2.2　整式の加法・減法・乗法

整式と整式とを足すことを整式の加法といい，整式から整式を引くことを整式の減法という．整式の加法・減法の計算では，分配法則から導かれる次の等式が基になる：自然数 n 及び文字 x が現れない式 A, B に対して，

$$Ax^n \pm Bx^n = (A \pm B)x^n \qquad \text{（複号同順）} \quad .$$

$\boxed{\text{例}}$ x の整式 A と B とを $A=2x^3-5ax^2+3ax+6$, $B=ax^2-4x-2$ とおく. $A+B$ と $A-B$ と $B-A$ とを x の整式として降冪の順に整理する.

$\boxed{例}$ x の整式 A と B とを $A = 2x^3 - 5ax^2 + 3ax + 6$ ，$B = ax^2 - 4x - 2$ とおく．$A+B$ と $A-B$ と $B-A$ とを x の整式として降冪の順に整理する．

$$\begin{aligned} A+B &= 2x^3 - 5ax^2 + 3ax + 6 + ax^2 - 4x - 2 \\ &= 2x^3 - 4ax^2 + (3a-4)x + 4 \ . \end{aligned}$$

例 x の整式 A と B とを $A=2x^3-5ax^2+3ax+6$ ， $B=ax^2-4x-2$ とおく． $A+B$ と $A-B$ と $B-A$ とを x の整式として降冪の順に整理する．

$$A+B=2x^3-5ax^2+3ax+6+ax^2-4x-2$$

$$=2x^3-4ax^2+(3a-4)x+4\ .$$

$$A-B=2x^3-5ax^2+3ax+6-(ax^2-4x-2)$$

$$=2x^3-6ax^2+(3a+4)x+8\ .$$

例 x の整式 A と B とを $A=2x^3-5ax^2+3ax+6$ ，$B=ax^2-4x-2$ とおく．$A+B$ と $A-B$ と $B-A$ とを x の整式として降冪の順に整理する．

$$\begin{aligned} A+B &= 2x^3-5ax^2+3ax+6+ax^2-4x-2 \\ &= 2x^3-4ax^2+(3a-4)x+4 \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A-B &= 2x^3-5ax^2+3ax+6-(ax^2-4x-2) \\ &= 2x^3-6ax^2+(3a+4)x+8 \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B-A &= ax^2-4x-2-(2x^3-5ax^2+3ax+6) \\ &= -2x^3+6ax^2-(3a+4)x-8 \ . \end{aligned}$$

終

$\boxed{\text{問}2.2.1}$ x の整式 A と B とを $A = 3x^2 - 6ax - 2$, $B = 2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5$ とおく. $A + B$ と $A - B$ と $B - A$ とを x の整式として降冪の順に整理せよ.

$$A + B = (3x^2 - 6ax - 2) + (2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5)$$

$$=$$

$$A - B = (3x^2 - 6ax - 2) - (2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5)$$

$$=$$

$$B - A = (2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5) - (3x^2 - 6ax - 2)$$

$$=$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 2.2.1}$ x の整式 A と B とを $A = 3x^2 - 6ax - 2$, $B = 2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5$ とおく. $A+B$ と $A-B$ と $B-A$ とを x の整式として降冪の順に整理せよ.

$$
\begin{aligned}
A+B &= (3x^2 - 6ax - 2) + (2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5) \\
&= 2x^3 + (3-7a)x^2 - 3ax - 7 \ . \\
A-B &= (3x^2 - 6ax - 2) - (2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5) \\
&= \\
B-A &= (2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5) - (3x^2 - 6ax - 2) \\
&=
\end{aligned}
$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}2.2.1}$ x の整式 A と B とを $A = 3x^2 - 6ax - 2$ ，$B = 2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5$ とおく. $A+B$ と $A-B$ と $B-A$ とを x の整式として降冪の順に整理せよ.

$$\begin{aligned} A+B &= (3x^2 - 6ax - 2) + (2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5) \\ &= 2x^3 + (3-7a)x^2 - 3ax - 7 \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A-B &= (3x^2 - 6ax - 2) - (2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5) \\ &= -2x^3 + (7a+3)x^2 - 9ax + 3 \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B-A &= (2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5) - (3x^2 - 6ax - 2) \\ &= \end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問2.2.1}$ x の整式 A と B とを $A = 3x^2 - 6ax - 2$ ，$B = 2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5$ とおく. $A + B$ と $A - B$ と $B - A$ とを x の整式として降冪の順に整理せよ.

$$
\begin{aligned}
A + B &= (3x^2 - 6ax - 2) + (2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5) \\
&= 2x^3 + (3 - 7a)x^2 - 3ax - 7 \ . \\
A - B &= (3x^2 - 6ax - 2) - (2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5) \\
&= -2x^3 + (7a + 3)x^2 - 9ax + 3 \ . \\
B - A &= (2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5) - (3x^2 - 6ax - 2) \\
&= 2x^3 - (7a + 3)x^2 + 9ax - 3 \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{終}$

整式と整式とを掛けることを整式の乗法という．整式の乗法の結果（積）はやはり整式になる．

まず単項式の乗法から始める．自然数 m, n 及び文字 x が現れない式 A, B に対して，x の単項式 Ax^m と Bx^n との積はやはり x の単項式になる：指数法則 $x^m x^n = x^{m+n}$ を用いると，

$$Ax^m \times Bx^n = ABx^m x^n = ABx^{m+n} \ .$$

多くの場合，整式の乗法の計算では結果を単項式の和か差かの形に整理する．この式変形を（整式の）展開という．

多くの場合，整式の乗法の計算では結果を単項式の和か差かの形に整理する．この式変形を（整式の）展開という．

整式の展開には分配法則（**1.1** 節の法則 **1.1.9**）が重要になる：任意の数 a, b, c について，

$$a(b+c) = ab+ac \ , \qquad (a+b)c = ac+bc \ .$$

$\boxed{例}$ x の 1 次式 $2x+5$ と $3x-4$ との積を展開して整理する．分配法則を用いる．

$$
\begin{aligned}
(2x+5)(3x-4) &= 2x(3x-4)+5(3x-4) \\
&= 2x\cdot 3x-2x\cdot 4+5\cdot 3x-5\cdot 4 \\
&= 6x^2-8x+15x-20 \\
&= 6x^2+7x-20 \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ x の 1 次式 $2x-5$ と 2 次式 $3x^2-x-7$ との積を展開して整理する.

$$\begin{aligned}(2x-5)(3x^2-x-7) &= 2x(3x^2-x-7)-5(3x^2-x-7)\\ &= 2x\cdot 3x^2-2x\cdot x-2x\cdot 7-5\cdot 3x-5\cdot(-x)-5\cdot(-7)\\ &= 6x^3-2x^2-14x-15x^2+5x+35\\ &= 6x^3-17x^2-9x+35\ .\end{aligned}$$

この展開を次のように計算することもある.

$$\begin{array}{rrrrl} & 3x^2 & -x & -7 & \\ \times & & 2x & -5 & \\ \hline 6x^3 & -2x^2 & -14x & & \leftarrow (3x^2-x-7)\times 2x\\ & -15x^2 & +5x & +35 & \leftarrow (3x^2-x-7)\times(-5)\\ \hline 6x^3 & -17x^2 & -9x & +35 & \leftarrow (3x^2-x-7)\times 2x+(3x^2-x-7)\times(-5)\end{array}$$

$\boxed{\text{終}}$

原則として，展開した結果は降幕の順（或いは昇幕の順）に整理する.

例 y の整式 $(2y-k)(y^2-3y+2k)$ を展開して降冪の順に整理する.

$$\begin{aligned}(2y-k)(y^2-3y+2k) &= 2y(y^2-3y+2k)-k(y^2-3y+2k)\\ &= 2y^3-6y^2+4ky-ky^2+3ky-2k^2\\ &= 2y^3-(k+6)y^2+7ky-2k^2\ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{問2.2.2}$ 以下の整式を展開して x の整式として降冪の順に整理せよ.

(1) $\left(3x+\dfrac{7}{2}\right)(2x^2-6x+3)$.

(2) $(3x-2k)(x^2+2kx-3)$.

$\boxed{問2.2.2}$ 以下の整式を展開して x の整式として降冪の順に整理せよ.

(1) $\left(3x+\dfrac{7}{2}\right)(2x^2-6x+3)$.　　**(2)** $(3x-2k)(x^2+2kx-3)$.

(1)

$$\begin{aligned}\left(3x+\frac{7}{2}\right)(2x^2-6x+3) &= 6x^3-18x^2+9x+x^2-21x+\frac{21}{2}\\ &= 6x^3-11x^2-12x+\frac{21}{2}\ .\end{aligned}$$

$\boxed{問2.2.2}$ 以下の整式を展開して x の整式として降幂の順に整理せよ.

(1) $\left(3x+\dfrac{7}{2}\right)(2x^2-6x+3)$. **(2)** $(3x-2k)(x^2+2kx-3)$.

(1)

$$\begin{aligned}\left(3x+\frac{7}{2}\right)(2x^2-6x+3) &= 6x^3-18x^2+9x+x^2-21x+\frac{21}{2} \\ &= 6x^3-11x^2-12x+\frac{21}{2} \ .\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(3x-2k)(x^2+2kx-3) &= 3x^3+6kx^2-9x-(2kx^2+4k^2x-6k) \\ &= 3x^3+4kx^2-(4k^2+9)x+6k \ .\end{aligned}$$

整式の展開に **1.3** 節の乗法公式を使うこともある：任意の数 a, b, c, d, x について,

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad \text{（複号同順）},$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \ ,$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab \ ,$$

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd \ ,$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \quad \text{（複号同順）},$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3 \quad \text{（複号同順）}.$$

$\boxed{\text{例}}$ x の整式 $(2x-3)(x-2k+1)$ を展開して降冪の順に整理する．乗法公式 $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$ を用いる．

$$
\begin{aligned}
(2x-3)(x-2k+1) &= (2x-3)\{x+(-2k+1)\} \\
&= 2x^2 + \{2(-2k+1)-3\}x - 3(-2k+1) \\
&= 2x^2 + (-4k-1)x + 6k - 3 \\
&= 2x^2 - (4k+1)x + 6k - 3 \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問2.2.3}$ x の整式 $(ax+2)(3x-4a)$ を展開して降冪の順に整理せよ.

$$(ax+2)(3x-4a) = 3ax^2 + (-4a^2+6)x - 8a = 3ax^2 + (6-4a^2)x - 8a \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ y の整式 $\left(y+\dfrac{2}{3}\right)^3$ を展開して降冪の順に整理する．乗法公式 $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ を用いる．

$$\left(y+\frac{2}{3}\right)^3 = y^3+3y^2\frac{2}{3}+3y\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3 = y^3+2y^2+\frac{4}{3}y+\frac{8}{27}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問2.2.4}$ y の整式 $\left(y-\frac{4}{3}\right)^3$ を展開して降冪の順に整理せよ.

$$\left(y-\frac{4}{3}\right)^3 = y^3-3y^2\frac{4}{3}+3y\left(\frac{4}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)^3 = y^3-4y^2+\frac{16}{3}y-\frac{64}{27} \ .$$

一般に，自然数 m と n とについて，

$$m \text{ 次式と } n \text{ 次式との積は } (m+n) \text{ 次式}$$

になる．