1.2 冪と指数法則

数 a 及び正の整数 n に対して，a を n 個掛け合わせた積を a^n と書き表し，a の n 乗という：

$$a^n = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n\text{ 個の } a \text{ の積}} .$$

数 a 及び正の整数 n に対して，a を n 個掛け合わせた積を a^n と書き表し，a の n 乗という：

$$a^n = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n\text{ 個の } a \text{ の積}} \ .$$

例えば，数 c, t, x について，

$$c^2 = c \times c \ , \qquad t^3 = t \times t \times t \ , \qquad x^5 = x \times x \times x \times x \times x \ .$$

数 a 及び正の整数 n に対して，a を n 個掛け合わせた積を a^n と書き表し，a の n 乗という：

$$a^n = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n\text{ 個の } a \text{ の積}} \ .$$

例えば，数 c, t, x について，数 c, t, x について，

$$c^2 = c \times c \ , \qquad t^3 = t \times t \times t \ , \qquad x^5 = x \times x \times x \times x \times x \ .$$

数 a の 1 乗は a である：

$$a^1 = a \ .$$

数 a 及び正の自然数 n について，

$$a^n \times a = (\overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n \text{ 個の } a \text{ の積}}) \times a = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a \times a}^{(n+1) \text{ 個の } a \text{ の積}} = a^{n+1}$$

つまり $a^n \times a = a^{n+1}$.

数 a 及び正の自然数 n について,

$$a^n \times a = (\overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n\text{ 個の } a \text{ の積}}) \times a = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a \times a}^{(n+1)\text{ 個の } a \text{ の積}} = a^{n+1}$$

つまり $a^n \times a = a^{n+1}$. この等式は $n = 0$ のときも成り立つようにしたい;

つまり $a^0 \times a = a^1 = a$ となるようにしたい.

数 a 及び正の自然数 n について,

$$a^n \times a = (\overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n\text{ 個の } a \text{ の積}}) \times a = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a \times a}^{(n+1)\text{ 個の } a \text{ の積}} = a^{n+1}$$

つまり $a^n \times a = a^{n+1}$. この等式は $n = 0$ のときも成り立つようにしたい;
つまり $a^0 \times a = a^1 = a$ となるようにしたい. $a^0 \times a = a$ となるには $a^0 = 1$ となればよい. そこで a の 0 乗 a^0 を次のように定義する.

定義 0 以外の任意の数 a に対して $a^0 = 1$.

数 a 及び正の自然数 n について，

$$a^n \times a = (\overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n\ \text{個の}\ a\ \text{の積}}) \times a = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a \times a}^{(n+1)\ \text{個の}\ a\ \text{の積}} = a^{n+1}$$

つまり $a^n \times a = a^{n+1}$ ．この等式は $n = 0$ のときも成り立つようにしたい；つまり $a^0 \times a = a^1 = a$ となるようにしたい．$a^0 \times a = a$ となるには $a^0 = 1$ となればよい．そこで a の 0 乗 a^0 を次のように定義する．

定義　0 以外の任意の数 a に対して $a^0 = 1$ ．

このように同じ数を何個か（0 個以上）掛け合わせた積（の形の式）を，冪（べき）または累乗という．また，数 a の n 乗の式 a^n において，n を指数という．

例として数 a に対して a^2a^3 を計算する：

$$a^2a^3 = (a \times a) \times (a \times a \times a) = a \times a \times a \times a \times a = a^5 \ .$$

例として数 a に対して a^2a^3 を計算する：

$$a^2a^3 = (a\times a)\times(a\times a\times a) = a\times a\times a\times a\times a = a^5\ .$$

一般的に，数 a と自然数 m,n とについて，

$$\begin{aligned} a^m a^n &= (\overbrace{a\times a\times a\times\cdots\times a}^{m\text{ 個の }a\text{ の積}})\times(\overbrace{a\times a\times a\times\cdots\times a}^{n\text{ 個の }a\text{ の積}}) = \overbrace{a\times a\times a\times a\times\cdots\times a}^{(m+n)\text{ 個の }a\text{ の積}} \\ &= a^{m+n}\ , \end{aligned}$$

つまり $a^m a^n = a^{m+n}$.

例として数 a に対して $(a^2)^3$ を計算する：

$$(a^2)^3 = (a \times a)^3 = (a \times a) \times (a \times a) \times (a \times a) = a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6 \ .$$

例として数 a に対して $(a^2)^3$ を計算する：

$$(a^2)^3 = (a \times a)^3 = (a \times a) \times (a \times a) \times (a \times a) = a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6 \ .$$

一般的に，数 a と自然数 m, n とについて，

$$\begin{aligned}(a^m)^n &= \underbrace{(\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{m\text{ 個の }a\text{ の積}}) \times (\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{m\text{ 個の }a\text{ の積}}) \times \cdots \times (\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{m\text{ 個の }a\text{ の積}})}_{m\text{ 個の }a\text{ の積が }n\text{ 個}} \\ &= \overbrace{a \times a \times a \times a \times \cdots \times a}^{mn\text{ 個の }a\text{ の積}} = a^{mn} \ ,\end{aligned}$$

つまり $(a^m)^n = a^{mn}$.

例として 0 以外の数 a に対して $\dfrac{a^5}{a^3}$ を計算する：

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a} = a \times a = a^2 \ .$$

例として 0 以外の数 a に対して $\dfrac{a^5}{a^3}$ を計算する：

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a} = a \times a = a^2 \ .$$

一般的に，0 以外の数 a と自然数 m, n とについて， $m \geq n$ のとき，

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a \times a}^{m\text{ 個の }a\text{ の積}}}{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{ 個の }a\text{ の積}}} = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{(m-n)\text{ 個の }a\text{ の積}} = a^{m-n} \ ,$$

つまり $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

以上の結果を指数法則という.

定理（自然数指数の指数法則） 任意の数 a と任意の自然数 m, n とについて,

$$a^m a^n = a^{m+n} \ , \qquad (a^m)^n = a^{mn} \ ,$$

$$a \neq 0 \ \text{で} \ m \geq n \ \text{のとき} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \ .$$

例として数 a, b に対して $(ab)^3$ を計算する：

$$(ab)^3 = ab \times ab \times ab = a \times a \times a \times b \times b \times b = (a \times a \times a) \times (b \times b \times b) = a^3 b^3 \ .$$

例として数 a, b に対して $(ab)^3$ を計算する：

$$(ab)^3 = ab \times ab \times ab = a \times a \times a \times b \times b \times b = (a \times a \times a) \times (b \times b \times b) = a^3 b^3 \ .$$

一般的に，数 a, b と自然数 n とについて $(ab)^n = a^n b^n$ ：

$$\begin{aligned}(ab)^n &= (a \times b)^n = \overbrace{(a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) \times \cdots \times (a \times b)}^{n\text{ 個の } a \times b \text{ の積}} \\ &= \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n\text{ 個の } a \text{ の積}} \times \overbrace{b \times b \times b \times \cdots \times b}^{n\text{ 個の } b \text{ の積}} \\ &= a^n b^n \ .\end{aligned}$$

例として数 a, b（ $b \neq 0$ ）に対して $\left(\frac{a}{b}\right)^4$ を計算する：

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a \times a \times a \times a}{b \times b \times b \times b} = \frac{a^4}{b^4} \ .$$

例として数 a, b （ $b \neq 0$ ）に対して $\left(\frac{a}{b}\right)^4$ を計算する：

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a \times a \times a \times a}{b \times b \times b \times b} = \frac{a^4}{b^4} .$$

一般的に，数 a, b （ $b \neq 0$ ）と自然数 n とについて $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ ：

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \overbrace{\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \cdots \times \frac{a}{b}}^{n\text{ 個の }\frac{a}{b}\text{ の積}} = \frac{\overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n\text{ 個の }a\text{ の積}}}{\underbrace{b \times b \times b \times \cdots \times b}_{n\text{ 個の }b\text{ の積}}} = \frac{a^n}{b^n} .$$

このようにして次の定理が導かれる．この定理も指数法則といわれる．

定理（自然数指数の指数法則）　任意の数 a, b と任意の自然数 n とについて，

$$(ab)^n = a^n b^n \ , \qquad b \neq 0 \text{ のとき } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \ .$$

例 数 a, b, x, y は 0 以外の数とする.

$\boxed{例}$ 数 a, b, x, y は 0 以外の数とする.

$$
\begin{aligned}
2a^3b(3ab^3)^2 &= 2a^3b \cdot 3^2a^2(b^3)^2 = 2a^3b \cdot 9a^2b^6 = 18a^{3+2}b^{1+6} \\
&= 18a^5b^7 \quad .
\end{aligned}
$$

例 数 a, b, x, y は 0 以外の数とする.

$$2a^3b(3ab^3)^2 = 2a^3b \cdot 3^2a^2(b^3)^2 = 2a^3b \cdot 9a^2b^6 = 18a^{3+2}b^{1+6}$$
$$= 18a^5b^7 \ .$$

$$6x^5y\left(\frac{y^2}{3x}\right)^2 = 6x^5y\frac{(y^2)^2}{(3x)^2} = 6x^5y\frac{y^{2\cdot2}}{3^2x^2} = 6x^5y\frac{y^4}{9x^2} = \frac{6}{9}x^{5-2}y^{1+4}$$
$$= \frac{2}{3}x^3y^5 \ .$$

終

$\boxed{\text{問}1.2}$ 数 a, b, c, d, x, y は 0 でないとする．以下の式を計算して簡単にせよ．

(1) $3ab^2(2a^2b)^3$.　**(2)** $\dfrac{4y^7}{3x^4}\left(\dfrac{x^2}{2y}\right)^3$.　**(3)** $\dfrac{(3c^2d)^3}{6c^4d}$.

$\boxed{問 1.2}$ 数 a, b, c, d, x, y は 0 でないとする．以下の式を計算して簡単にせよ．

(1) $3ab^2(2a^2b)^3$ ． **(2)** $\dfrac{4y^7}{3x^4}\left(\dfrac{x^2}{2y}\right)^3$ ． **(3)** $\dfrac{(3c^2d)^3}{6c^4d}$ ．

(1)

$$3ab^2(2a^2b)^3 = 3ab^2 \cdot 2^3(a^2)^3b^3 = 3ab^2 \cdot 8a^6b^3 = 24a^{1+6}b^{2+3} = 24a^7b^5 \ .$$

問1.2 数 a, b, c, d, x, y は 0 でないとする．以下の式を計算して簡単にせよ．

(1) $3ab^2(2a^2b)^3$.　　**(2)** $\dfrac{4y^7}{3x^4}\left(\dfrac{x^2}{2y}\right)^3$.　　**(3)** $\dfrac{(3c^2d)^3}{6c^4d}$.

(1)

$$3ab^2(2a^2b)^3 = 3ab^2 \cdot 2^3(a^2)^3b^3 = 3ab^2 \cdot 8a^6b^3 = 24a^{1+6}b^{2+3} = 24a^7b^5 \ .$$

(2)

$$\frac{4y^7}{3x^4}\left(\frac{x^2}{2y}\right)^3 = \frac{4y^7}{3x^4}\frac{(x^2)^3}{(2y)^3} = \frac{4y^7}{3x^4}\frac{x^6}{8y^3} = \frac{1}{6}x^{6-4}y^{7-3} = \frac{x^2y^4}{6} \ .$$

$\boxed{問1.2}$ 数 a, b, c, d, x, y は 0 でないとする．以下の式を計算して簡単にせよ．

(1) $3ab^2(2a^2b)^3$.　**(2)** $\dfrac{4y^7}{3x^4}\left(\dfrac{x^2}{2y}\right)^3$.　**(3)** $\dfrac{(3c^2d)^3}{6c^4d}$.

(1)

$$3ab^2(2a^2b)^3 = 3ab^2 \cdot 2^3(a^2)^3b^3 = 3ab^2 \cdot 8a^6b^3 = 24a^{1+6}b^{2+3} = 24a^7b^5 \ .$$

(2)

$$\frac{4y^7}{3x^4}\left(\frac{x^2}{2y}\right)^3 = \frac{4y^7}{3x^4}\frac{(x^2)^3}{(2y)^3} = \frac{4y^7}{3x^4}\frac{x^6}{8y^3} = \frac{1}{6}x^{6-4}y^{7-3} = \frac{x^2y^4}{6} \ .$$

(3)

$$\frac{(3c^2d)^3}{6c^4d} = \frac{3^3(c^2)^3d^3}{6c^4d} = \frac{3^3c^6d^3}{6c^4d} = \frac{9c^2d^2}{2} \ .$$