^2 \leq 9 - y^2 \leq 9$, よっ
て $-3 \leq x \leq 3$.



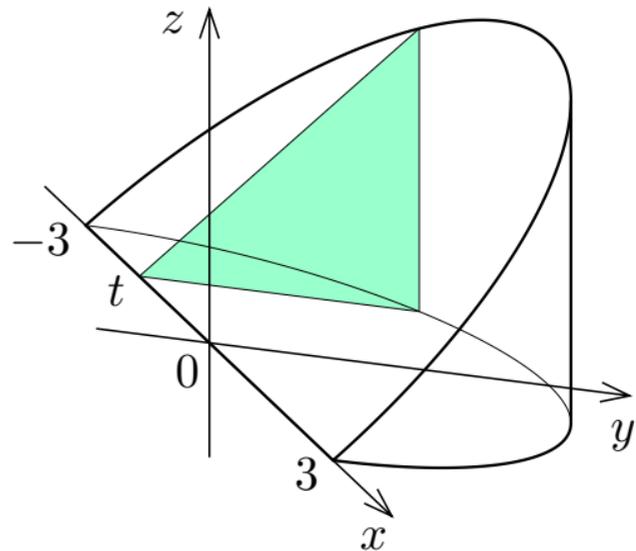
例 xyz 座標空間において不等式 $x^2 + y^2 \leq 9$
と $0 \leq z \leq y$ との連立で表される立体領域 V
の体積を求める.

立体領域 V の各点 (x, y, z) について,
 $x^2 + y^2 \leq 9$ なので, $x^2 \leq 9 - y^2 \leq 9$, よっ
て $-3 \leq x \leq 3$. 区間 $[-3, 3]$ の各実数 t に
対して x 軸に垂直な平面 $x = t$ と V との共
通部分を考える.



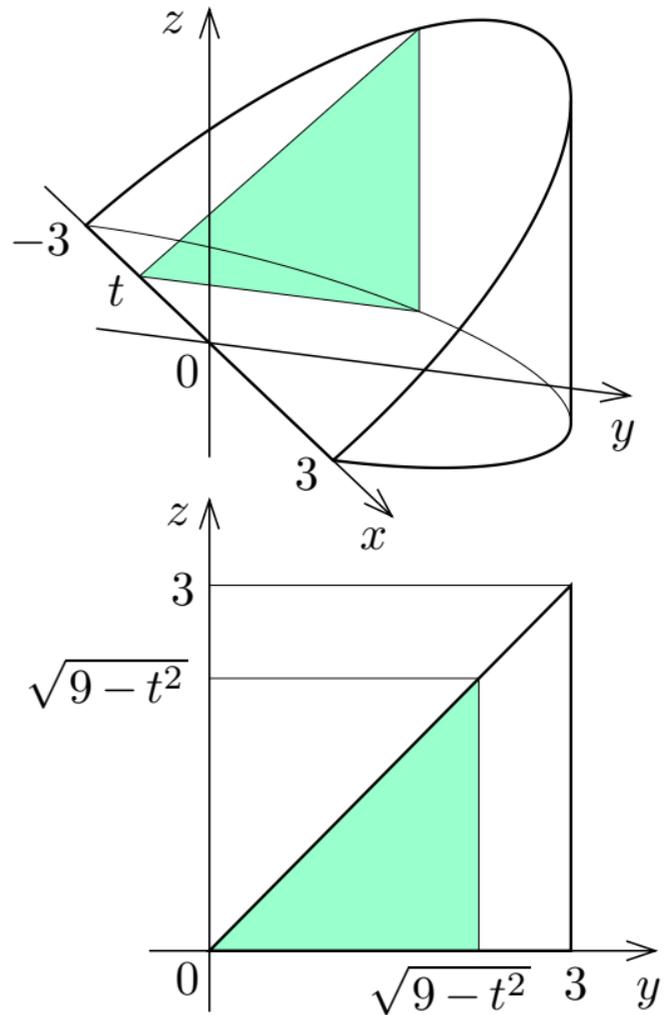
例 xyz 座標空間において不等式 $x^2 + y^2 \leq 9$
と $0 \leq z \leq y$ との連立で表される立体領域 V
の体積を求める。

立体領域 V の各点 (x, y, z) について,
 $x^2 + y^2 \leq 9$ なので, $x^2 \leq 9 - y^2 \leq 9$, よっ
て $-3 \leq x \leq 3$. 区間 $[-3, 3]$ の各実数 t に
対して x 軸に垂直な平面 $x = t$ と V との共
通部分を考える. 不等式 $x^2 + y^2 \leq 9$ と方程
式 $x = t$ とより, $t^2 + y^2 \leq 9$, $y^2 \leq 9 - t^2$,
 $y \geq 0$ なので $0 \leq y \leq \sqrt{9 - t^2}$.



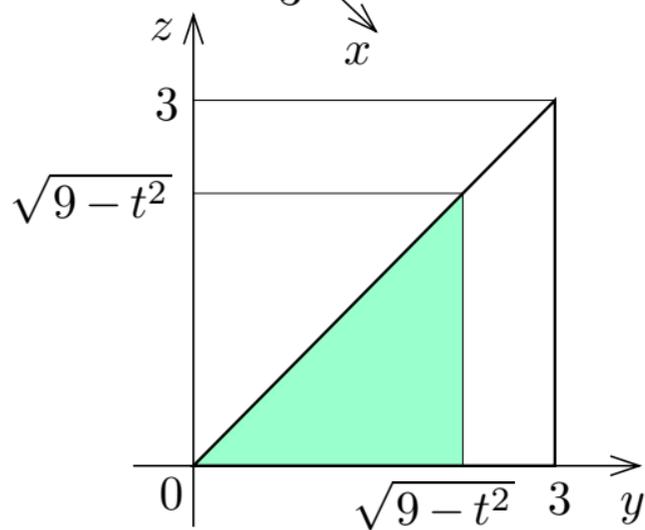
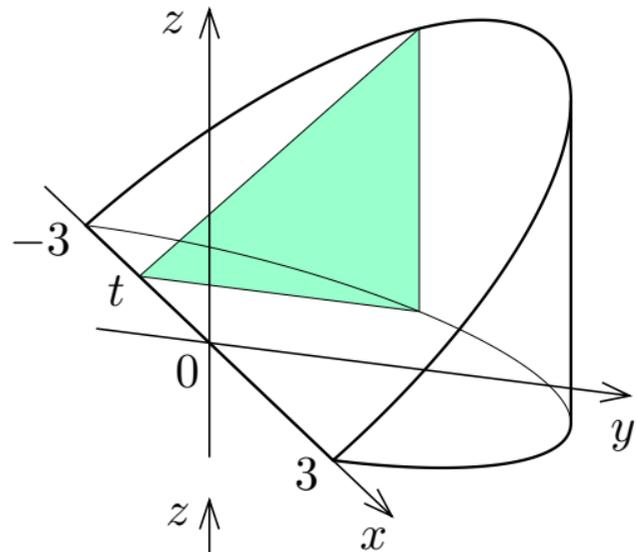
例 xyz 座標空間において不等式 $x^2 + y^2 \leq 9$ と $0 \leq z \leq y$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める。

立体領域 V の各点 (x, y, z) について、 $x^2 + y^2 \leq 9$ なので、 $x^2 \leq 9 - y^2 \leq 9$ 、よって $-3 \leq x \leq 3$ 。区間 $[-3, 3]$ の各実数 t に対して x 軸に垂直な平面 $x = t$ と V との共通部分を考える。不等式 $x^2 + y^2 \leq 9$ と方程式 $x = t$ とより、 $t^2 + y^2 \leq 9$ 、 $y^2 \leq 9 - t^2$ 、 $y \geq 0$ なので $0 \leq y \leq \sqrt{9 - t^2}$ 。この不等式と不等式 $0 \leq z \leq y$ との連立は、 yz 座標平面において、2辺の長さが $\sqrt{9 - t^2}$ である直角二等辺三角形で囲まれる領域を表す。



区間 $[-3, 3]$ の各実数 t に対して平面 $x = t$
と V との共通部分の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \frac{1}{2} \sqrt{9-t^2} \sqrt{9-t^2} = \frac{9-t^2}{2} .$$

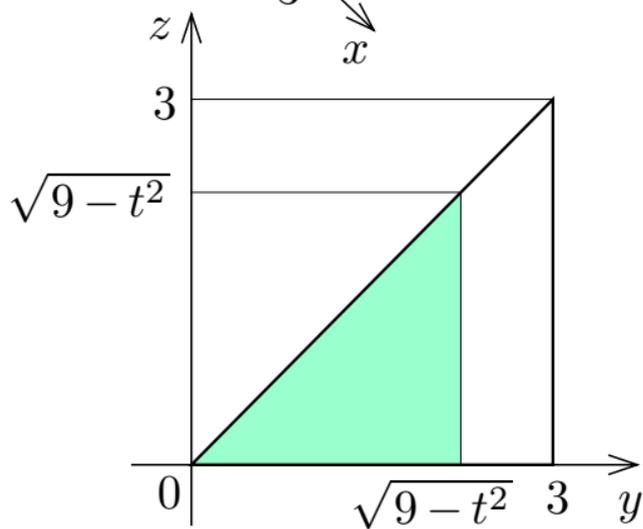
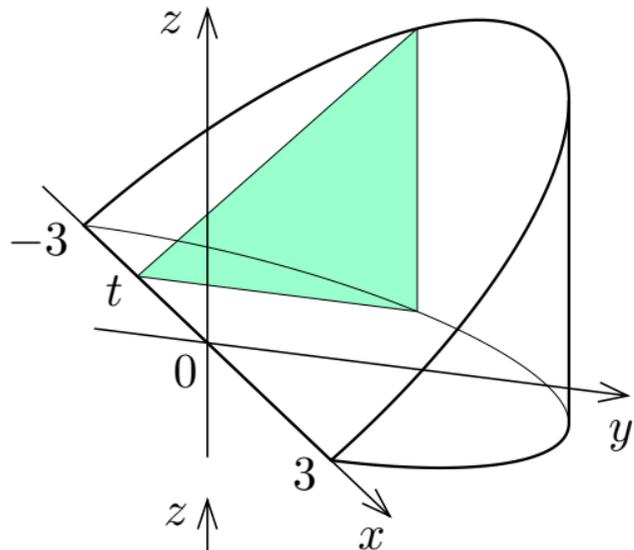


区間 $[-3, 3]$ の各実数 t に対して平面 $x = t$
と V との共通部分の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \frac{1}{2} \sqrt{9-t^2} \sqrt{9-t^2} = \frac{9-t^2}{2} .$$

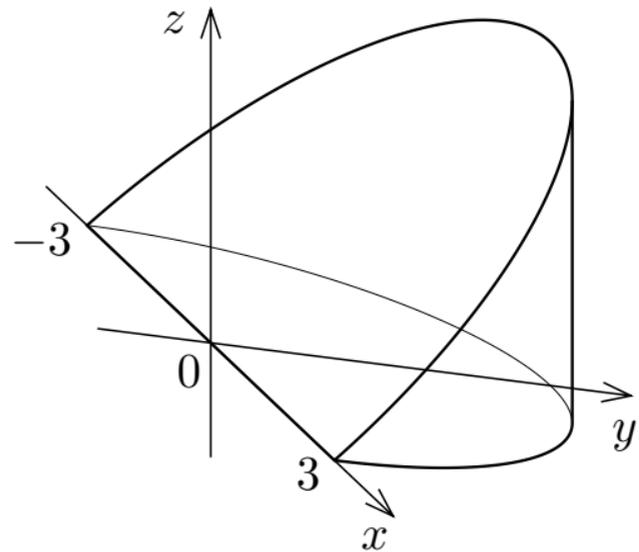
立体領域 V の体積は,

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 S(t) dt &= \int_{-3}^3 \frac{9-t^2}{2} dt = \left[\frac{9}{2}t - \frac{1}{6}t^3 \right]_{-3}^3 \\ &= 18 . \end{aligned}$$

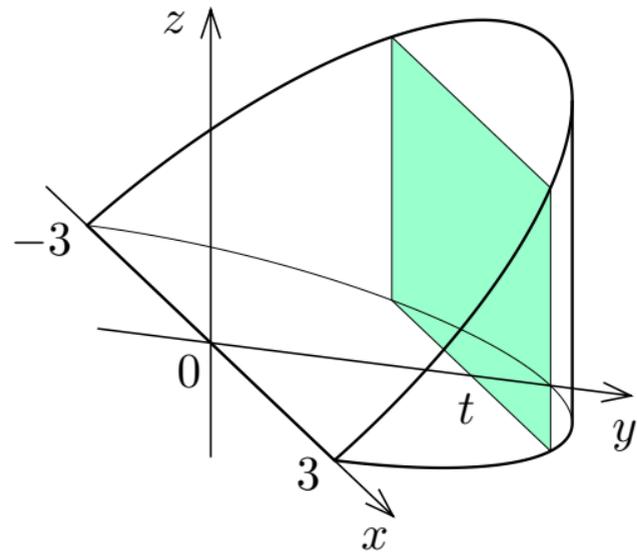


y 軸に垂直な平面と立体領域 V との共通部分を考えてもよい.

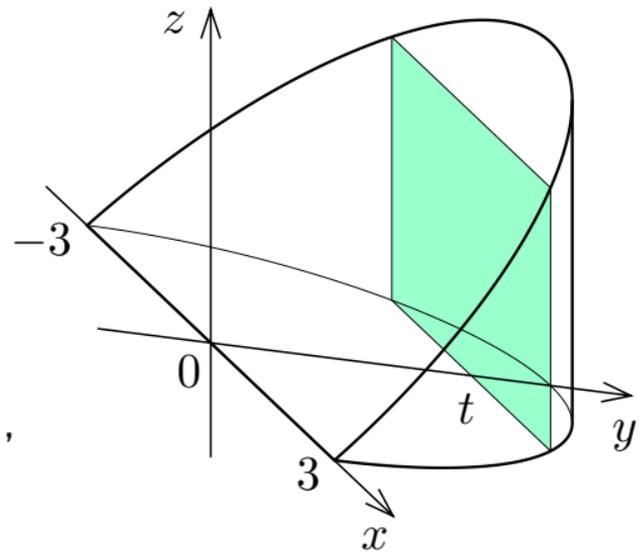
立体領域 V の各点 (x, y, z) について、 $x^2 + y^2 \leq 9$ なので、 $y^2 \leq 9 - x^2 \leq 9$ 、 $-3 \leq y \leq 3$ 、 $y \geq 0$ なので $0 \leq y \leq 3$ 。



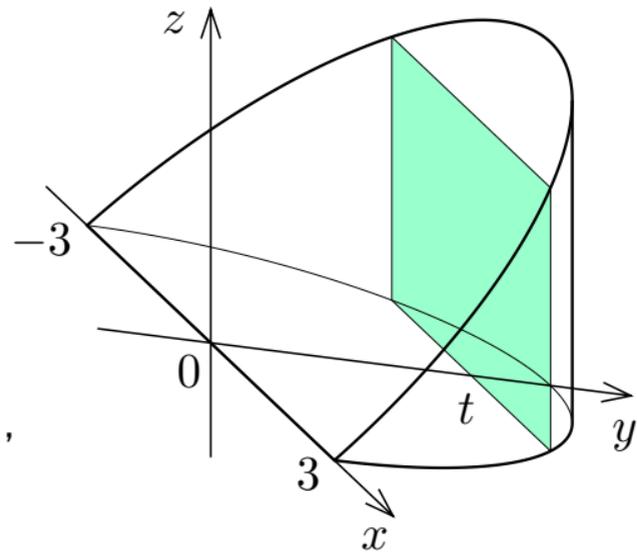
立体領域 V の各点 (x, y, z) について、 $x^2 + y^2 \leq 9$ なので、 $y^2 \leq 9 - x^2 \leq 9$ 、 $-3 \leq y \leq 3$ 、 $y \geq 0$ なので $0 \leq y \leq 3$ 。区間 $[0, 3]$ の各実数 t に対して y 軸に垂直な平面 $y = t$ と V との共通部分を考える。



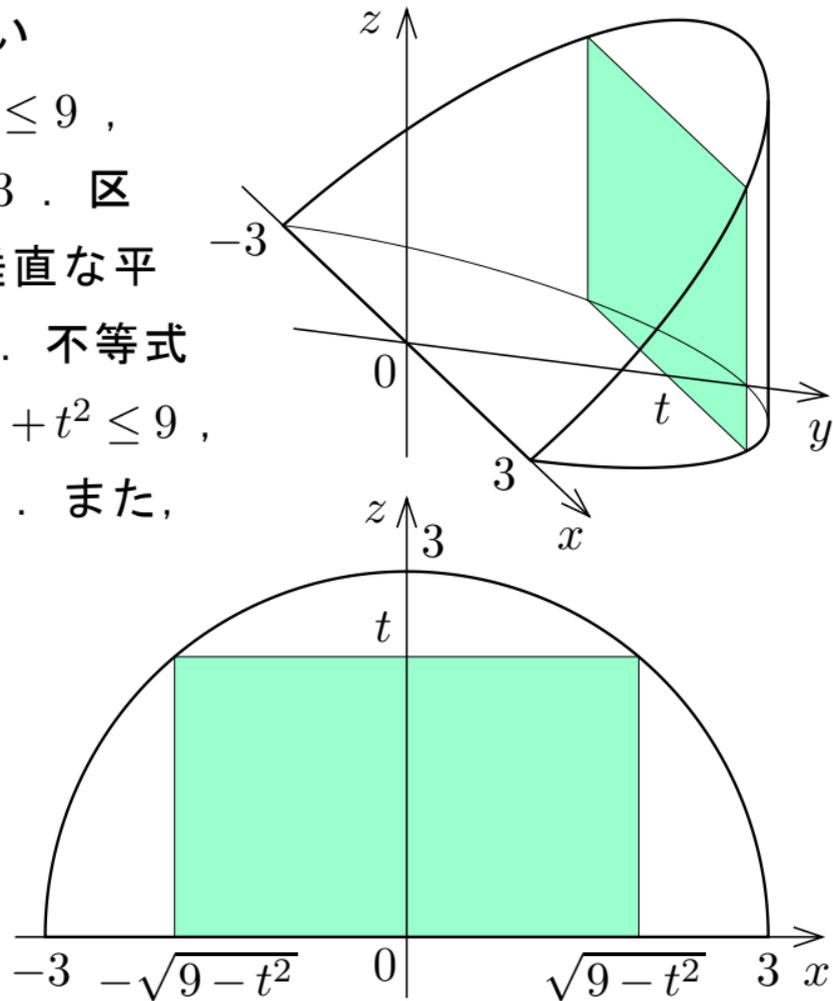
立体領域 V の各点 (x, y, z) について、 $x^2 + y^2 \leq 9$ なので、 $y^2 \leq 9 - x^2 \leq 9$ 、 $-3 \leq y \leq 3$ 、 $y \geq 0$ なので $0 \leq y \leq 3$ 。区間 $[0, 3]$ の各実数 t に対して y 軸に垂直な平面 $y = t$ と V との共通部分を考える。不等式 $x^2 + y^2 \leq 9$ と方程式 $y = t$ とより、 $x^2 + t^2 \leq 9$ 、 $x^2 \leq 9 - t^2$ 、 $-\sqrt{9 - t^2} \leq x \leq \sqrt{9 - t^2}$ 。



立体領域 V の各点 (x, y, z) について、 $x^2 + y^2 \leq 9$ なので、 $y^2 \leq 9 - x^2 \leq 9$ 、 $-3 \leq y \leq 3$ 、 $y \geq 0$ なので $0 \leq y \leq 3$ 。区間 $[0, 3]$ の各実数 t に対して y 軸に垂直な平面 $y = t$ と V との共通部分を考える。不等式 $x^2 + y^2 \leq 9$ と方程式 $y = t$ とより、 $x^2 + t^2 \leq 9$ 、 $x^2 \leq 9 - t^2$ 、 $-\sqrt{9 - t^2} \leq x \leq \sqrt{9 - t^2}$ 。また、不等式 $0 \leq z \leq y$ と方程式 $y = t$ とより $0 \leq z \leq t$ 。

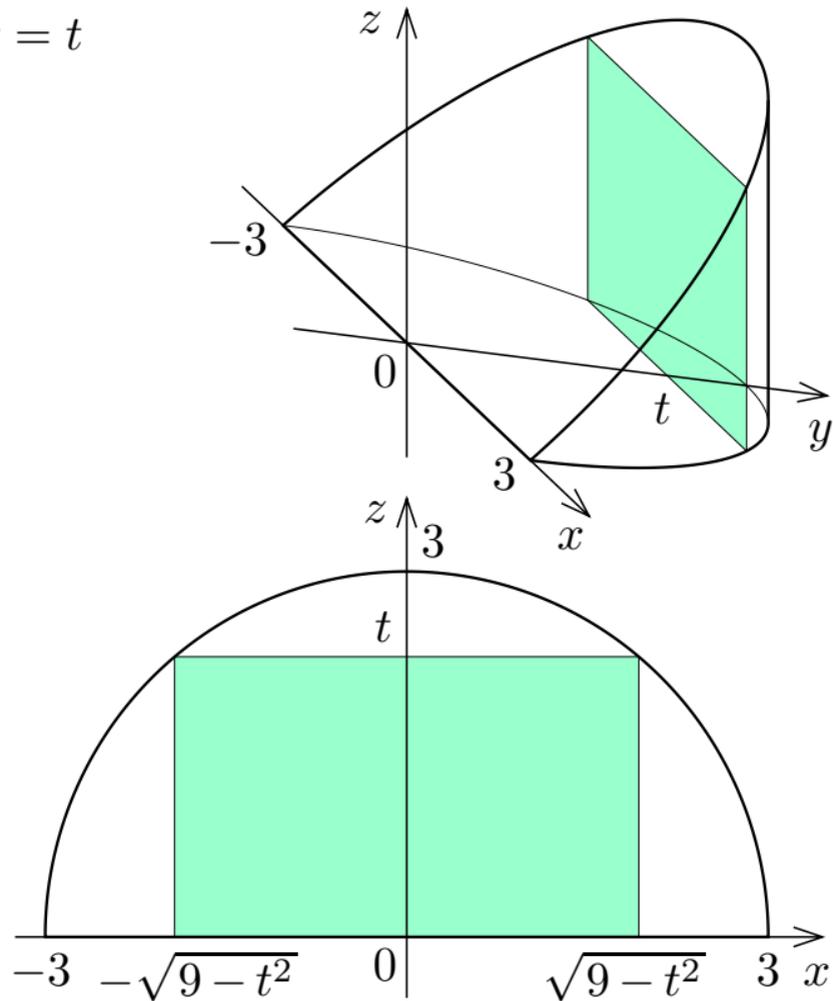


立体領域 V の各点 (x, y, z) について、 $x^2 + y^2 \leq 9$ なので、 $y^2 \leq 9 - x^2 \leq 9$ 、 $-3 \leq y \leq 3$ 、 $y \geq 0$ なので $0 \leq y \leq 3$ 。区間 $[0, 3]$ の各実数 t に対して y 軸に垂直な平面 $y = t$ と V との共通部分を考える。不等式 $x^2 + y^2 \leq 9$ と方程式 $y = t$ とより、 $x^2 + t^2 \leq 9$ 、 $x^2 \leq 9 - t^2$ 、 $-\sqrt{9 - t^2} \leq x \leq \sqrt{9 - t^2}$ 。また、不等式 $0 \leq z \leq y$ と方程式 $y = t$ とより $0 \leq z \leq t$ 。これらの不等式の連立は、 yz 座標平面において、 x 軸方向の辺の長さが $2\sqrt{9 - t^2}$ で z 軸方向の辺の長さが t である長方形で囲まれる領域を表す。



区間 $[0, 3]$ の各実数 t に対して平面 $y = t$ と V との共通部分の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = 2\sqrt{9-t^2}t = 2t\sqrt{9-t^2} .$$

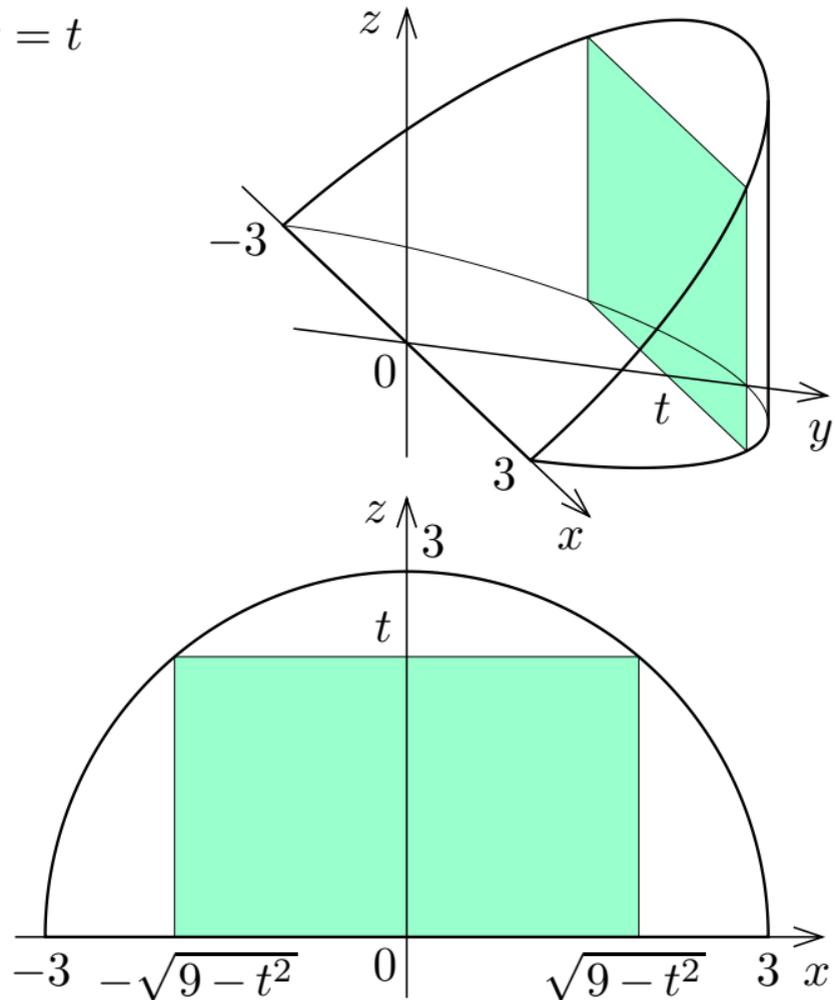


区間 $[0, 3]$ の各実数 t に対して平面 $y = t$ と V との共通部分の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = 2\sqrt{9-t^2}t = 2t\sqrt{9-t^2} .$$

立体領域 V の体積は

$$\int_0^3 S(t) dt = \int_0^3 2t\sqrt{9-t^2} dt .$$



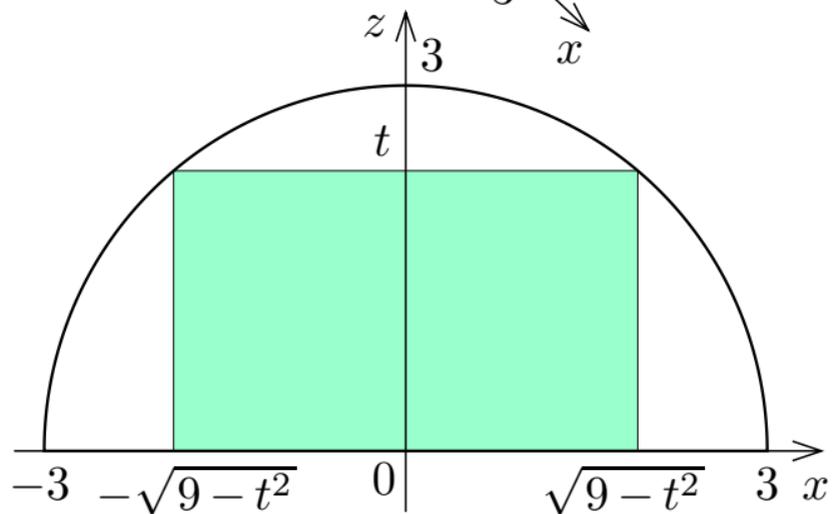
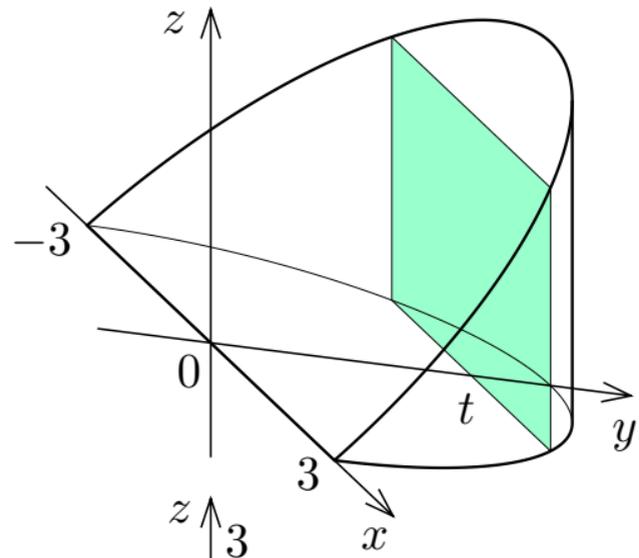
区間 $[0, 3]$ の各実数 t に対して平面 $y = t$ と V との共通部分の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = 2\sqrt{9-t^2}t = 2t\sqrt{9-t^2}.$$

立体領域 V の体積は

$$\int_0^3 S(t) dt = \int_0^3 2t\sqrt{9-t^2} dt.$$

$u = 9 - t^2$ とおく. $\frac{du}{dt} = -2t$ なので $2t dt = -du$. $t = 0$ のとき $u = 9$, $t = 3$ のとき $u = 0$.



区間 $[0, 3]$ の各実数 t に対して平面 $y = t$ と V との共通部分の面積 $S(t)$ は

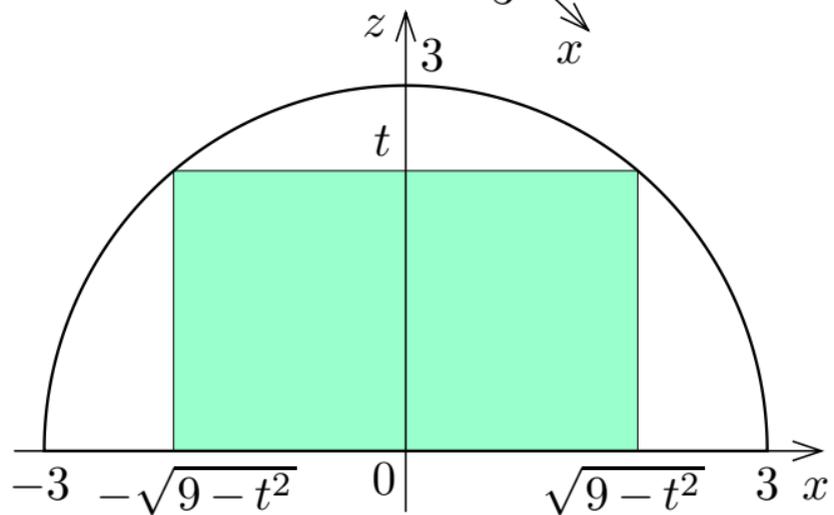
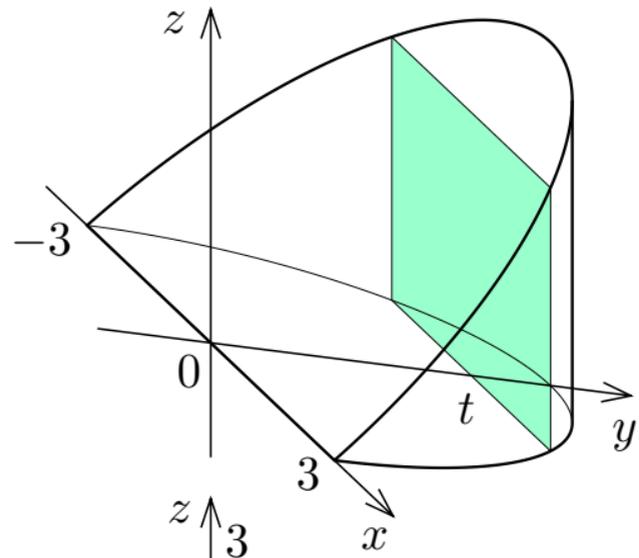
$$S(t) = 2\sqrt{9-t^2}t = 2t\sqrt{9-t^2}.$$

立体領域 V の体積は

$$\int_0^3 S(t) dt = \int_0^3 2t\sqrt{9-t^2} dt.$$

$u = 9 - t^2$ とおく. $\frac{du}{dt} = -2t$ なので $2t dt = -du$. $t = 0$ のとき $u = 9$, $t = 3$ のとき $u = 0$.

$$\begin{aligned} \int_0^3 2t\sqrt{9-t^2} dt &= \int_9^0 u^{\frac{1}{2}}(-du) \\ &= -\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_9^0 \\ &= 18. \end{aligned}$$



故に立体領域 V の体積は 18 である.

終

問8.補遺2.1 xyz 座標空間において不等式 $x^2 + y^2 \leq 3$ で表される円柱体と不等式 $0 \leq z \leq x$ とで表される領域の共通部分 V の体積を求めよ.

V の各点 (x, y, z) について, $x^2 + y^2 \leq 3$ なので, $y^2 \leq 3 - x^2 \leq$,
 $\leq y \leq$. 区間 $[$, $]$ の各実数 t に対して平面 $y = t$ と立体領域 V との共通部分を考える. 不等式 $x^2 + y^2 \leq 3$ と方程式 $y = t$ とより, $x^2 + t^2 \leq 3$, $x^2 \leq$, $x \geq 0$ なので $0 \leq x \leq$. 更に不等式 $0 \leq z \leq x$ より $0 \leq z \leq x \leq$; この不等式は, xz 座標平面において2辺の長さが である直角二等辺三角形で囲まれる領域を表す; その面積 $S(t)$ は

$$S(t) =$$

立体領域 V の体積は,

$$\int S(t) dt =$$

問8.補遺2.1 xyz 座標空間において不等式 $x^2 + y^2 \leq 3$ で表される円柱体と不等式 $0 \leq z \leq x$ とで表される領域の共通部分 V の体積を求めよ.

V の各点 (x, y, z) について, $x^2 + y^2 \leq 3$ なので, $y^2 \leq 3 - x^2 \leq 3$, $-\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$. 区間 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ の各実数 t に対して平面 $y = t$ と立体領域 V との共通部分を考える. 不等式 $x^2 + y^2 \leq 3$ と方程式 $y = t$ とより, $x^2 + t^2 \leq 3$, $x^2 \leq 3 - t^2$, $x \geq 0$ なので $0 \leq x \leq \sqrt{3 - t^2}$. 更に不等式 $0 \leq z \leq x$ より $0 \leq z \leq x \leq \sqrt{3 - t^2}$; この不等式は, xz 座標平面において2辺の長さが $\sqrt{3 - t^2}$ である直角二等辺三角形で囲まれる領域を表す; その面積 $S(t)$ は

$$S(t) =$$

立体領域 V の体積は,

$$\int S(t) dt =$$

問8.補遺2.1 xyz 座標空間において不等式 $x^2 + y^2 \leq 3$ で表される円柱体と不等式 $0 \leq z \leq x$ とで表される領域の共通部分 V の体積を求めよ.

V の各点 (x, y, z) について, $x^2 + y^2 \leq 3$ なので, $y^2 \leq 3 - x^2 \leq 3$, $-\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$. 区間 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ の各実数 t に対して平面 $y = t$ と立体領域 V との共通部分を考える. 不等式 $x^2 + y^2 \leq 3$ と方程式 $y = t$ とより, $x^2 + t^2 \leq 3$, $x^2 \leq 3 - t^2$, $x \geq 0$ なので $0 \leq x \leq \sqrt{3 - t^2}$. 更に不等式 $0 \leq z \leq x$ より $0 \leq z \leq x \leq \sqrt{3 - t^2}$; この不等式は, xz 座標平面において2辺の長さが $\sqrt{3 - t^2}$ である直角二等辺三角形で囲まれる領域を表す; その面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \frac{1}{2} \sqrt{3 - t^2} \sqrt{3 - t^2} = \frac{3 - t^2}{2}.$$

立体領域 V の体積は,

$$\int S(t) dt =$$

問8.補遺2.1 xyz 座標空間において不等式 $x^2 + y^2 \leq 3$ で表される円柱体と不等式 $0 \leq z \leq x$ とで表される領域の共通部分 V の体積を求めよ.

V の各点 (x, y, z) について, $x^2 + y^2 \leq 3$ なので, $y^2 \leq 3 - x^2 \leq 3$, $-\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$. 区間 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ の各実数 t に対して平面 $y = t$ と立体領域 V との共通部分を考える. 不等式 $x^2 + y^2 \leq 3$ と方程式 $y = t$ とより, $x^2 + t^2 \leq 3$, $x^2 \leq 3 - t^2$, $x \geq 0$ なので $0 \leq x \leq \sqrt{3 - t^2}$. 更に不等式 $0 \leq z \leq x$ より $0 \leq z \leq x \leq \sqrt{3 - t^2}$; この不等式は, xz 座標平面において2辺の長さが $\sqrt{3 - t^2}$ である直角二等辺三角形で囲まれる領域を表す; その面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \frac{1}{2} \sqrt{3 - t^2} \sqrt{3 - t^2} = \frac{3 - t^2}{2}.$$

立体領域 V の体積は,

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} S(t) dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{3 - t^2}{2} dt = \left[\frac{3}{2}t - \frac{1}{6}t^3 \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

終

例 xyz 座標空間において、不等式 $x \geq 0$ と $x + y^2 + z^2 \leq 5$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める.

例 xyz 座標空間において、不等式 $x \geq 0$ と $x + y^2 + z^2 \leq 5$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める.

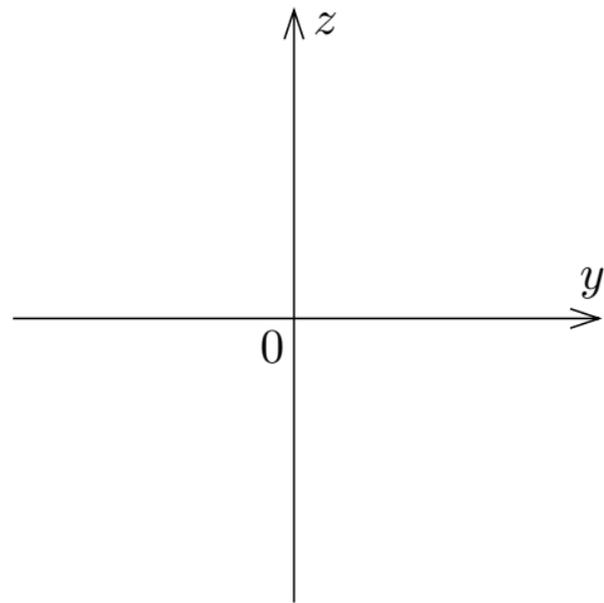
V の各点 (x, y, z) について、 $x \geq 0$ かつ $x + y^2 + z^2 \leq 5$ なので、
 $0 \leq x \leq 5 - y^2 - z^2 \leq 5$.

例 xyz 座標空間において、不等式 $x \geq 0$ と $x + y^2 + z^2 \leq 5$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める.

V の各点 (x, y, z) について、 $x \geq 0$ かつ $x + y^2 + z^2 \leq 5$ なので、 $0 \leq x \leq 5 - y^2 - z^2 \leq 5$. 区間 $[0, 5]$ の各実数 t に対して平面 $x = t$ と立体領域 V との共通部分を考える.

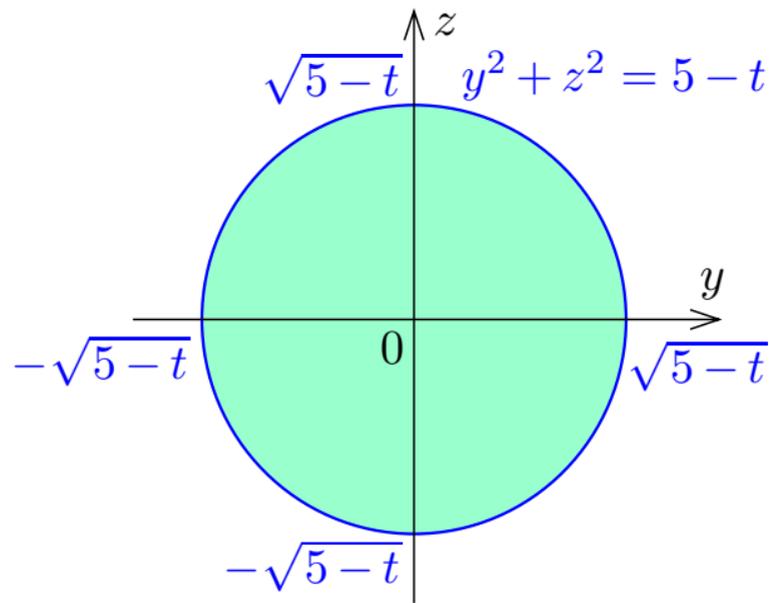
例 xyz 座標空間において、不等式 $x \geq 0$ と $x + y^2 + z^2 \leq 5$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める.

V の各点 (x, y, z) について、 $x \geq 0$ かつ $x + y^2 + z^2 \leq 5$ なので、
 $0 \leq x \leq 5 - y^2 - z^2 \leq 5$. 区間 $[0, 5]$ の各実数 t に対して平面 $x = t$ と立体領域 V との共通部分を考える. 不等式 $x + y^2 + z^2 \leq 5$ と方程式 $x = t$ とより、
 $t + y^2 + z^2 \leq 5$, $y^2 + z^2 \leq 5 - t$.



例 xyz 座標空間において、不等式 $x \geq 0$ と $x + y^2 + z^2 \leq 5$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める。

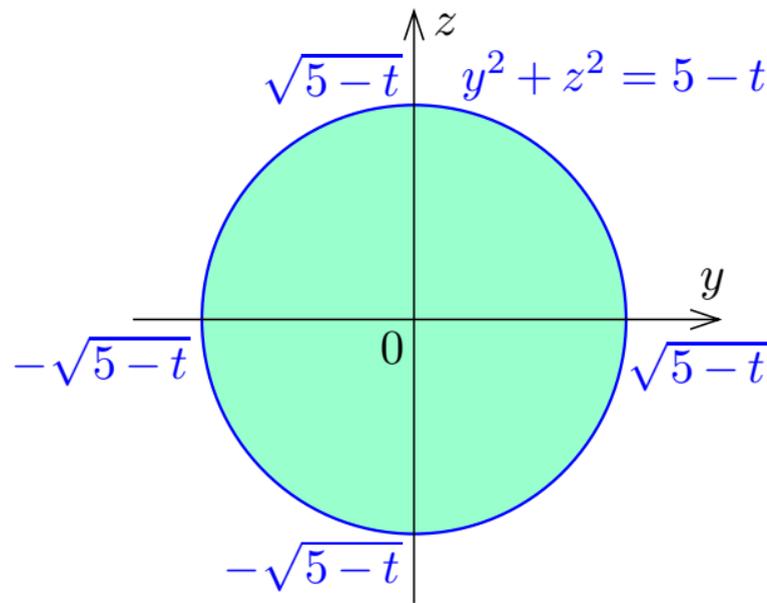
V の各点 (x, y, z) について、 $x \geq 0$ かつ $x + y^2 + z^2 \leq 5$ なので、 $0 \leq x \leq 5 - y^2 - z^2 \leq 5$. 区間 $[0, 5]$ の各実数 t に対して平面 $x = t$ と立体領域 V との共通部分を考える. 不等式 $x + y^2 + z^2 \leq 5$ と方程式 $x = t$ とより、 $t + y^2 + z^2 \leq 5$, $y^2 + z^2 \leq 5 - t$. この不等式は、 yz 座標平面において半径が $\sqrt{5 - t}$ である円で囲まれる領域を表す.



例 xyz 座標空間において, 不等式 $x \geq 0$ と $x + y^2 + z^2 \leq 5$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める.

V の各点 (x, y, z) について, $x \geq 0$ かつ $x + y^2 + z^2 \leq 5$ なので, $0 \leq x \leq 5 - y^2 - z^2 \leq 5$. 区間 $[0, 5]$ の各実数 t に対して平面 $x = t$ と立体領域 V との共通部分を考える. 不等式 $x + y^2 + z^2 \leq 5$ と方程式 $x = t$ とより, $t + y^2 + z^2 \leq 5$, $y^2 + z^2 \leq 5 - t$. この不等式は, yz 座標平面において半径が $\sqrt{5 - t}$ である円で囲まれる領域を表す. その面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi \sqrt{5 - t}^2 = \pi(5 - t).$$



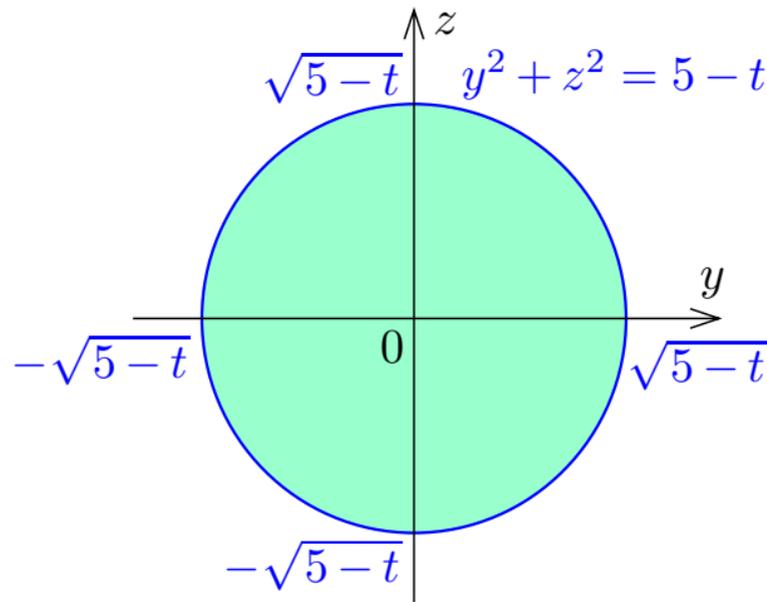
例 xyz 座標空間において、不等式 $x \geq 0$ と $x + y^2 + z^2 \leq 5$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める。

V の各点 (x, y, z) について、 $x \geq 0$ かつ $x + y^2 + z^2 \leq 5$ なので、 $0 \leq x \leq 5 - y^2 - z^2 \leq 5$. 区間 $[0, 5]$ の各実数 t に対して平面 $x = t$ と立体領域 V との共通部分を考える. 不等式 $x + y^2 + z^2 \leq 5$ と方程式 $x = t$ とより、 $t + y^2 + z^2 \leq 5$, $y^2 + z^2 \leq 5 - t$. この不等式は、 yz 座標平面において半径が $\sqrt{5 - t}$ である円で囲まれる領域を表す. その面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi \sqrt{5 - t}^2 = \pi(5 - t) .$$

立体領域 V の体積は

$$\int_0^5 S(t) dt = \int_0^5 \pi(5 - t) dt = \pi \left[5t - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^5 = \pi \left(25 - \frac{25}{2} \right) = \frac{25\pi}{2} .$$



終

問8.補遺2.2 xyz 座標空間において不等式 $0 \leq y \leq 6 - x^2 - z^2$ で表される立体領域 V の体積を求めよ.

V の各点 (x, y, z) について, $0 \leq y \leq 6 - x^2 - z^2 \leq 6$. 区間 $[,]$ の各実数 t に対して平面 $y = t$ と立体領域 V との共通部分を考える. 不等式 $y \leq 6 - x^2 - z^2$ と方程式 $y = t$ とより, $t \leq 6 - x^2 - z^2$, $x^2 + z^2 \leq$; この不等式は, xz 座標平面において半径が である円で囲まれる領域を表す; その面積 $S(t)$ は

$$S(t) =$$

立体領域 V の体積は

$$\int S(x) dx =$$

問8.補遺2.2 xyz 座標空間において不等式 $0 \leq y \leq 6 - x^2 - z^2$ で表される立体領域 V の体積を求めよ.

V の各点 (x, y, z) について, $0 \leq y \leq 6 - x^2 - z^2 \leq 6$. 区間 $[0, 6]$ の各実数 t に対して平面 $y = t$ と立体領域 V との共通部分を考える. 不等式 $y \leq 6 - x^2 - z^2$ と方程式 $y = t$ とより, $t \leq 6 - x^2 - z^2$, $x^2 + z^2 \leq 6 - t$; この不等式は, xz 座標平面において半径が _____ である円で囲まれる領域を表す; その面積 $S(t)$ は

$$S(t) =$$

立体領域 V の体積は

$$\int S(x) dx =$$

問8.補遺2.2 xyz 座標空間において不等式 $0 \leq y \leq 6 - x^2 - z^2$ で表される立体領域 V の体積を求めよ.

V の各点 (x, y, z) について, $0 \leq y \leq 6 - x^2 - z^2 \leq 6$. 区間 $[0, 6]$ の各実数 t に対して平面 $y = t$ と立体領域 V との共通部分を考える. 不等式 $y \leq 6 - x^2 - z^2$ と方程式 $y = t$ とより, $t \leq 6 - x^2 - z^2$, $x^2 + z^2 \leq 6 - t$; この不等式は, xz 座標平面において半径が $\sqrt{6-t}$ である円で囲まれる領域を表す; その面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi \sqrt{6-t}^2 = \pi(6-t).$$

立体領域 V の体積は

$$\int S(x) dx =$$

問8.補遺2.2 xyz 座標空間において不等式 $0 \leq y \leq 6 - x^2 - z^2$ で表される立体領域 V の体積を求めよ.

V の各点 (x, y, z) について, $0 \leq y \leq 6 - x^2 - z^2 \leq 6$. 区間 $[0, 6]$ の各実数 t に対して平面 $y = t$ と立体領域 V との共通部分を考える. 不等式 $y \leq 6 - x^2 - z^2$ と方程式 $y = t$ とより, $t \leq 6 - x^2 - z^2$, $x^2 + z^2 \leq 6 - t$; この不等式は, xz 座標平面において半径が $\sqrt{6 - t}$ である円で囲まれる領域を表す; その面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi \sqrt{6 - t}^2 = \pi(6 - t).$$

立体領域 V の体積は

$$\int_0^6 S(x) dx = \int_0^6 \pi(6 - t) dt = \pi \left[6t - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^6 = \pi \left(36 - \frac{36}{2} \right) = 18\pi.$$

終

例 xyz 座標空間において, 不等式 $0 \leq x \leq 3$ と $y \geq 0$ と $z \geq 0$ と $y + z \leq x^2$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める.

例 xyz 座標空間において, 不等式 $0 \leq x \leq 3$ と $y \geq 0$ と $z \geq 0$ と $y + z \leq x^2$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める.

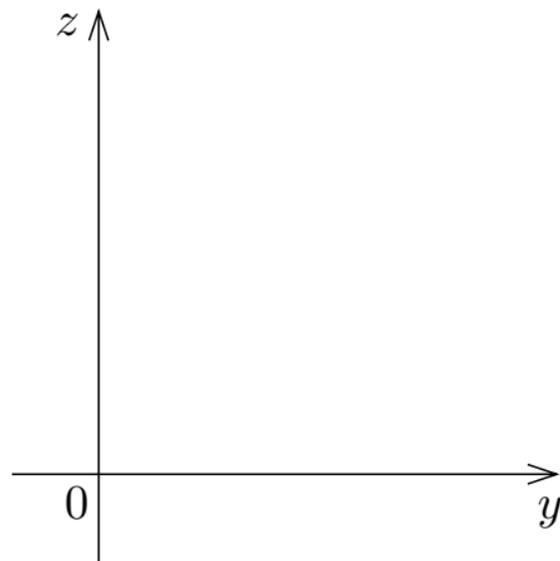
V の各点 (x, y, z) について $0 \leq x \leq 3$.

例 xyz 座標空間において, 不等式 $0 \leq x \leq 3$ と $y \geq 0$ と $z \geq 0$ と $y + z \leq x^2$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める.

V の各点 (x, y, z) について $0 \leq x \leq 3$. 区間 $[0, 3]$ の各実数 t に対して平面 $x = t$ と立体領域 V との共通部分を考える.

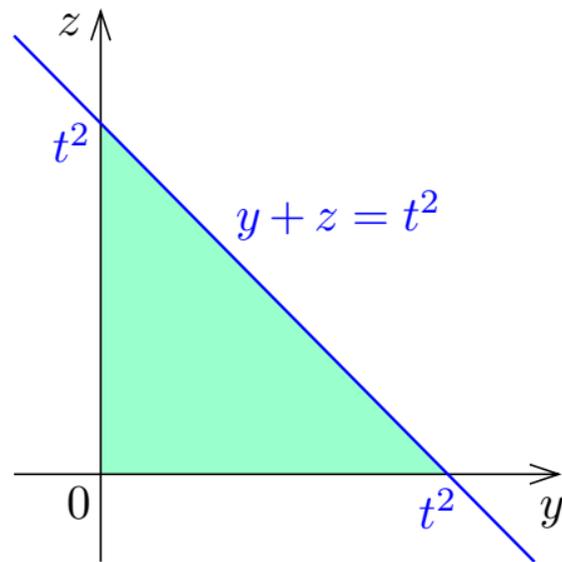
例 xyz 座標空間において、不等式 $0 \leq x \leq 3$ と $y \geq 0$ と $z \geq 0$ と $y + z \leq x^2$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める.

V の各点 (x, y, z) について $0 \leq x \leq 3$. 区間 $[0, 3]$ の各実数 t に対して平面 $x = t$ と立体領域 V との共通部分を考える. 不等式 $y + z \leq x^2$ と方程式 $x = t$ とより, $y + z \leq t^2$.



例 xyz 座標空間において、不等式 $0 \leq x \leq 3$ と $y \geq 0$ と $z \geq 0$ と $y+z \leq x^2$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める。

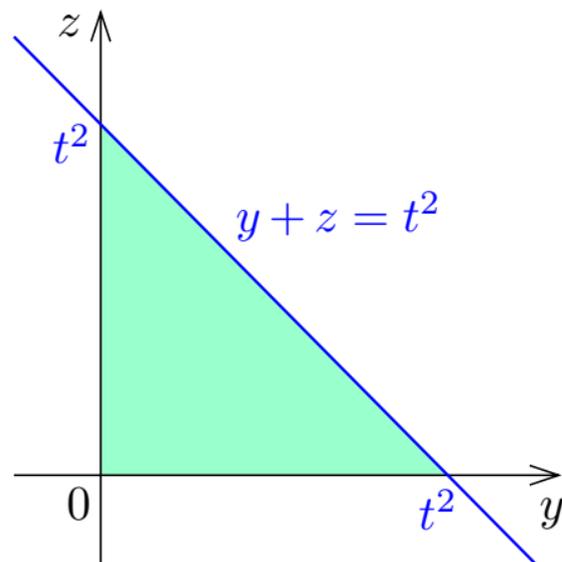
V の各点 (x, y, z) について $0 \leq x \leq 3$. 区間 $[0, 3]$ の各実数 t に対して平面 $x = t$ と立体領域 V との共通部分を考える. 不等式 $y+z \leq x^2$ と方程式 $x = t$ とより, $y+z \leq t^2$. yz 座標平面において, 不等式 $y \geq 0$ と $z \geq 0$ と $y+z \leq t^2$ との連立で表される図形は, 2 辺の長さが t^2 である直角二等辺三角形で囲まれる領域である.



例 xyz 座標空間において、不等式 $0 \leq x \leq 3$ と $y \geq 0$ と $z \geq 0$ と $y+z \leq x^2$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める。

V の各点 (x, y, z) について $0 \leq x \leq 3$. 区間 $[0, 3]$ の各実数 t に対して平面 $x = t$ と立体領域 V との共通部分を考える. 不等式 $y+z \leq x^2$ と方程式 $x = t$ とより, $y+z \leq t^2$. yz 座標平面において, 不等式 $y \geq 0$ と $z \geq 0$ と $y+z \leq t^2$ との連立で表される図形は, 2辺の長さが t^2 である直角二等辺三角形で囲まれる領域である. その面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot t^2 = \frac{t^4}{2} .$$



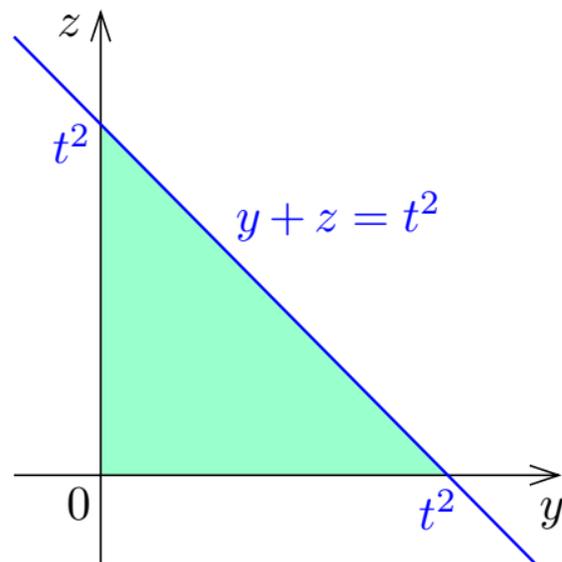
例 xyz 座標空間において、不等式 $0 \leq x \leq 3$ と $y \geq 0$ と $z \geq 0$ と $y + z \leq x^2$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める。

V の各点 (x, y, z) について $0 \leq x \leq 3$. 区間 $[0, 3]$ の各実数 t に対して平面 $x = t$ と立体領域 V との共通部分を考える. 不等式 $y + z \leq x^2$ と方程式 $x = t$ とより, $y + z \leq t^2$. yz 座標平面において, 不等式 $y \geq 0$ と $z \geq 0$ と $y + z \leq t^2$ との連立で表される図形は, 2 辺の長さが t^2 である直角二等辺三角形で囲まれる領域である. その面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot t^2 = \frac{t^4}{2} .$$

立体領域 V の体積は

$$\int_0^3 S(t) dt = \int_0^3 \frac{t^4}{2} dt = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{5} t^5 \right]_0^3 = \frac{243}{10} .$$



終

問8.補遺2.3 xyz 座標空間において, 不等式 $x \geq 0$ と $y \geq 0$ と $0 \leq z \leq 3$ と $x + y \leq e^z$ との連立で表される立体領域 V の体積を求めよ. e は自然対数の底である.

V の各点 (x, y, z) について $0 \leq z \leq 3$. 区間 $[0, 3]$ の各実数 t に対して平面 $z = t$ と立体領域 V との共通部分を考える. 不等式 $x + y \leq e^z$ と方程式 $z = t$ とより, $x + y \leq e^t$. xy 座標平面において, 不等式 $x \geq 0$ と $y \geq 0$ と $x + y \leq e^t$ との連立で表される図形は, 2 辺の長さが e^t である直角二等辺三角形で囲まれる領域である. その面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \frac{1}{2} (e^t)^2 = \frac{1}{2} e^{2t}.$$

立体領域 V の体積は

$$\int_0^3 S(t) dt =$$

問8.補遺2.3 xyz 座標空間において, 不等式 $x \geq 0$ と $y \geq 0$ と $0 \leq z \leq 3$ と $x + y \leq e^z$ との連立で表される立体領域 V の体積を求めよ. e は自然対数の底である.

V の各点 (x, y, z) について $0 \leq z \leq 3$. 区間 $[0, 3]$ の各実数 t に対して平面 $z = t$ と立体領域 V との共通部分を考える. 不等式 $x + y \leq e^z$ と方程式 $z = t$ とより, $x + y \leq e^t$. xy 座標平面において, 不等式 $x \geq 0$ と $y \geq 0$ と $x + y \leq e^t$ との連立で表される図形は, 2辺の長さが e^t である直角二等辺三角形で囲まれる領域である. その面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \frac{1}{2}(e^t)^2 = \frac{e^{2t}}{2}.$$

立体領域 V の体積は

$$\int_0^3 S(t) dt =$$

問8.補遺2.3 xyz 座標空間において, 不等式 $x \geq 0$ と $y \geq 0$ と $0 \leq z \leq 3$ と $x + y \leq e^z$ との連立で表される立体領域 V の体積を求めよ. e は自然対数の底である.

V の各点 (x, y, z) について $0 \leq z \leq 3$. 区間 $[0, 3]$ の各実数 t に対して平面 $z = t$ と立体領域 V との共通部分を考える. 不等式 $x + y \leq e^z$ と方程式 $z = t$ とより, $x + y \leq e^t$. xy 座標平面において, 不等式 $x \geq 0$ と $y \geq 0$ と $x + y \leq e^t$ との連立で表される図形は, 2辺の長さが e^t である直角二等辺三角形で囲まれる領域である. その面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \frac{1}{2}(e^t)^2 = \frac{e^{2t}}{2}.$$

立体領域 V の体積は

$$\int_0^3 S(t) dt = \int_0^3 \frac{e^{2t}}{2} dt = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^3 = \frac{e^6 - 1}{4}.$$

終