1.6　根号

数 a に対して, $x^2 = a$ となる数 x を a の平方根という. つまり数 a の平方根とは 2 乗すると a になる数のことである. 例えば, $3^2 = 9$, $(-3)^2 = 9$ なので, 3 と -3 とは 9 の平方根である.

数 a に対して，$x^2 = a$ となる数 x を a の平方根という．つまり数 a の平方根とは 2 乗すると a になる数のことである．例えば，$3^2 = 9$ ，$(-3)^2 = 9$ なので，3 と -3 とは 9 の平方根である．一般に，任意の数 x について，定理 **1.3** により $(-x)^2 = x^2$ なので，x が a の平方根ならば $-x$ も a の平方根である．

平方根の存在に関して次の定理が成り立つ．その証明は省く．

定理 1.6.1　0 以上の任意の実数 a に対して，2 乗すると a になる 0 以上の実数が唯一つある．

平方根の存在に関して次の定理が成り立つ．その証明は省く.

定理 1.6.1　0 以上の任意の実数 a に対して，2 乗すると a になる 0 以上の実数が唯一つある.

定義　0 以上の任意の実数 a に対して，2 乗すると a になる 0 以上の実数を $\sqrt{a}$ と書き表す.

平方根の存在に関して次の定理が成り立つ．その証明は省く．

定理 1.6.1　0 以上の任意の実数 a に対して，2 乗すると a になる 0 以上の実数が唯一つある．

定義　0 以上の任意の実数 a に対して，2 乗すると a になる 0 以上の実数を $\sqrt{a}$ と書き表す．

この定義より，0 以上の実数の根号の値は 0 以上である．

定理 1.6.2　$a \geq 0$ である任意の実数 a に対して $\sqrt{a} \geq 0$ ．

平方根の存在に関して次の定理が成り立つ．その証明は省く．

定理 1.6.1　0 以上の任意の実数 a に対して，2 乗すると a になる 0 以上の実数が唯一つある．

定義　0 以上の任意の実数 a に対して，2 乗すると a になる 0 以上の実数を $\sqrt{a}$ と書き表す．

この定義より，0 以上の実数の根号の値は 0 以上である．

定理 1.6.2　$a \geq 0$ である任意の実数 a に対して $\sqrt{a} \geq 0$ ．

つまり，0 以上の実数 a に対して $\sqrt{a}$ は a の 0 以上の平方根である．例えば，9 の平方根には 3 と -3 とがあるが，$\sqrt{9}$ はそれらのうち 0 以上の方を表す： $\sqrt{9} = 3$ ．

平方根の存在に関して次の定理が成り立つ．その証明は省く．

定理 1.6.1　0 以上の任意の実数 a に対して，2 乗すると a になる 0 以上の実数が唯一つある．

定義　0 以上の任意の実数 a に対して，2 乗すると a になる 0 以上の実数を $\sqrt{a}$ と書き表す．

この定義より，0 以上の実数の根号の値は 0 以上である．

定理 1.6.2　$a \geq 0$ である任意の実数 a に対して $\sqrt{a} \geq 0$ ．

つまり，0 以上の実数 a に対して $\sqrt{a}$ は a の 0 以上の平方根である．例えば，9 の平方根には 3 と -3 とがあるが，$\sqrt{9}$ はそれらのうち 0 以上の方を表す：$\sqrt{9} = 3$ ．

記号 $\sqrt{}$ を根号という．$(\sqrt{A})^2$ を $\sqrt{A}^2$ のように略す．

$\boxed{例}$ 円周率 π に対して $X=\sqrt{\pi^2-8\pi+16}$ とおく.

$\boxed{例}$ 円周率 π に対して $X=\sqrt{\pi^2-8\pi+16}$ とおく. $X=\sqrt{\pi^2-8\pi+16}$ は $\pi^2-8\pi+16$ の平方根なので,

$$X^2=\pi^2-8\pi+16=(\pi-4)^2 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 円周率 π に対して $X=\sqrt{\pi^2-8\pi+16}$ とおく. $X=\sqrt{\pi^2-8\pi+16}$ は $\pi^2-8\pi+16$ の平方根なので,

$$X^2 = \pi^2-8\pi+16 = (\pi-4)^2 \ .$$

定理 1.3.2 "任意の実数 a, b について, $a^2=b^2 \iff a=\pm b$." により

$$X = \pm(\pi-4) \ .$$

例 円周率 π に対して $X=\sqrt{\pi^2-8\pi+16}$ とおく. $X=\sqrt{\pi^2-8\pi+16}$ は $\pi^2-8\pi+16$ の平方根なので,

$$X^2=\pi^2-8\pi+16=(\pi-4)^2\ .$$

定理 1.3.2 “任意の実数 a,b について, $a^2=b^2 \iff a=\pm b\ .$” により

$$X=\pm(\pi-4)\ .$$

$\pi<4$ なので,

$$X=\pi-4>0 \text{ または } X=-(\pi-4)=4-\pi<0\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 円周率 π に対して $X = \sqrt{\pi^2 - 8\pi + 16}$ とおく. $X = \sqrt{\pi^2 - 8\pi + 16}$ は $\pi^2 - 8\pi + 16$ の平方根なので,

$$X^2 = \pi^2 - 8\pi + 16 = (\pi - 4)^2 \ .$$

定理 1.3.2 “任意の実数 a, b について, $a^2 = b^2 \iff a = \pm b$.” により

$$X = \pm(\pi - 4) \ .$$

$\pi < 4$ なので,

$$X = \pi - 4 > 0 \ \text{または} \ X = -(\pi - 4) = 4 - \pi < 0 \ .$$

定理 1.6.2 “$a \geq 0$ である任意の実数 a について $\sqrt{a} \geq 0$.” により $X = \sqrt{\pi^2 - 8\pi + 16} \geq 0$ なので, $X = 4 - \pi$, つまり

$$\sqrt{\pi^2 - 8\pi + 16} = 4 - \pi \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

定理 1.6.3　$a \geq 0$ である任意の実数 a について，

$$\sqrt{a}^{\,2} = a \ , \qquad \sqrt{a^2} = a \ .$$

定理 1.6.3 $a \geq 0$ である任意の実数 a について,

$$\sqrt{a}^2 = a \ , \qquad \sqrt{a^2} = a \ .$$

証明　根号の定義により $\sqrt{a}$ は 2 乗すると a になる数なので, $\sqrt{a}^2 = a$.

定理 1.6.3　$a \geq 0$ である任意の実数 a について，

$$\sqrt{a}^2 = a\ , \qquad \sqrt{a^2} = a\ .$$

証明　根号の定義により $\sqrt{a}$ は 2 乗すると a になる数なので，$\sqrt{a}^2 = a$.

根号の定義により，$\sqrt{a^2}$ は 2 乗すると a^2 になる 0 以上の実数である．a は 2 乗すると a^2 になり 0 以上の実数である．定理 **1.6.1** により，2 乗すると a^2 になる 0 以上の実数は一つある．

(定理 1.6.1)　0 以上の任意の実数 a に対して，2 乗すると a になる 0 以上の実数が唯一つある．

定理 1.6.3　$a \geq 0$ である任意の実数 a について，

$$\sqrt{a}^2 = a \ , \qquad \sqrt{a^2} = a \ .$$

証明　根号の定義により $\sqrt{a}$ は 2 乗すると a になる数なので，$\sqrt{a}^2 = a$.

根号の定義により，$\sqrt{a^2}$ は 2 乗すると a^2 になる 0 以上の実数である．a は 2 乗すると a^2 になり 0 以上の実数である．定理 **1.6.1** により，2 乗すると a^2 になる 0 以上の実数は一つある．従って $\sqrt{a^2} = a$.

“2 乗すると a になる 0 以上の実数” ということを $\sim\!\sim$ と略記すると，**(1)** $\sqrt{a^2}$ は $\sim\!\sim$ である；**(2)** a は $\sim\!\sim$ である；**(3)** $\sim\!\sim$ は一つしかない；**(4)** 従って $\sqrt{a^2} = a$ である．

定理 1.6.3 $a \geq 0$ である任意の実数 a について,

$$\sqrt{a}^{\,2} = a\ , \qquad \sqrt{a^2} = a\ .$$

証明　根号の定義により $\sqrt{a}$ は 2 乗すると a になる数なので, $\sqrt{a}^{\,2} = a$.

根号の定義により, $\sqrt{a^2}$ は 2 乗すると a^2 になる 0 以上の実数である. a は 2 乗すると a^2 になり 0 以上の実数である. 定理 **1.6.1** により, 2 乗すると a^2 になる 0 以上の実数は一つしかない. 従って $\sqrt{a^2} = a$. 終

$0 = 0^2$, $1 = 1^2$ なので, 定理 **1.6.3** により,

$$\sqrt{0} = \sqrt{0^2} = 0\ , \qquad \sqrt{1} = \sqrt{1^2} = 1\ .$$

例えば負の実数 $a=-3$ について, $-a=3$ なので,

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = -a \ .$$

例えば負の実数 $a=-3$ について， $-a=3$ なので，

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = -a \ .$$

一般的に次の定理が成り立つ.

定理 1.6.4 $a \leq 0$ である任意の実数 a について $\sqrt{a^2} = -a$.

例えば負の実数 $a=-3$ について， $-a=3$ なので，

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = -a \ .$$

一般的に次の定理が成り立つ.

定理 1.6.4 $a \leq 0$ である任意の実数 a について $\sqrt{a^2}=-a$.

証明 実数 a について $a \leq 0$ とする. 定理 **1.5.5** により $-a \geq 0$. 定理 **1.3.1** により $a^2=(-a)^2$ なので， $\sqrt{a^2}=\sqrt{(-a)^2}$ ， $-a \geq 0$ なので定理 **1.6.3** により $\sqrt{(-a)^2}=-a$ ，故に $\sqrt{a^2}=-a$. (証明終了)

(定理 1.5.5) 任意の実数 a, b について， $a \leq b$ ならば $-a \geq -b$.

(定理 1.3.1) 任意の実数 a について $(-a)^2=a^2$.

(定理 1.6.3) $a \geq 0$ である任意の実数 a について $\sqrt{a^2}=a$.

例えば $\sqrt{9+4^2}$ と $\sqrt{9+4}^2$ との違いに注意すること：

$$\sqrt{9+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \ ,$$

$$\sqrt{9+4}^2 = \sqrt{13}^2 = 13 \ .$$

定理 1.6.5　$a > 0$ である任意の実数 a について $\sqrt{a} > 0$.

証明　実数 a について $a > 0$ とする．定理 **1.5.3** により $a \neq 0$ ．仮に $\sqrt{a} = 0$ とすると，$\sqrt{a}^2 = 0$ ，定理 **1.6.3** により $\sqrt{a}^2 = a$ なので $a = 0$ ．ところが $a \neq 0$ なので，$\sqrt{a} \neq 0$ ．根号の定義により $\sqrt{a} \geq 0$ なので，法則 **1.5.1** により，$\sqrt{a} > 0$ または $\sqrt{a} = 0$ ；$\sqrt{a} \neq 0$ なので $\sqrt{a} > 0$.

(証明終了)

(定理 1.5.3) 任意の実数 a, b について，$a < b$ ならば $a \neq b$.

(定理 1.6.3) 任意の実数 a について $(-a)^2 = a^2$.

(法則 1.5.1) 任意の実数 a, b について，$a \geq b \iff a > b$ または $a = b$.

定理 1.6.6　$a \geq 0$ ，$b \geq 0$ である任意の実数 a と b とについて，

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab} \ , \qquad b > 0 \text{ のとき } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \ .$$

証明　定理 **1.6.3** により $\sqrt{a}^2 = a$ ，$\sqrt{b}^2 = b$ ．定理 **1.6.2** により $\sqrt{a} \geq 0$ ，$\sqrt{b} \geq 0$ ．

定理 **1.5.9** により，$ab \geq 0$ ，$\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0$ ．

(定理 1.6.3) $a > 0$ である任意の実数 a について $\sqrt{a}^2 = a$ ．

(定理 1.6.3) $a > 0$ である任意の実数 a について $\sqrt{a} \geq 0$ ．

(定理 1.5.9) 任意の実数 a, b について，$a \geq 0$ かつ $b \geq 0$ ならば，$ab \geq 0$ ．

定理 1.6.6　$a \geq 0$ ，$b \geq 0$ である任意の実数 a と b とについて,

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab} \ , \qquad\qquad b > 0 \text{ のとき } \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \ .$$

証明　定理 1.6.3 により $\sqrt{a}^{\,2} = a$ ，$\sqrt{b}^{\,2} = b$ ．定理 1.6.2 により $\sqrt{a} \geq 0$ ，$\sqrt{b} \geq 0$ ．

　定理 1.5.9 により，$ab \geq 0$ ，$\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0$ ．指数法則により

$$\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2 = \sqrt{a}^{\,2} \cdot \sqrt{b}^{\,2} = a \cdot b = ab \ ,$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2} \ .$$

定理 1.6.3 により

$$\sqrt{\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2} = \sqrt{a}\sqrt{b} \ .$$

故に $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ ．

(定理 1.6.3) $a \geq 0$ である任意の実数 a について $\sqrt{a^2} = a$ ．

$b>0$ とする．定理 **1.6.5** により $\sqrt{b}>0$ ．定理 **1.5.13** により，$\dfrac{1}{b}>0$ ，$\dfrac{1}{\sqrt{b}}>0$ ．定理 **1.5.1** により，$\dfrac{1}{b}\geq 0$ ，$\dfrac{1}{\sqrt{b}}\geq 0$ ．定理 **1.5.9** により，$\dfrac{a}{b}\geq 0$ ，$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\geq 0$ ，

(定理 1.6.5) $a>0$ である任意の実数 a について $\sqrt{a}>0$ ．

(定理 1.5.13) 任意の実数 a について，$a>0$ ならば $\dfrac{1}{a}>0$ ．

(定理 1.5.1) 任意の実数 a,b について，$a>b$ ならば $a\geq b$ ．

(定理 1.5.9) 任意の実数 a,b について，$a\geq 0$ かつ $b\geq 0$ ならば，$ab\geq 0$ ．

$b > 0$ とする．定理 **1.6.5** により $\sqrt{b} > 0$ ．定理 **1.5.13** により，$\dfrac{1}{b} > 0$ ，$\dfrac{1}{\sqrt{b}} > 0$ ．定理 **1.5.1** により，$\dfrac{1}{b} \geq 0$ ，$\dfrac{1}{\sqrt{b}} \geq 0$ ．定理 **1.5.9** により，$\dfrac{a}{b} \geq 0$ ，$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geq 0$ ，指数法則により

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{\sqrt{a}^2}{\sqrt{b}^2} = \frac{a}{b} \ ,$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2} \ .$$

定理 **1.6.3** により

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \ ,$$

故に $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ． (証明終了)

(定理 **1.6.3**) $a \geq 0$ である任意の実数 a について $\sqrt{a^2} = a$ ．

定理 **1.6.6** を用いると例えば次のような計算ができる：

$$\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6} \ , \qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{6}{24}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \ .$$

実数 a と b とについて， $a \geq 0$ ， $b \geq 0$ のとき， $\sqrt{a^2} = a$ なので

$$\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2}\sqrt{b} = a\sqrt{b} \ .$$

例えば，

$$\sqrt{98} = \sqrt{7^2 \cdot 2} = \sqrt{7^2}\sqrt{2} = 7\sqrt{2} \ .$$

また， $a \geq 0$ である実数 a について，指数法則及び $\sqrt{a}^{\,2} = a$ より

$$\sqrt{a}^{\,3} = \sqrt{a}^{\,2+1} = \sqrt{a}^{\,2}\sqrt{a}^{\,1} = a\sqrt{a} \ .$$

例 次の式を計算して簡単にする： $\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}} + \sqrt{15}\sqrt{5}$.

例 次の式を計算して簡単にする： $\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}}+\sqrt{15}\sqrt{5}$.

$$\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}}+\sqrt{15}\sqrt{5}=\sqrt{\frac{21}{7}}+\sqrt{5^2\cdot 3}=\sqrt{3}+5\sqrt{3}=6\sqrt{3}\ .$$

終

$\boxed{問 1.6.1}$ 以下の式を計算して簡単にせよ.

(1) $\sqrt{7}\sqrt{21}+\dfrac{\sqrt{60}}{\sqrt{5}}$.

(2) $\sqrt{6}\sqrt{15}-\dfrac{\sqrt{120}}{\sqrt{3}}$.

問1.6.1 以下の式を計算して簡単にせよ.

(1) $\sqrt{7}\sqrt{21}+\dfrac{\sqrt{60}}{\sqrt{5}}$.　　**(2)** $\sqrt{6}\sqrt{15}-\dfrac{\sqrt{120}}{\sqrt{3}}$.

(1)

$$\sqrt{7}\sqrt{21}+\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{5}} = \sqrt{3\cdot 7^2}+\sqrt{12} = 7\sqrt{3}+2\sqrt{3} = 9\sqrt{3} \ .$$

問1.6.1 以下の式を計算して簡単にせよ.

(1) $\sqrt{7}\sqrt{21}+\dfrac{\sqrt{60}}{\sqrt{5}}$.　　(2) $\sqrt{6}\sqrt{15}-\dfrac{\sqrt{120}}{\sqrt{3}}$.

(1)

$$\sqrt{7}\sqrt{21}+\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{5}} = \sqrt{3\cdot 7^2}+\sqrt{12} = 7\sqrt{3}+2\sqrt{3} = 9\sqrt{3} \ .$$

(2)

$$\sqrt{6}\sqrt{15}-\frac{\sqrt{120}}{\sqrt{3}} = \sqrt{90}-\sqrt{40} = 3\sqrt{10}-2\sqrt{10} = \sqrt{10} \ .$$

終

例 次の式を計算して簡単にする: $\left(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^2$. 乗法公式 $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ を用いる.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^2 &= \frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2}{\sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{3}^2+2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{5}^2}{2} \\ &= \frac{3+2\sqrt{15}+5}{2} = \frac{8+2\sqrt{15}}{2} \\ &= 4+\sqrt{15}\ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{問1.6.2}$ 以下の式を計算して簡単にせよ：

$$\left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 =$$

$\boxed{\text{問}1.6.2}$ 以下の式を計算して簡単にせよ：

$$\left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\sqrt{7}^2 - 2\sqrt{7}\sqrt{3} + \sqrt{3}^2}{\sqrt{2}^2} = \frac{7-2\sqrt{21}+3}{2} = \frac{10-2\sqrt{21}}{2}$$
$$= 5 - \sqrt{21} \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

例 次の式を計算して簡単にする： $\left(4+\sqrt{3}\right)\left(5-2\sqrt{3}\right)$． 分配法則を用いる.

$$
\begin{aligned}
\left(4+\sqrt{3}\right)\left(5-2\sqrt{3}\right) &= 4\left(5-2\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}\left(5-2\sqrt{3}\right) \\
&= 20-8\sqrt{3}+5\sqrt{3}-2\sqrt{3}^{\,2} = 20-3\sqrt{3}-2\cdot 3 \\
&= 14-3\sqrt{3}\ .
\end{aligned}
$$

終

$\boxed{\text{問}1.6.3}$ 以下の式を計算して簡単にせよ。

$$\left(4-\sqrt{5}\right)\left(3+2\sqrt{5}\right)=$$

問 1.6.3 以下の式を計算して簡単にせよ.

$$(4-\sqrt{5})(3+2\sqrt{5}) = 12+8\sqrt{5}-3\sqrt{5}-10 = 2+5\sqrt{5} \ .$$

終

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算して簡単にする：$\left(\sqrt{5}-2\right)^3$．乗法公式 $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ を用いる．指数法則を用いると $\sqrt{5}^{\,3}=\sqrt{5}^{\,2}\sqrt{5}^{\,1}=5\sqrt{5}$ ．

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{5}-2\right)^3 &= \sqrt{5}^{\,3}-3\sqrt{5}^{\,2}2+3\sqrt{5}\,2^2-2^3=5\sqrt{5}-30+12\sqrt{5}-8\\ &=17\sqrt{5}-38\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}1.6.4}$ 以下の式を計算して簡単にせよ.

$$\left(4-\sqrt{7}\right)^3 =$$

$\boxed{問 1.6.4}$ 以下の式を計算して簡単にせよ.

$$
\begin{aligned}
\left(4-\sqrt{7}\right)^3 &= 4^3 - 3\cdot 4^2\sqrt{7} + 3\cdot 4\sqrt{7}^2 - \sqrt{7}^3 = 64 - 48\sqrt{7} + 84 - 7\sqrt{7} \\
&= 148 - 55\sqrt{7} \quad .
\end{aligned}
$$

$\boxed{終}$

分数の分母に根号 $\sqrt{}$ が現れるとき，分母分子に適当な数（式）を掛けて分母に根号が現れないように変形することを分母の有理化という.

分数の分母に根号 $\sqrt{}$ が現れるとき，分母分子に適当な数（式）を掛けて分母に根号が現れないように変形することを分母の有理化という．そのために公式 $\dfrac{A}{B} = \dfrac{AC}{BC}$ および定理 **1.6.3** をよく用いる．

分数の分母に根号 $\sqrt{}$ が現れるとき，分母分子に適当な数（式）を掛けて分母に根号が現れないように変形することを分母の有理化という．そのために公式 $\dfrac{A}{B} = \dfrac{AC}{BC}$ および定理 **1.6.3** をよく用いる．例えば，

$$\frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{7}\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{7}^{\,2}} = \frac{3}{7}\sqrt{7}\ .$$

　分数の分母に根号 $\sqrt{}$ が現れるとき，分母分子に適当な数（式）を掛けて分母に根号が現れないように変形することを分母の有理化という．そのために公式 $\dfrac{A}{B}=\dfrac{AC}{BC}$ および定理 **1.6.3** をよく用いる．例えば，

$$\frac{3}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{7}\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{7}^{\,2}}=\frac{3}{7}\sqrt{7}\ .$$

一般的に述べると，実数 a と c とについて，$a>0$ のとき

$$\frac{c}{\sqrt{a}}=\frac{c\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a}}=\frac{c\sqrt{a}}{\sqrt{a}^{\,2}}=\frac{c\sqrt{a}}{a}\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 次の分数の式について分母有理化して簡単にする： $\dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{15}}$.

例 次の分数の式について分母有理化して簡単にする： $\dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{15}}$. まず分子の根号の中の自然数と分母の根号の中の自然数とで約分する.

例 次の分数の式について分母有理化して簡単にする： $\dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{15}}$ ． まず分子の根号の中の自然数と分母の根号の中の自然数とで約分する.

$$\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{35}{15}} = \sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}\sqrt{3}}{\sqrt{3}^{\,2}} = \frac{\sqrt{21}}{3}\ .$$

終

$\boxed{問 1.6.5}$ 以下の分数の式について分母を有理化して簡単にせよ：

$$\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{35}} =$$

問1.6.5 以下の分数の式について分母を有理化して簡単にせよ：

$$\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{35}} = \sqrt{\frac{60}{35}} = \sqrt{\frac{12}{7}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{7}}{\sqrt{7}^{\,2}} = \frac{2}{7}\sqrt{21} \ .$$

終

$\boxed{\text{例}}$ 次の分数の式について分母有理化して簡単にする： $\dfrac{6-\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$.

例 次の分数の式について分母有理化して簡単にする： $\dfrac{6-\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$ ．分母を分けて計算する.

例 次の分数の式について分母有理化して簡単にする: $\dfrac{6-\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$. 分母を分けて計算する.

$$\frac{6-\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2} - \sqrt{\frac{48}{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} - \sqrt{16} = 2\sqrt{3} - 4 \ .$$

終

$\boxed{\text{問}1.6.6}$ 以下の分数の式について分母を有理化して簡単にせよ.

$$\frac{\sqrt{96}-4\sqrt{5}}{\sqrt{2}} =$$

問1.6.6 以下の分数の式について分母を有理化して簡単にせよ.

$$\frac{\sqrt{96}-4\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{2}}-\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{96}{2}}-\frac{4\sqrt{5}\sqrt{2}}{\sqrt{2}^{\,2}}=\sqrt{48}-\frac{4\sqrt{10}}{2}$$

$$=4\sqrt{3}-2\sqrt{10}\ .$$

終

実数 a と b とについて $a \geq 0$ ，$b \geq 0$ とする.

実数 a と b について $a \geq 0$, $b \geq 0$ とする. 乗法公式 $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ を用いると,

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = \sqrt{a}^{\,2} - \sqrt{b}^{\,2} = a-b \ .$$

実数 a と b とについて $a \geq 0$, $b \geq 0$ とする. 乗法公式 $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ を用いると,

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = \sqrt{a}^{\,2} - \sqrt{b}^{\,2} = a-b\ .$$

この等式を用いると次のような分母の有理化ができる: $a \neq b$ のとき,

$$\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{c\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)} = \frac{c\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}\ ,$$

$$\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{c\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)} = \frac{c\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}\ .$$

例 次の分数の式について分母を有理化して簡単にする：$\dfrac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$.

例 次の分数の式について分母を有理化して簡単にする：$\dfrac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$．分母と分子とに $\sqrt{2}-\sqrt{5}$ を掛ける.

例 次の分数の式について分母を有理化して簡単にする： $\dfrac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$． 分母と分子とに $\sqrt{2}-\sqrt{5}$ を掛ける.

$$\begin{aligned}\frac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} &= \frac{6\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)} = \frac{6\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{\sqrt{2}^{\,2}-\sqrt{5}^{\,2}} \\ &= \frac{6\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{2-5} = \frac{6\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{-3} = -2\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right) \\ &= 2\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\ .\end{aligned}$$

終

問1.6.7 以下の分数の式の分母を有理化して簡単にせよ.

(1) $$\frac{12}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\ .$$

(2) $$\frac{3}{2+\sqrt{5}}\ .$$

$\boxed{問1.6.7}$ 以下の分数の式の分母を有理化して簡単にせよ.

(1) $\dfrac{12}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$. **(2)** $\dfrac{3}{2+\sqrt{5}}$.

(1)

$$\frac{12}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{12\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)} = \frac{12\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{7}^{\,2}-\sqrt{3}^{\,2}} = \frac{12\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{7-3}$$
$$= 3\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right) \ .$$

$\boxed{\text{問}1.6.7}$ 以下の分数の式の分母を有理化して簡単にせよ.

(1) $\dfrac{12}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$. **(2)** $\dfrac{3}{2+\sqrt{5}}$.

(1)

$$\frac{12}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{12\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)} = \frac{12\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{7}^{\,2}-\sqrt{3}^{\,2}} = \frac{12\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{7-3}$$
$$= 3\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right) \ .$$

(2)

$$\frac{3}{2+\sqrt{5}} = \frac{3\left(2-\sqrt{5}\,\right)}{\left(2+\sqrt{5}\,\right)\left(2-\sqrt{5}\,\right)} = \frac{3\left(2-\sqrt{5}\,\right)}{2^2-\sqrt{5}^{\,2}} = \frac{3\left(2-\sqrt{5}\,\right)}{4-5} = -3\left(2-\sqrt{5}\,\right)$$
$$= 3\sqrt{5}-6 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

例 次の分数の式について分母を有理化して簡単にする: $\dfrac{2-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$.

$\boxed{\text{例}}$ 次の分数の式について分母を有理化して簡単にする: $\dfrac{2-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$. 分母と分子とに $4+\sqrt{3}$ を掛ける.

例 次の分数の式について分母を有理化して簡単にする: $\dfrac{2-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$. 分母と分子とに $4+\sqrt{3}$ を掛ける.

$$\frac{2-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} = \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(4+\sqrt{3}\right)}{\left(4-\sqrt{3}\right)\left(4+\sqrt{3}\right)} = \frac{8+2\sqrt{3}-4\sqrt{3}-\sqrt{3}^{\,2}}{4^2-\sqrt{3}^{\,2}} = \frac{8-2\sqrt{3}-3}{16-3}$$

$$= \frac{5-2\sqrt{3}}{13} \ .$$

終

$\boxed{\text{問}1.6.8}$ 以下の分数の式の分母を有理化して簡単にせよ.

(1) $\dfrac{4+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$.

(2) $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

$\boxed{問1.6.8}$ 以下の分数の式の分母を有理化して簡単にせよ.

(1) $\dfrac{4+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$. **(2)** $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

(1)

$$\frac{4+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{\left(4+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)} = \frac{12-4\sqrt{5}+3\sqrt{5}-\sqrt{5}^{\,2}}{3^2-\sqrt{5}^{\,2}} = \frac{7-\sqrt{5}}{4} .$$

$\boxed{問1.6.8}$ 以下の分数の式の分母を有理化して簡単にせよ.

(1) $\dfrac{4+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$. **(2)** $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

(1)

$$\frac{4+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{\left(4+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)} = \frac{12-4\sqrt{5}+3\sqrt{5}-\sqrt{5}^{\,2}}{3^2-\sqrt{5}^{\,2}} = \frac{7-\sqrt{5}}{4} \ .$$

(2)

$$\begin{aligned}\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} &= \frac{\left(3\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)} \\ &= \frac{3\sqrt{2}\sqrt{5}+3\sqrt{2}^{\,2}-\sqrt{5}^{\,2}-\sqrt{5}\sqrt{2}}{\sqrt{5}^{\,2}-\sqrt{3}^{\,2}} = \frac{3\sqrt{10}+6-5-\sqrt{10}}{3} \\ &= \frac{1+2\sqrt{10}}{3} \ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$