1.5 実数の大小関係

実数には大小関係がある. 実数の大小関係を不等号を用いて表す.

例えば，実数 x が 7 以下ということは，x は 7 より小さいかまたは x は 7 に等しいということである：

$$x \leq 7 \iff x < 7 \text{ または } x = 7 .$$

法則 1.5.1　実数 a と b とについて

$$a \leq b \iff a < b \text{ または } a = b .$$

この法則により，実数 a と b とについて，$a < b$ と $a = b$ とのどちらかでも成り立てば $a \leq b$ である．例えば，$2 < 3$ なので $2 \leq 3$，$5 = 5$ なので $5 \leq 5$．

定理 1.5.1　任意の実数 a と b とについて，

$$a < b \text{ ならば } a \leq b, \qquad a = b \text{ ならば } a \leq b .$$

例えば，実数 x が 7 より小さくないということは，x は 7 以上ということである：

$$x \not< 7 \iff x \geq 7 \ .$$

法則 1.5.2　実数 a と b とについて，

$$a \not< b \iff a \geq b \ .$$

$$a \not\leq b \iff a > b \ .$$

例えば，実数 x は 7 より小さいかまたは 7 以上である：$x < 7$ または $x \geq 7$ ．

定理 1.5.2　任意の実数 a と b とについて，$a < b$ または $a \geq b$ ．

証明　$a < b$ または $a \not< b$ ，法則 **1.5.2** により $a \not< b$ ならば $a \geq b$ ，従って $a < b$ または $a \geq b$ ．　（証明終了）

(法則 1.5.2) 任意の実数 a, b について，$a \not< b \iff a \geq b$ ．

例えば，実数 x が 7 より小さいならば x は 7 と等しくない：$x < 7$ ならば $x \neq 7$ ．

定理 1.5.3　任意の実数 a と b とについて，$a < b$ ならば $a \neq b$ ．

証明　定理 1.5.1 により，$a = b$ ならば $a \geq b$ ；法則 1.5.2 により，$a \geq b$ ならば $a \nless b$ ．従って，$a = b$ ならば $a \nless b$ ．対偶をとると，$a < b$ ならば $a \neq b$ ．（証明終了）

(定理 1.5.1) 任意の実数 a, b について，$a = b$ ならば $a \geq b$ ．

(法則 1.5.2) 任意の実数 a, b について，$a \geq b \iff a \nless b$ ．

例えば，実数 x について，$x \leq 7$ かつ $x \geq 7$ ならば，$x = 7$ ．

定理 1.5.4　任意の実数 a と b とについて，$a \leq b$ かつ $a \geq b$ ならば，$a = b$ ．

証明　$a \leq b$ かつ $a \geq b$ と仮定する．$a \leq b$ なので，法則 **1.5.1** により $a < b$ または $a = b$ ．$a \geq b$ なので，法則 **1.5.2** により $a \not< b$ ．このように，$a < b$ または $a = b$ で，$a \not< b$ なので，$a = b$ ．（証明終了）

(法則 1.5.1) 任意の実数 a, b について，$a \leq b \iff a < b$ または $a = b$ ．

(法則 1.5.2) 任意の実数 a, b について，$a \geq b \iff a \not< b$ ．

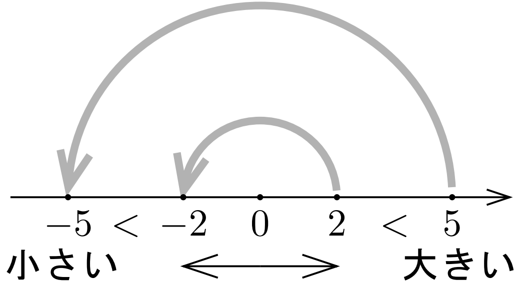
不等号が表す大小関係と加法・乗法とについて，次の法則が基本になる．

法則 1.5.3　任意の実数 a, b, c について，

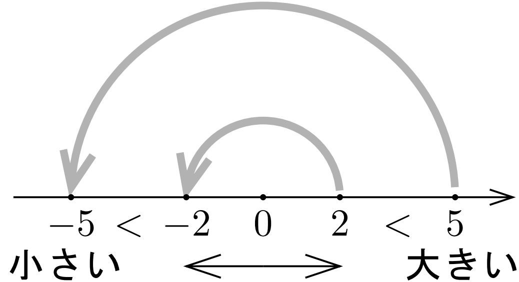
$$a < b \ \text{ならば}\ a + c < b + c \ ,$$

$$a < b \ \text{かつ}\ c > 0 \quad \text{ならば} \quad ac < bc \ .$$

　2 と 5 との大小を比べると $2<5$ ， -2 と -5 との大小を比べると $-2>-5$ ；このように，不等式の両辺の符号（正か負かということ）が反対になると大小関係も反対になる．



　2 と 5 との大小を比べると $2<5$ ， -2 と -5 との大小を比べると $-2>-5$ ；このように，不等式の両辺の符号（正か負かということ）が反対になると大小関係も反対になる．



定理 1.5.5　任意の実数 a,b について，

$$a<b \text{ ならば } -a>-b \quad , \qquad a\leq b \text{ ならば } -a\geq -b \quad .$$

定理 1.5.5　任意の実数 a, b について，

$$a < b \text{ ならば } -a > -b \quad , \qquad a \leq b \text{ ならば } -a \geq -b \quad .$$

証明　例として“ $a < b$ ならば $-a > -b$ ”を証明する．

実数 a, b について $a < b$ と仮定する．法則 **1.5.3** により

$$a + (-a - b) < b + (-a - b) \ ,$$

この不等式の左辺は $a + (-a - b) = -b$ で右辺は $b + (-a - b) = -a$ なので，

$$-b < -a \ ,$$

つまり $-a > -b$.　　(証明終了)

(法則 1.5.3) 任意の実数 a, b, c について， $a < b$ ならば $a + c < b + c$.

定理 1.5.6　任意の実数 a, b, c について，

$$a < b \text{ かつ } c < 0 \quad \text{ならば} \quad ac > bc \ .$$

証明　実数 a, b, c について $a < b$ かつ $c < 0$ とする． $c < 0$ なので，定理 **1.5.5** により $-c > -0$ つまり $-c > 0$ ． 従って， $a > b$ かつ $-c > 0$ なので，法則 **1.5.3** により $a \cdot (-c) < b \cdot (-c)$ つまり $-ac < -bc$ ． 定理 **1.5.5** により $-(-ac) > -(-bc)$ つまり $ac > bc$ ．（証明終了）

(定理 1.5.5) 任意の実数 a, b について， $a < b$ ならば $-a > -b$ ．

(法則 1.5.3) 任意の実数 a, b, c について， $a < b$ かつ $c > 0$ ならば， $ac < bc$ ．

(定理 1.5.5) 任意の実数 a, b について， $a < b$ ならば $-a > -b$ ．

等号付きの不等号についても同様のことが成り立つ（証明は略す）.

定理 1.5.7　任意の実数 a, b, c について,

$$a \leq b \text{ ならば } a+c \leq b+c \quad ;$$

$$a \leq b \text{ かつ } c \geq 0 \quad \text{ならば} \quad ac \leq bc \quad ;$$

$$a \leq b \text{ かつ } c \leq 0 \quad \text{ならば} \quad ac \geq bc \quad .$$

定理 1.5.8　任意の実数 a と b とについて,

$$a>0 \text{ かつ } b>0 \quad \text{ならば} \quad ab>0 \ ,$$
$$a>0 \text{ かつ } b<0 \quad \text{ならば} \quad ab<0 \ ,$$
$$a<0 \text{ かつ } b>0 \quad \text{ならば} \quad ab<0 \ ,$$
$$a<0 \text{ かつ } b<0 \quad \text{ならば} \quad ab>0 \ .$$

証明　一部のみ証明する．他の部分も同様に証明できる．法則 **1.5.3** により

$$0<a \text{ かつ } b>0 \quad \text{ならば} \quad 0b<ab \ ,$$

つまり

$$a>0 \text{ かつ } b>0 \quad \text{ならば} \quad ab>0 \ .$$

定理 **1.5.6** により

$$a<0 \text{ かつ } b<0 \quad \text{ならば} \quad ab>0b \ ,$$

つまり

$$a<0 \text{ かつ } b<0 \quad \text{ならば} \quad ab>0 \ .$$

(証明終了)

(法則 1.5.3) 任意の実数 a,b,c について,　$a<b$ かつ $c>0$ ならば,　$ac<bc$.

(定理 1.5.6) 任意の実数 a,b,c について,　$a<b$ かつ $c<0$ ならば,　$ac>bc$.

等号付きの不等号についても同様のことが成り立つ（証明は略す）.

定理 1.5.9　任意の実数 a と b とについて,

$$a \geq 0 \text{ かつ } b \geq 0 \quad \text{ならば} \quad ab \geq 0\ ,$$
$$a \geq 0 \text{ かつ } b \leq 0 \quad \text{ならば} \quad ab \leq 0\ ,$$
$$a \leq 0 \text{ かつ } b \geq 0 \quad \text{ならば} \quad ab \leq 0\ ,$$
$$a \leq 0 \text{ かつ } b \leq 0 \quad \text{ならば} \quad ab \geq 0\ .$$

定理 1.5.10　任意の実数 a について $a^2 \geq 0$ ．

証明　定理 1.5.9 により，

$$a \geq 0 \text{ かつ } a \geq 0 \quad \text{ならば} \quad aa \geq 0 \text{ ．}$$

つまり，$a \geq 0$ ならば $a^2 \geq 0$ ．また，定理 1.5.8 により，

$$a < 0 \text{ かつ } a < 0 \quad \text{ならば} \quad aa > 0 \text{ ．}$$

つまり，$a < 0$ ならば $a^2 > 0$ ．定理 1.5.1 により $a^2 > 0$ ならば $a^2 \geq 0$ なので，$a < 0$ ならば $a^2 \geq 0$ ．

　こうして次のことが成り立つ：$a \geq 0$ ならば $a^2 \geq 0$ ，$a < 0$ ならば $a^2 \geq 0$ ．定理 1.5.2 により $a \geq 0$ または $a < 0$ ；$a \geq 0$ のときも $a < 0$ のときも $a^2 \geq 0$ なので，いずれにせよ $a^2 \geq 0$ ．（証明終了）

(定理 1.5.9) 任意の実数 a, b について，$a \geq 0$ かつ $b \geq 0$ ならば，$ab \geq 0$ ．

(定理 1.5.8) 任意の実数 a, b について，$a < 0$ かつ $b < 0$ ならば，$ab > 0$ ．

(定理 1.5.1) 任意の実数 a, b について，$a > b$ ならば $a \geq b$ ．

(定理 1.5.2) 任意の実数 a, b について，$a \geq b$ または $a < b$ ．

述語 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ とについて，“ $\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B}$ ”のとき“ $\mathcal{A}$ でない $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{B}$ でない ”.

定理 1.5.11　任意の実数 a について，

$$a^2 \leq 0 \iff a^2 = 0 \iff a = 0 \ ,$$

$$a^2 > 0 \iff a^2 \neq 0 \iff a \neq 0 \ .$$

定理 1.5.11　任意の実数 a について，

$$a^2 \leq 0 \iff a^2 = 0 \iff a = 0 \ ,$$

$$a^2 > 0 \iff a^2 \neq 0 \iff a \neq 0 \ .$$

証明　定理 1.5.10 により $a^2 \geq 0$ なので，$a^2 \leq 0$ ならば，定理 1.5.4 により $a^2 = 0$ ，定理 1.1.2 により $a = 0$ ．逆に，$a = 0$ ならば，$a^2 = 0$ なので，定理 1.5.1 により $a^2 \leq 0$ ．故に

$$a^2 \leq 0 \iff a^2 = 0 \iff a = 0 \ .$$

(定理 1.5.10) 任意の実数 a について $a^2 \geq 0$ ．

(定理 1.5.4) 任意の実数 a, b について，$a \leq b$ かつ $a \geq b$ ならば，$a = b$ ．

(定理 1.1.2) 任意の数 a について，$a^2 = 0 \iff a = 0$ ．

(定理 1.5.1) 任意の実数 a, b について，$a = b$ ならば $a \leq b$ ．

定理 1.5.11　任意の実数 a について，

$$a^2 \leq 0 \iff a^2 = 0 \iff a = 0 \ ,$$

$$a^2 > 0 \iff a^2 \neq 0 \iff a \neq 0 \ .$$

証明　定理 1.5.10 により $a^2 \geq 0$ なので，$a^2 \leq 0$ ならば，定理 1.5.4 により $a^2 = 0$ ，定理 1.1.2 により $a = 0$ ．逆に，$a = 0$ ならば，$a^2 = 0$ なので，定理 1.5.1 により $a^2 \leq 0$ ．故に

$$a^2 \leq 0 \iff a^2 = 0 \iff a = 0 \ .$$

これより更に

$$a^2 \not\leq 0 \iff a \neq 0 \ .$$

法則 1.5.2 により，

$$a^2 > 0 \iff a^2 \not\leq 0 \iff a \neq 0 \ .$$

（証明終了）

(法則 1.5.2) 任意の実数 a, b について，$a > b \iff a \not\leq b$ ．

定理 1.5.12　実数 a, b について，

$$a^2+b^2 \leq 0 \iff a^2+b^2=0 \iff a=0 \text{ かつ } b=0 .$$

証明　**定理 1.5.10** により $b^2 \geq 0$ ，**定理 1.5.5** により $-b^2 \leq 0$ ． $a^2+b^2 \leq 0$ ならば， $a^2 \leq -b^2 \leq 0$ ，**定理 1.5.11** により $a=0$ ．同様に， $a^2 \geq 0$ より $-a^2 \leq 0$ なので， $a^2+b^2 \leq 0$ ならば， $b^2 \leq -a^2 \leq 0$ ，**定理 1.5.11** により $b=0$ ．逆に， $a=0$ かつ $b=0$ ならば， $a^2+b^2=0$ なので，**定理 1.5.1** により $a^2+b^2 \leq 0$ ．　(証明終了)

(定理 1.5.10) 任意の実数 a について $a^2 \geq 0$.

(定理 1.5.5) 任意の実数 a, b について， $a \geq b$ ならば $-a \leq -b$.

(定理 1.5.11) 任意の実数 a について， $a^2 \leq 0 \iff a=0$.

(定理 1.5.1) 任意の実数 a, b について， $a=b$ ならば $a \leq b$.

定理 1.5.13　任意の実数 a について，

$$a > 0 \text{ ならば } \frac{1}{a} > 0 \ , \qquad a < 0 \text{ ならば } \frac{1}{a} < 0 \ .$$

証明　“ $a > 0$ ならば $\dfrac{1}{a} > 0$ ” を証明する．

　実数 a について $a > 0$ と仮定する．定理 **1.5.3** より $a \neq 0$ ．定理 **1.5.1** より $a \geq 0$ ．仮に $\dfrac{1}{a} \leq 0$ とすると，定理 **1.5.9** により $a \cdot \dfrac{1}{a} \leq 0$ つまり $1 \leq 0$ ；これは矛盾である．よって $\dfrac{1}{a} \not\leq 0$ ，法則 **1.5.2** により $\dfrac{1}{a} > 0$ ．　(証明終了)

(定理 1.5.3) 任意の実数 a, b について，$a > b$ ならば $a \neq b$ ．

(定理 1.5.1) 任意の実数 a, b について，$a > b$ ならば $a \geq b$ ．

(定理 1.5.9) 任意の実数 a, b について，$a \geq 0$ かつ $b \leq 0$ ならば，$ab \leq 0$ ．

(法則 1.5.2) 任意の実数 a, b について，$a \not\leq b \iff a > b$ ．