0.7 集合

対象の集まりについて，その集まりに属すか属さないかの客観的基準があるとき，その集まりを集合という.

対象の集まりについて，その集まりに属すか属さないかの客観的基準があるとき，その集まりを集合という．例えば，“小さい自然数の全体”という集まりは，自然数について小さいことの客観的基準がないので集合ではない．しかし，“10 以下の自然数の全体”という集まりは，属すか属さないかの基準が客観的なので集合である．

対象の集まりについて，その集まりに属すか属さないかの客観的基準があるとき，その集まりを集合という．例えば，“小さい自然数の全体”という集まりは，自然数について小さいことの客観的基準がないので集合ではない．しかし，“10 以下の自然数の全体”という集まりは，属すか属さないかの基準が客観的なので集合である．

集合に属す対象のことを，その集合の要素または元という．

対象の集まりについて，その集まりに属すか属さないかの客観的基準があるとき，その集まりを集合という．例えば，“小さい自然数の全体”という集まりは，自然数について小さいことの客観的基準がないので集合ではない．しかし，“10 以下の自然数の全体”という集まりは，属すか属さないかの基準が客観的なので集合である．

集合に属す対象のことを，その集合の要素または元という．

集合 A と集合 B とが等しいとは，つまり $A = B$ とは，A の要素が総て B の要素であり，逆に B の要素が総て A の要素であることである．

集合の表現法として，集合の要素を定める述語を記述する方法がある.

$\boxed{\text{例}}$ 0 以上 9 以下の奇数の全体を次のように述語を用いて書き表す：

$$\{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上 } 9 \text{ 以下の奇数である} \,\}\,.$$

$\boxed{\text{例}}$ 0 以上 9 以下の奇数の全体を次のように述語を用いて書き表す：

$$\{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上 } 9 \text{ 以下の奇数である} \,\} .$$

この集合の要素は $1,3,5,7,9$ の 5 個の数である．これらの要素を列挙して集合を書き表すこともある：

$$\{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上 } 9 \text{ 以下の奇数である} \,\} = \{1,3,5,7,9\} .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ $x^2 = 9$ である整数 x の全体を次のように述語を用いて書き表す:

$$\{\, x \mid x \text{ は整数で } x^2 = 9 \,\}\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ $x^2 = 9$ である整数 x の全体を次のように述語を用いて書き表す：

$$\{\, x \mid x \text{ は整数で } x^2 = 9 \,\} .$$

$x^2 = 9$ である整数は 3 と -3 との 2 個だけなので，

$$\{\, x \mid x \text{ は整数で } x^2 = 9 \,\} = \{3, -3\} .$$

$\boxed{\text{終}}$

例 12 の約数である整数の全体を次のように述語を用いて書き表す：

$$\{\, x \mid x \text{ は整数で } 12 \text{ の約数である} \,\} .$$

$\boxed{\text{例}}$ 12 の約数である整数の全体を次のように述語を用いて書き表す：

$$\{\, x \mid x \text{ は整数で } 12 \text{ の約数である} \,\}\ .$$

要素を列挙して書き表すと次のようになる：

$$\{\, x \mid x \text{ は整数で } 12 \text{ の約数である} \,\} = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12, -12\}\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 0 以上の整数で 3 の倍数の全体を次のように述語を用いて書き表す：

$$\{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上の整数で } 3 \text{ の倍数である} \,\} .$$

例 0 以上の整数で 3 の倍数の全体を次のように述語を用いて書き表す：

$$\{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上の整数で } 3 \text{ の倍数である} \,\} \,.$$

この集合の要素は無限にある：

$$\begin{aligned} &\{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上の整数で } 3 \text{ の倍数である} \,\} \\ &= \{0,3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,\ldots\} \,. \end{aligned}$$

終

$\boxed{\text{問}0.7.1}$ 集合 $\{\, x \mid x$ は $0 \leq x \leq 50$ である整数で 7 の倍数である $\}$ を要素を総て列挙する表現法で書き表す.

$$
\begin{aligned}
&\{\, x \mid x \text{ は } 0 \leq x \leq 50 \text{ である整数で } 7 \text{ の倍数である} \,\} \\
&= \{0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\} \ .
\end{aligned}
$$

前述したように，集合とは属すか属さないかについて客観的基準がある集まりである．“どんな対象も属さない”というのも客観的基準なので，どんな対象も属さない集まりも集合と考える．このように要素が無い集合を空集合という．空集合を記号 $\emptyset$ で表す．

例 $3x = 7$ である整数 x の全体

$$\{\, x \mid x \text{ は整数で } 3x = 7 \,\}$$

は，属すか属さないかについて客観的基準があるので集合である.

$\boxed{\text{例}}$ $3x = 7$ である整数 x の全体

$$\{\, x \mid x \text{ は整数で } \ 3x = 7 \,\}$$

は，属すか属さないかについて客観的基準があるので集合である．しかし，$3x = 7$ である整数 x は無いので，この集合 $\{\, x \mid x \text{ は整数で } \ 3x = 7 \,\}$ の要素は無い．

$\boxed{\text{例}}$ $3x=7$ である整数 x の全体

$$\{\, x \mid x \text{ は整数で } 3x=7 \,\}$$

は，属すか属さないかについて客観的基準があるので集合である．しかし，$3x=7$ である整数 x は無いので，この集合 $\{\, x \mid x \text{ は整数で } 3x=7 \,\}$ の要素は無い．つまり，集合 $\{\, x \mid x \text{ は整数で } 3x=7 \,\}$ は空集合 $\emptyset$ である：

$$\{\, x \mid x \text{ は整数で } 3x=7 \,\} = \emptyset \,.$$

例 $3x=7$ である整数 x の全体

$$\{\, x \mid x \text{ は整数で } 3x=7 \,\}$$

は，属すか属さないかについて客観的基準があるので集合である．しかし，$3x=7$ である整数 x は無いので，この集合 $\{\, x \mid x$ は整数で $3x=7 \,\}$ の要素は無い．つまり，集合 $\{\, x \mid x$ は整数で $3x=7 \,\}$ は空集合 $\emptyset$ である：

$$\{\, x \mid x \text{ は整数で } 3x=7 \,\} = \emptyset \ .$$

このように要素が全く無い集合は総て空集合である．

$$\{\, x \mid x \text{ は自然数で } x<0 \,\} = \emptyset \ ,$$

$$\{\, x \mid x \text{ は整数で } x^2=3 \,\} = \emptyset \ .$$

終

対象 a が集合 A に属すこと，つまり a が集合 A の要素であることを，次のように書き表す：

$$a \in A \ .$$

対象 a が集合 A に属すこと，つまり a が集合 A の要素であることを，次のように書き表す：

$$a \in A \ .$$

対象 a が集合 A に属さないこと，つまり a が集合 A の要素でないことを，次のように書き表す：

$$a \notin A$$

これは“ $a \in A$ でない ”ということである．

$\boxed{\text{例}}$ **集合** $S = \{0, 1, 4, 6, 8, 9\}$ **について次のようになる**：

$$0 \in S\ ,\quad 1 \in S\ ,\quad 2 \notin S\ ,\quad 3 \notin S\ ,\quad 4 \in S\ ,\quad 5 \notin S\ ,\quad 6 \in S\ ,\quad \ldots\ .$$ $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 0 以上の 3 の 倍数の全体を T とおく：

$$T = \{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上の } 3 \text{ の倍数である} \,\}\,.$$

$\boxed{\text{例}}$ 0 以上の 3 の 倍数の全体を T とおく：

$$T = \{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上の } 3 \text{ の倍数である} \,\}\ .$$

このとき，

$$0 \in T\ ,\quad 1 \notin T\ ,\quad 2 \notin T\ ,\quad 3 \in T\ ,\quad 4 \notin T\ ,\quad 5 \notin T\ ,\quad 6 \in T\ ,\quad \ldots\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 0 以上の 3 の 倍数の全体を T とおく：

$$T = \{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上の } 3 \text{ の倍数である} \,\} \,.$$

このとき，

$$0 \in T \,,\quad 1 \notin T \,,\quad 2 \notin T \,,\quad 3 \in T \,,\quad 4 \notin T \,,\quad 5 \notin T \,,\quad 6 \in T \,,\quad \ldots \,.$$

一般的に，任意の正の整数 x について，

$$\begin{aligned} x \in T \quad &\Longleftrightarrow \quad x \text{ は } 0 \text{ 以上の } 3 \text{ の倍数} \\ &\Longleftrightarrow \quad x \text{ は } 0 \text{ 以上の整数で } 3 \text{ で割り切れる} \\ &\Longleftrightarrow \quad x \text{ は } 0 \text{ 以上の整数で } x \text{ の各桁の数の和が } 3 \text{ で割り切れる} \,. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 0 以上の 3 の 倍数の全体を T とおく：

$$T = \{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上の } 3 \text{ の倍数である} \,\}.$$

このとき，

$$0 \in T\,,\quad 1 \notin T\,,\quad 2 \notin T\,,\quad 3 \in T\,,\quad 4 \notin T\,,\quad 5 \notin T\,,\quad 6 \in T\,,\quad \ldots .$$

一般的に，任意の正の整数 x について，

$$\begin{aligned} x \in T \iff & x \text{ は } 0 \text{ 以上の } 3 \text{ の倍数} \\ \iff & x \text{ は } 0 \text{ 以上の整数で } 3 \text{ で割り切れる} \\ \iff & x \text{ は } 0 \text{ 以上の整数で } x \text{ の各桁の数の和が } 3 \text{ で割り切れる}. \end{aligned}$$

よって例えば次のようになる：

3456 について各桁の数の和 $3+4+5+6$ は 3 で割り切れるので $3456 \in T$ ；

4567 について各桁の数の和 $4+5+6+7$ は 3 で割り切れないので $4567 \notin T$.

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問0.7.2}$ 0 以上の 9 の倍数の全体を N とおく：

$$N = \{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上の } 9 \text{ の倍数である} \,\}.$$

次のことが成り立つ：任意の整数 x について,

$$\begin{aligned} x \in N \quad &\Longleftrightarrow \quad x \text{ は } 0 \text{ 以上の } 9 \text{ の倍数} \\ &\Longleftrightarrow \quad x \text{ は } 0 \text{ 以上の整数で } 9 \text{ で割り切れる} \\ &\Longleftrightarrow \quad x \text{ は } 0 \text{ 以上の整数で } x \text{ の各桁の数の和が } 9 \text{ で割り切れる}. \end{aligned}$$

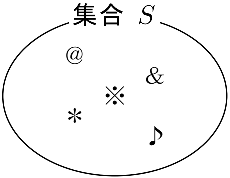
(1) $2345 \in N$ か $2345 \notin N$ か判定しなさい.

(2) $3456 \in N$ か $3456 \notin N$ か判定しなさい.

(1) $2+3+4+5=14$ は 9 の倍数ではないので $2345 \notin N$.

(2) $3+4+5+6=18$ は 9 の倍数なので $3456 \in N$.

集合を右図のような図で表すことがある．線で囲まれた内側が集合の範囲，というような意図です．右図の集合 S は @，&，※，∗，♪ を要素とする集合である：



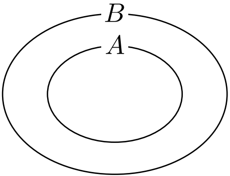
$$S = \{@, \&, ※, *, ♪\} .$$

集合 A と集合 B とについて，A の要素が総て B に属すとき，集合 B は集合 A を含む，或いは，集合 A は集合 B に含まれるという.

集合 A と集合 B とについて，A の要素が総て B に属すとき，集合 B は集合 A を含む，或いは，集合 A は集合 B に含まれるという．集合 A が集合 B に含まれるとき，集合 A は集合 B の部分集合であるといい，次のように書き表す：

$$A \subset B \ .$$

集合 A と集合 B とについて，A の要素が総て B に属すとき，集合 B は集合 A を含む，或いは，集合 A は集合 B に含まれるという．集合 A が集合 B に含まれるとき，集合 A は集合 B の部分集合であるといい，次のように書き表す：



$$A \subset B\ .$$

これは，直感的にいうと，右図のように集合 A の範囲より集合 B の範囲の方が広いことを意味する．

例 6 の倍数は総て 3 の倍数なので，集合 $\{\, x \mid x$ は整数で 6 の倍数である $\}$ の要素は総て集合 $\{\, x \mid x$ は整数で 3 の倍数である $\}$ に属す．従って次のことがいえる：

$$\{\, x \mid x \text{ は } 6 \text{ の倍数である} \,\} \subset \{\, x \mid x \text{ は } 3 \text{ の倍数である} \,\}\ .$$

終

$\boxed{\text{問}0.7.3}$ 12 の約数の全体

$$A = \{\, x \mid x \text{ は整数で } 12 \text{ の約数である} \,\}$$

と 36 の約数の全体

$$B = \{\, x \mid x \text{ は整数で } 36 \text{ の約数である} \,\}$$

とについて， $A \subset B$ か， $B \subset A$ か，どちらでもないか，判定せよ．

12 の約数は総て 36 の約数なので，集合

$$A = \{\, x \mid x \text{ は整数で } 12 \text{ の約数である} \,\}$$

の要素は総て集合

$$B = \{\, x \mid x \text{ は整数で } 36 \text{ の約数である} \,\}$$

に属す．従って $A \subset B$ ．

集合 A と B とについて次のことに注意すること：

$$A = B \text{ のときも } A \subset B\ .$$

また，空集合 $\emptyset$ は任意の集合の部分集合である.

合成された述語で定められる集合を考える.

例 集合

$$A = \{\, x \mid x \text{ は，0 以上 9 以下の整数で，素数でない} \,\}$$

は，0 以上 9 以下の整数のうちで素数でない数の全体であるから，

$$A = \{0, 1, 4, 6, 8, 9\} \,.$$

終

例 集合

$$B = \{\, x \mid x \text{ は，0 以上 9 以下の整数で，素数でありかつ奇数である} \,\}$$

は，0 以上 9 以下の整数のうち素数でありかつ奇数である数の全体であるから，

$$B = \{3,5,7\}\ .$$

終

$\boxed{\text{例}}$ 集合

$$C = \{ \ x \mid x \text{ は，} 0 \text{ 以上 } 9 \text{ 以下の整数で，素数であるかまたは偶数である} \}$$

は，0 以上 9 以下の整数のうち素数であるかまたは偶数である数の全体であるから，

$$C = \{0,2,3,4,5,6,7,8\} \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

例 集合

$$D = \{\, x \mid x \text{ は，0 以上 9 以下の整数で，素数であるならば奇数である} \,\}$$

は，0 以上 9 以下の整数のうち素数であるならば奇数である数の全体であるから，つまり，0 以上 9 以下の整数のうち素数でないかまたは奇数である数の全体であるから，

$$D = \{0,1,3,4,5,6,7,8,9\}\ .$$

$0,1,4,6,8,9$ は素数ではないので集合 D に属す. 終

$\boxed{問 0.7.4}$ 以下の集合を要素を列挙する表現で書き表しなさい.

$$A = \{\, x \mid x \text{ は，} 0 \text{ 以上 } 9 \text{ 以下の整数で，} 42 \text{ の約数でない} \,\} .$$

$$B = \{\, x \mid x \text{ は，} 0 \text{ 以上 } 9 \text{ 以下の整数で，} 42 \text{ の約数でありかつ奇数である} \,\} .$$

$$C = \{\, x \mid x \text{ は，} 0 \text{ 以上 } 9 \text{ 以下の整数で，} 42 \text{ の約数であるかまたは奇数である} \,\} ,$$

$$D = \{\, x \mid x \text{ は，} 0 \text{ 以上 } 9 \text{ 以下の整数で，} 42 \text{ の約数であるならば奇数である} \,\} .$$

$$A = \{0,4,5,8,9\} .$$

$$B = \{1,3,7\} .$$

$$C = \{1,2,3,5,6,7,9\} .$$

$$D = \{0,1,3,4,5,7,8,9\} .$$