## 2.1　整式

ある特定の文字，例えば $x$ に着目するとき，自然数 $n$ に対して，$x$ が現れない式 $A$ と $x$ の $n$ 乗 $x^n$ との積の形で表される式 $Ax^n$ を，$x$（について）の $n$ 次の単項式あるいは $n$ 次の項という.

ある特定の文字，例えば $x$ に着目するとき，自然数 $n$ に対して，$x$ が現れない式 $A$ と $x$ の $n$ 乗 $x^n$ との積の形で表される式 $Ax^n$ を，$x$（について）の $n$ 次の単項式あるいは $n$ 次の項という．この単項式 $Ax^n$ において，自然数 $n$ を次数といい，$x$ が現れない部分 $A$ を（$x^n$ の）係数という．

**1.2** 節で定めたように，任意の数 $x$ に対して $x^0 = 1$ ．従って，着目する文字 $x$ が現れない式 $A$ について， $A = Ax^0$ なので，$A$ は $x$ の $0$ 次の単項式と考える．つまり，

$$\text{着目する文字 } x \text{ が現れない式は } x \text{ の } 0 \text{ 次の単項式}$$

と考える．但し，定数 $0$ は，$x$ の単項式であるが，その次数は考えない．

**1.2** 節で定めたように，任意の数 $x$ に対して $x^0 = 1$ ．従って，着目する文字 $x$ が現れない式 $A$ について， $A = Ax^0$ なので，$A$ は $x$ の $0$ 次の単項式と考える．つまり，

着目する文字 $x$ が現れない式は $x$ の $0$ 次の単項式

と考える．但し，定数 $0$ は，$x$ の単項式であるが，その次数は考えない．

例えば，文字 $x$ と $y$ とが現われる式 $\dfrac{4}{5}x^2y^3$ は，$x$ の単項式と考えると次数は $2$ であり，$y$ の単項式と考えると次数は $3$ である．このように，複数の文字が現れる式は，単項式であっても着目する文字によって次数が異なることがある．

$x$ の単項式，及び，いくつかの $x$ の単項式の和の形の式を，$x$（について）の多項式という．多項式を構成する各々の単項式をその多項式の項という．多項式の項の中で次数が最大の項の次数をその多項式の次数という．

$x$ の単項式，及び，いくつかの $x$ の単項式の和の形の式を，$x$（について）の多項式という．多項式を構成する各々の単項式をその多項式の項という．多項式の項の中で次数が最大の項の次数をその多項式の次数という．

$\boxed{\text{例}}$ 式 $(4-\sqrt{7})x+(3a-7)x^2-\dfrac{2}{5}x^3-a^2-6$ は $x$ の多項式で次のようになる：

$$\underbrace{(4-\sqrt{7})x}_{1\text{ 次の項}}+\underbrace{(3a-7)x^2}_{2\text{ 次の項}}+\left(\underbrace{-\frac{2}{5}x^3}_{3\text{ 次の項}}\right)+(\underbrace{-a^2-6}_{0\text{ 次の項}})\ .$$

この多項式 $(4-\sqrt{7})x+(3a-7)x^2-\dfrac{2}{5}x^3-a^2-6$ での次数は 3 である． $\boxed{\text{終}}$

整理すると $x$（について）の多項式になる式を，$x$（について）の整式という．実際には多項式と整式とはあまり区別されない．例えば $x$ の式 $x^2(x-5)$ は，$x^2(x-5)=x^3-5x^2$ というように多項式になるので，整式である．

整理すると $x$（について）の多項式になる式を，$x$（について）の整式という．実際には多項式と整式とはあまり区別されない．例えば $x$ の式 $x^2(x-5)$ は，$x^2(x-5)=x^3-5x^2$ というように多項式になるので，整式である．整式の次数とはできるだけ簡単な多項式に整理したときの多項式の次数である．自然数 $n$ に対して，次数が $n$ の整式を $n$ 次式という．

整理すると $x$（について）の多項式になる式を，$x$（について）の整式という．実際には多項式と整式とはあまり区別されない．例えば $x$ の式 $x^2(x-5)$ は， $x^2(x-5)=x^3-5x^2$ というように多項式になるので，整式である．整式の次数とはできるだけ簡単な多項式に整理したときの多項式の次数である．自然数 $n$ に対して，次数が $n$ の整式を $n$ 次式という.

文字 $x$ が現れない式 $A$ と $B$ 及び自然数 $n$ について，

$$Ax^n+Bx^n=(A+B)x^n \ .$$

このようにして多項式において次数が同じ複数の項を一つの項にまとめることができる.

整理すると $x$（について）の多項式になる式を，$x$（について）の整式という．実際には多項式と整式とはあまり区別されない．例えば $x$ の式 $x^2(x-5)$ は， $x^2(x-5)=x^3-5x^2$ というように多項式になるので，整式である．整式の次数とはできるだけ簡単な多項式に整理したときの多項式の次数である．自然数 $n$ に対して，次数が $n$ の整式を $n$ 次式という.

文字 $x$ が現れない式 $A$ と $B$ 及び自然数 $n$ について，

$$Ax^n+Bx^n=(A+B)x^n\ .$$

このようにして多項式において次数が同じ複数の項を一つの項にまとめることができる.

多項式の中の着目する文字 $x$ が現れない総ての項を定数項という．定数項 $A$ は $A=Ax^0$ なので次数は $0$ である.

整式について，次数の高い項ほど先に現れる多項式に整理することを降冪の順に整理するという.

整式について，次数の高い項ほど先に現れる多項式に整理することを降冪の順に整理するという． $x$ の 3 次式を降冪の順に整理すると次の形になる：

$$\underbrace{Ax^3}_{3\text{ 次の項}} + \underbrace{Bx^2}_{2\text{ 次の項}} + \underbrace{Cx}_{1\text{ 次の項}} + \underbrace{D}_{\text{定数項}} \qquad (\text{但し } A,B,C,D \text{ は } x \text{ が現れない式})$$

$$\xrightarrow[\text{項の次数が下降していく}]{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

ここで 2 次の項 $Bx^2$，1 次の項 $Cx$，定数項 $D$ は無いこともある．

整式について，次数の高い項ほど先に現れる多項式に整理することを降冪の順に整理するという．$x$ の 3 次式を降冪の順に整理すると次の形になる：

$$\underbrace{Ax^3}_{3\text{ 次の項}} + \underbrace{Bx^2}_{2\text{ 次の項}} + \underbrace{Cx}_{1\text{ 次の項}} + \underbrace{D}_{\text{定数項}} \qquad （\text{但し } A, B, C, D \text{ は } x \text{ が現れない式}）$$

$$\xrightarrow[\text{項の次数が下降していく}]{\hspace{8cm}}$$

ここで 2 次の項 $Bx^2$，1 次の項 $Cx$，定数項 $D$ は無いこともある．また，整式について，次数の低い項ほど先に現れる多項式に整理することを昇冪の順に整理するという．

整式について，次数の高い項ほど先に現れる多項式に整理することを降冪の順に整理するという．$x$ の 3 次式を降冪の順に整理すると次の形になる：

$$\underbrace{Ax^3}_{3\text{ 次の項}} + \underbrace{Bx^2}_{2\text{ 次の項}} + \underbrace{Cx}_{1\text{ 次の項}} + \underbrace{D}_{\text{定数項}} \qquad \text{（但し } A, B, C, D \text{ は } x \text{ が現れない式）}$$

$$\xrightarrow{\hspace{8em}}$$

項の次数が下降していく

ここで 2 次の項 $Bx^2$，1 次の項 $Cx$，定数項 $D$ は無いこともある．また，整式について，次数の低い項ほど先に現れる多項式に整理することを昇冪の順に整理するという．$x$ の 3 次式を昇冪の順に整理すると次の形になる：

$$\underbrace{A}_{\text{定数項}} + \underbrace{Bx}_{1\text{ 次の項}} + \underbrace{Cx^2}_{2\text{ 次の項}} + \underbrace{Dx^3}_{3\text{ 次の項}} \qquad \text{（但し } A, B, C, D \text{ は } x \text{ が現れない式）},$$

$$\xrightarrow{\hspace{8em}}$$

項の次数が上昇していく

ここで定数項 $A$，1 次の項 $Bx$，2 次の項 $Cx^2$ は無いこともある．

多くの場合整式は降冪の順に整理する.

多くの場合整式は降冪の順に整理する.

例 $x$ の整式 $4x+2x^2-\sqrt{3}x+6-\frac{5}{2}x^2$ を, 降冪の順に整理すると

$$\begin{aligned} 4x+2x^2-\sqrt{3}x+6-\frac{5}{2}x^2 &= \left(2-\frac{5}{2}\right)x^2+\left(4-\sqrt{3}\right)x+6 \\ &= -\frac{1}{2}x^2+\left(4-\sqrt{3}\right)x+6 \ , \end{aligned}$$

多くの場合整式は降冪の順に整理する.

例 $x$ の整式 $4x+2x^2-\sqrt{3}x+6-\frac{5}{2}x^2$ を，降冪の順に整理すると

$$\begin{aligned} 4x+2x^2-\sqrt{3}x+6-\frac{5}{2}x^2 &= \left(2-\frac{5}{2}\right)x^2+(4-\sqrt{3})x+6 \\ &= -\frac{1}{2}x^2+(4-\sqrt{3})x+6 \ , \end{aligned}$$

昇冪の順に整理すると

$$4x+2x^2-\sqrt{3}x+6-\frac{5}{2}x^2 = 6+(4-\sqrt{3})x-\frac{1}{2}x^2 \ .$$

終

$\boxed{\text{問}2.1.1}$ $x$ の整式 $-5x+\dfrac{8}{3}x^2+\sqrt{2}-\left(4x^2-\sqrt{7}x\right)$ を降冪の順及び昇冪の順に整理せよ.

降冪の順に整理すると

$$-5x+\frac{8}{3}x^2+\sqrt{2}-\left(4x^2-\sqrt{7}x\right)=$$

昇冪の順に整理すると

$$-5x+\frac{8}{3}x^2+\sqrt{2}-\left(4x^2-\sqrt{7}x\right)=$$

$\boxed{\text{問}2.1.1}$ $x$ の整式 $-5x+\dfrac{8}{3}x^2+\sqrt{2}-\left(4x^2-\sqrt{7}x\right)$ を降冪の順及び昇冪の順に整理せよ.

降冪の順に整理すると

$$\begin{aligned}-5x+\frac{8}{3}x^2+\sqrt{2}-\left(4x^2-\sqrt{7}x\right) &= \frac{8}{3}x^2-4x^2-5x+\sqrt{7}x+\sqrt{2}\\ &= -\frac{4}{3}x^2+\left(\sqrt{7}-5\right)x+\sqrt{2}\ .\end{aligned}$$

昇冪の順に整理すると

$$-5x+\frac{8}{3}x^2+\sqrt{2}-\left(4x^2-\sqrt{7}x\right)=$$

$\boxed{問 2.1.1}$ $x$ の整式 $-5x+\dfrac{8}{3}x^2+\sqrt{2}-\left(4x^2-\sqrt{7}x\right)$ を降冪の順及び昇冪の順に整理せよ.

降冪の順に整理すると

$$
\begin{aligned}
-5x+\frac{8}{3}x^2+\sqrt{2}-\left(4x^2-\sqrt{7}x\right) &= \frac{8}{3}x^2-4x^2-5x+\sqrt{7}x+\sqrt{2} \\
&= -\frac{4}{3}x^2+\left(\sqrt{7}-5\right)x+\sqrt{2}\ ,
\end{aligned}
$$

昇冪の順に整理すると

$$
-5x+\frac{8}{3}x^2+\sqrt{2}-\left(4x^2-\sqrt{7}x\right)=\sqrt{2}+\left(\sqrt{7}-5\right)x-\frac{4}{3}x^2\ .
$$

$\boxed{終}$

　複数の文字が現れる整式は，着目する文字によって，整式の次数や整理した結果が異なることがある．

複数の文字が現れる整式は，着目する文字によって，整式の次数や整理した結果が異なることがある．

例 式 $2x(x^2+4kx-3)-k(x^2-5x-6k)$ について，$x$ の整式として降冪の順に整理すると

$$\begin{aligned}2x(x^2+4kx-3)-k(x^2-5x-6k) &= 2x^3+8kx^2-6x-kx^2+5kx+6k^2\\ &= 2x^3+7kx^2+(5k-6)x+6k^2\ ;\end{aligned}$$

これは $x$ の $3$ 次の多項式である．

複数の文字が現れる整式は，着目する文字によって，整式の次数や整理した結果が異なることがある．

$\boxed{\text{例}}$ **式** $2x(x^2+4kx-3)-k(x^2-5x-6k)$ **について，** $x$ **の整式として降冪の順に整理すると**

$$\begin{aligned} 2x(x^2+4kx-3)-k(x^2-5x-6k) &= 2x^3+8kx^2-6x-kx^2+5kx+6k^2 \\ &= 2x^3+7kx^2+(5k-6)x+6k^2 \ ; \end{aligned}$$

これは $x$ の $3$ 次の多項式である．式 $2x(x^2-4kx-3)+k(x^2+5x-6k)$ について，$k$ の整式として降冪の順に整理すると

$$\begin{aligned} 2x(x^2+4kx-3)-k(x^2-5x-6k) &= 2x^3+8kx^2-6x-kx^2+5kx+6k^2 \\ &= 6k^2+(7x^2+5x)k+2x^3-6x \ ; \end{aligned}$$

これは $k$ の $2$ 次式である． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問2.1.2}$ 式 $2p(3x-p+2)-x(2x-3p^2+5p)$ を，$x$ の整式として降冪の順に整理せよ；更に，$p$ の整式として降冪の順に整理せよ.

$x$ の整式として降冪の順に整理すると

$$2p(3x-p+2)-x(2x-3p^2+5p)=$$

$p$ の整式として降冪の順に整理すると

$$2p(3x-p+2)-x(2x-3p^2+5p)=$$

$\boxed{\text{問}2.1.3}$ 式 $2p(3x-p+2)-x(2x-3p^2+5p)$ を，$x$ の整式として降冪の順に整理せよ；更に，$p$ の整式として降冪の順に整理せよ．

$x$ の整式として降冪の順に整理すると

$$\begin{aligned} 2p(3x-p+2)-x(2x-3p^2+5p) &= 6px-2p^2+4p-2x^2+3p^2x-5xp \\ &= -2x^2+(3p^2+p)x-2p^2+4p \ . \end{aligned}$$

$p$ の整式として降冪の順に整理すると

$$2p(3x-p+2)-x(2x-3p^2+5p) =$$

$\boxed{\text{問}2.1.3}$ 式 $2p(3x-p+2)-x(2x-3p^2+5p)$ を，$x$ の整式として降冪の順に整理せよ；更に，$p$ の整式として降冪の順に整理せよ．

$x$ の整式として降冪の順に整理すると

$$\begin{aligned}2p(3x-p+2)-x(2x-3p^2+5p) &= 6px-2p^2+4p-2x^2+3p^2x-5xp \\ &= -2x^2+(3p^2+p)x-2p^2+4p\ .\end{aligned}$$

$p$ の整式として降冪の順に整理すると

$$\begin{aligned}2p(3x-p+2)-x(2x-3p^2+5p) &= 6px-2p^2+4p-2x^2+3p^2x-5xp \\ &= (3x-2)p^2+(x+4)p-2x^2\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

定数 $a, b, c$ に対して $x$ の整式 $ax^2+bx+c$ を考える．この整式 $ax^2+bx+c$ は普通に考えると $x$ の $2$ 次式である．ところが， $a \neq 0$ と断わられていない限り， $a=0$ かもしれない． $a=0$ のときを考慮すると， $x$ の整式 $ax^2+bx+c$ の次数は $2$ 以下ということになる．

定数 $a,b,c$ に対して $x$ の整式 $ax^2+bx+c$ を考える．この整式 $ax^2+bx+c$ は普通に考えると $x$ の $2$ 次式である．ところが，$a \neq 0$ と断わられていない限り，$a=0$ かもしれない．$a=0$ のときを考慮すると，$x$ の整式 $ax^2+bx+c$ の次数は $2$ 以下ということになる．このように，整式の次数が $2$ 以下であるとき，次数が高々$2$ 次であるという．

定数 $a, b, c$ に対して $x$ の整式 $ax^2+bx+c$ を考える．この整式 $ax^2+bx+c$ は普通に考えると $x$ の $2$ 次式である．ところが，$a \neq 0$ と断わられていない限り，$a=0$ かもしれない．$a=0$ のときを考慮すると，$x$ の整式 $ax^2+bx+c$ の次数は $2$ 以下ということになる．このように，整式の次数が $2$ 以下であるとき，次数が高々$2$ 次であるという．

一般に，自然数 $n$ に対して，整式の次数が $n$ 以下であるとき，その整式は高々$n$ 次であるという．

複数の文字，例えば $x$ と $y$ とに着目して，$x$ も $y$ も現れない式 $A$ と $x$ の冪 $x^m$ （$m$ は自然数）と $y$ の冪 $y^n$ （$n$ は自然数）との積で表される式 $Ax^my^n$ を $x$ と $y$ と（について）の単項式という.

複数の文字，例えば $x$ と $y$ とに着目して，$x$ も $y$ も現れない式 $A$ と $x$ の冪 $x^m$（$m$ は自然数）と $y$ の冪 $y^n$（$n$ は自然数）との積で表される式 $Ax^my^n$ を $x$ と $y$ と（について）の単項式という．$x^my^n$ は $x$ と $y$ との両方併せて $(m+n)$ 個の積なので，単項式 $Ax^my^n$ の次数は $m+n$ とする．単項式 $Ax^my^n$ おいて $x$ と $y$ とが現れない式の部分 $A$ を係数という．

複数の文字，例えば $x$ と $y$ とに着目して，$x$ も $y$ も現れない式 $A$ と $x$ の冪 $x^m$（$m$ は自然数）と $y$ の冪 $y^n$（$n$ は自然数）との積で表される式 $Ax^my^n$ を $x$ と $y$ と（について）の単項式という．$x^my^n$ は $x$ と $y$ との両方併せて $(m+n)$ 個の積なので，単項式 $Ax^my^n$ の次数は $m+n$ とする．単項式 $Ax^my^n$ おいて $x$ と $y$ とが現れない式の部分 $A$ を係数という．

$x$ と $y$ との単項式または $x$ と $y$ との単項式の和の形の式を $x$ と $y$ と（について）の多項式といい，$x$ と $y$ との多項式に整理できる式を $x$ と $y$ との整式という．