

0.5 述語の同値性

述語 P と述語 Q について, P と Q とが同値であるとは,

P から Q が導かれ, 逆に Q から P が導かれる

ことである. 述語 P と述語 Q とが同値であることを次のように書き表す:

$$P \iff Q.$$

例 変数 x に関する述語 $x - 3 = 0$ から, x に関する述語 $x = 3$ が導かれる. 逆に, $x = 3$ のとき $x - 3 = 0$ なので, 述語 $x = 3$ から述語 $x - 3 = 0$ が導かれる. 従って述語 $x - 3 = 0$ と述語 $x = 3$ とは同値である:

$$x - 3 = 0 \iff x = 3 .$$

終

例 整数を表す変数 n に関する述語 “ n は 6 の倍数である” と “ n は 2 と 3 との公倍数である” とは同値である：

n は 6 の倍数である \iff n は 2 と 3 との公倍数である .

終

例 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について考える. 辺 AB の長さ \overline{AB} と辺 AC の長さ \overline{AC} とが等しいとすると, 角度 $\angle ABC$ と角度 $\angle ACB$ とが等しいことが証明できる; つまり述語 $\overline{AB} = \overline{AC}$ から述語 $\angle ABC = \angle ACB$ が導かれる. 逆に, $\angle ABC$ と $\angle ACB$ とが等しいとすると, \overline{AB} と \overline{AC} とが等しいことが証明できる; つまり述語 $\angle ABC = \angle ACB$ から述語 $\overline{AB} = \overline{AC}$ が導かれる. 従って, 述語 $\overline{AB} = \overline{AC}$ と述語 $\angle ABC = \angle ACB$ とは同値である:

$$\overline{AB} = \overline{AC} \iff \angle ABC = \angle ACB .$$

終