0.4 証明と定理

　幾つかの述語 $\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D},\ldots$ が成り立つことを元に述語 $\mathcal{A}$ が成り立つことを論理的に推論することを，述語 $\mathcal{A}$ を証明するという；このときの推論を $\mathcal{A}$ の証明といい，推論の元にした述語 $\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D},\ldots$ を（証明の）論拠という．簡単にいうと論拠とは証明に用いられる根拠のことである．

$\boxed{例}$ **A** 君と **B** 君と **C** 君とが同じ向きを向いて 1 列に並んでいる．**A** 君の後に **B** 君がいて，**B** 君の後に **C** 君がいる．3 人の各々に頭に 1 個ずつ帽子をかぶせる．**A** 君は自分がかぶっている帽子を含めてどの帽子も見えない．**B** 君は **A** 君がかぶっている帽子が見えるが他の帽子は見えない．**C** 君は **A** 君がかぶっている帽子と **B** 君がかぶっている帽子とが見えるが自分がかぶっている帽子は見えない．各人がかぶっている帽子の色は黒か白かのどちらかであり，3 人のうち少なくとも **2** 人は黒色の帽子をかぶっていることを 3 人に知らせる．まず **C** 君に自分がかぶっている帽子の色が分かるかどうか尋ねると“分かります”と答えた．次に **B** 君に自分がかぶっている帽子は何色か尋ねると“黒色です”と答えた．**B** 君も **C** 君も正直であり論理的思考力は充分あるとする．これらのことを論拠として，**A** 君がかぶっている帽子は何色か論理的に推論する．

3 人のうち少なくとも 2 人は黒色の帽子をかぶっているので，**A** 君も **B** 君も白色の帽子をかぶっていることはない．**A** 君が黒色の帽子をかぶり **B** 君が白色の帽子をかぶっているとき，及び，**A** 君が白色の帽子をかぶり **B** 君が黒色の帽子をかぶっているとき，**C** 君は自分が黒色の帽子をかぶっていると分かる．**A** 君も **B** 君も黒色の帽子をかぶっているとき，**C** 君は自分が何色の帽子をかぶっているか分からない．**C** 君は自分が何色の帽子をかぶっているか分かったので，**A** 君が黒色の帽子をかぶっているならば **B** 君は白色の帽子をかぶっていて，**A** 君が白色の帽子をかぶっているならば **B** 君は黒色の帽子をかぶっている．**B** 君は **A** 君がかぶっている帽子を見て自分は黒色の帽子をかぶっていると分かったので，**A** 君は白色の帽子をかぶっている．こうして **A** 君がかぶっている帽子は白色と論理的に推論される． 終

$\boxed{問0.4.1}$ **A** 君と **B** 君と **C** 君とが同じ向きを向いて 1 列に並んでいる．**A** 君の後に **B** 君がいて，**B** 君の後に **C** 君がいます．3 人の各々に頭に 1 個ずつ帽子をかぶせる．**A** 君は自分がかぶっている帽子を含めてどの帽子も見えない．**B** 君は **A** 君がかぶっている帽子が見えるが他の帽子は見えない．**C** 君は **A** 君がかぶっている帽子と **B** 君がかぶっている帽子とが見えるが自分がかぶっている帽子は見えない．各人がかぶっている帽子の色は黒か白かのどちらかであり，3 人のうち少なくとも 1 人は黒色の帽子をかぶっていることを 3 人に知らせる．まず **C** 君に自分がかぶっている帽子の色が分かるかどうか尋ねると“分かりません”と答えた．次に **B** 君に自分がかぶっている帽子の色が分かるかどうか尋ねるとやはり“分かりません”と答えた．**B** 君も **C** 君も正直であり論理的思考力は充分あるとする．これらのことを論拠として，**A** 君がかぶっている帽子は何色か論理的に推論せよ．

3 人のうち少なくとも 1 人は黒色の帽子をかぶっているので，仮に **A** 君も **B** 君も帽子も白色の帽子をかぶっていれば，**C** 君は自分が黒色の帽子をかぶっていると分かる．しかし **C** 君は自分が何色の帽子をかぶっているか分からなかったので，**A** 君と **B** 君との少なくてもどちらかが黒色の帽子をかぶっている．だから，もし **A** 君が白色の帽子をかぶっていれば，**B** 君は自分が黒色の帽子をかぶっていると分かる．しかし B 君は自分が何色の帽子をかぶっているか分からなかったので，**A** 君は黒色の帽子をかぶっている． 終

$\boxed{\text{問0.4.2}}$ **A** 君と **B** 君と **C** 君と **D** 君との 4 人が，自分たちの鞄を傍らに置いて公園で遊んでいたが，急に雨が降ってきたので慌てて鞄をつかんで家に帰った．ところが，慌てたため間違えて別の人の鞄を持って帰った。．**A** 君と **B** 君と **C** 君と **D** 君とは次のように話した．

A 君の話：僕は自分の鞄を一つ持って行ったのに持って帰るのを忘れた．

B 君の話：僕は自分の鞄を一つ持って行って間違えて **A** 君の鞄を持って帰ったた．

C 君の話：僕は自分の鞄を持って行かなかったのに間違えて誰か別の人の鞄を持って帰った．

D 君の話：僕は自分の鞄を一つ持って行って間違えて誰か別の人の鞄を持って帰った．

これらの話を論拠として，**B** 君の鞄を持って帰ったのは誰か推論せよ．

A 君は鞄を持って帰っていないので，B 君の鞄を持って帰ったのは C 君か D 君かである．仮に B 君の鞄を持って帰ったのが C 君であるとすると，D 君の鞄を持って帰ったのは D 君しかいない．これは D 君の話と矛盾する．従って B 君の鞄を持って帰ったのは D 君である．

証明において，仮に述語 $\mathcal{A}$ を論拠にすること，つまり，仮に述語 $\mathcal{A}$ を根拠にして議論することを，述語 $\mathcal{A}$ を仮定するという．述語 $\mathcal{A}$ を仮定して述語 $\mathcal{B}$ が証明される（証明に $\mathcal{A}$ 以外の論拠があってもよい）とき，述語 $\mathcal{A}$ から述語 $\mathcal{B}$ が導かれるという．

証明において，仮に述語 $\mathcal{A}$ を論拠にすること，つまり，仮に述語 $\mathcal{A}$ を根拠にして議論することを，述語 $\mathcal{A}$ を仮定するという．述語 $\mathcal{A}$ を仮定して述語 $\mathcal{B}$ が証明される（証明に $\mathcal{A}$ 以外の論拠があってもよい）とき，述語 $\mathcal{A}$ から述語 $\mathcal{B}$ が導かれるという．

述語 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ とについて次のことが成り立つ．$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ が導かれるとき，述語 “ $\mathcal{A}$ ならば $\mathcal{B}$ ” が導かれる．$\mathcal{A}$ と述語 “ $\mathcal{A}$ ならば $\mathcal{B}$ ” とから，$\mathcal{B}$ が導かれる．

証明において，仮に述語 $\mathcal{A}$ を論拠にすること，つまり，仮に述語 $\mathcal{A}$ を根拠にして議論することを，述語 $\mathcal{A}$ を仮定するという．述語 $\mathcal{A}$ を仮定して述語 $\mathcal{B}$ が証明される（証明に $\mathcal{A}$ 以外の論拠があってもよい）とき，述語 $\mathcal{A}$ から述語 $\mathcal{B}$ が導かれるという．

述語 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ とについて次のことが成り立つ．$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ が導かれるとき，述語 “ $\mathcal{A}$ ならば $\mathcal{B}$ ” が導かれる．$\mathcal{A}$ と述語 “ $\mathcal{A}$ ならば $\mathcal{B}$ ” とから，$\mathcal{B}$ が導かれる．

数学では数学的内容の述語を扱う．数学的に認められている命題だけを論拠として証明される命題を定理という．数学的に認められている命題と定理だけを論拠として証明される命題はやはり定理である；つまり定理を証明するために既に証明された別の定理を論拠にできる．

例 数学的に認められている命題の例として，次の三角形の合同条件がある：任意の 2 個の三角形について，対応する辺の長さがそれぞれ等しいとき，この 2 個の三角形は合同である．この命題を論拠にして例えば次の定理が証明できる：平面上の相異なる任意の **3** 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ について，$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}}$ ならば $\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{ACB}$ ． 終