2.5　整式の因数分解

例えば $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ のように，整数を因数（約数）の積の形に分解することを，因数分解といった．同じように，整式を因数（約数）の積の形に分解することを（整式の）因数分解という．正確には次のようになる：

整式の因数分解とはより低い次数の整式の積の形に変形することである．

例えば $120=2^3\cdot 3\cdot 5$ のように，整数を因数（約数）の積の形に分解することを，因数分解といった．同じように，整式を因数（約数）の積の形に分解することを（整式の）因数分解という．正確には次のようになる：

整式の因数分解とはより低い次数の整式の積の形に変形することである．

$\boxed{\text{例}}$ x の 2 次式 $5x^2-10x-15$ について

$$5x^2-10x-15 = 5(x^2-2x-3)\ .$$

これは右辺の因数 x^2-2x-3 が 2 次式なので整式の因数分解ではない．

例えば $120=2^3\cdot3\cdot5$ のように，整数を因数（約数）の積の形に分解することを，因数分解といった．同じように，整式を因数（約数）の積の形に分解することを（整式の）因数分解という．正確には次のようになる：

整式の因数分解とはより低い次数の整式の積の形に変形することである．

例 x の 2 次式 $5x^2-10x-15$ について

$$5x^2-10x-15 = 5(x^2-2x-3) \ .$$

これは右辺の因数 x^2-2x-3 が 2 次式なので整式の因数分解ではない．
$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$ なので，

$$5x^2-10x-15 = 5(x+1)(x-3) \ ;$$

これで右辺は 1 次式の積（と定数の積）の形なので，これは因数分解である．

終

例 x の整式 $\frac{1}{3}x^2 - 3$ を因数分解すると

$$\frac{1}{3}x^2 - 3 = \frac{1}{3}(x^2 - 9) = \frac{1}{3}(x+3)(x-3) \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ x の整式 $\dfrac{1}{3}x^2-3$ を因数分解すると

$$\frac{1}{3}x^2-3 = \frac{1}{3}(x^2-9) = \frac{1}{3}(x+3)(x-3) \ .$$

この整式は次のようにも因数分解できる：

$$\frac{1}{3}x^2-3 = \frac{1}{3}(x+3)(x-3) = \left\{\frac{1}{3}(x+3)\right\}(x-3) = \left(\frac{x}{3}+1\right)(x-3) \ ,$$

$$\frac{1}{3}x^2-3 = \frac{1}{3}(x+3)(x-3) = (x+3)\left\{\frac{1}{3}(x-3)\right\} = (x+3)\left(\frac{x}{3}-1\right) \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ x の整式 $\dfrac{1}{3}x^2-3$ を因数分解すると

$$\frac{1}{3}x^2-3 = \frac{1}{3}(x^2-9) = \frac{1}{3}(x+3)(x-3)\ .$$

この整式は次のようにも因数分解できる：

$$\frac{1}{3}x^2-3 = \frac{1}{3}(x+3)(x-3) = \left\{\frac{1}{3}(x+3)\right\}(x-3) = \left(\frac{x}{3}+1\right)(x-3)\ ,$$

$$\frac{1}{3}x^2-3 = \frac{1}{3}(x+3)(x-3) = (x+3)\left\{\frac{1}{3}(x-3)\right\} = (x+3)\left(\frac{x}{3}-1\right)\ .$$

これらのどの因数分解も，元の 2 次式 $\dfrac{1}{3}x^2-3$ を 2 個の 1 次式（と定数と）の積に分解しているので，因数分解としてはどれでも構わない． $\boxed{\text{終}}$

因数分解のために，乗法公式を（展開とは逆の向きで）よく用いる：任意の数 a, b, c, d, x について，

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2 \quad \text{（複号同順）};$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)\ ;$$

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)\ ;$$

$$acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)\ ;$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \quad \text{（複号同順）};$$

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3 \quad \text{（複号同順）}.$$

$\boxed{\text{例}}$ x の整式 $4x^2-7$ を因数分解する．乗法公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ を適用する．

$$4x^2-7=(2x)^2-\sqrt{7}^2=\left(2x+\sqrt{7}\right)\left(2x-\sqrt{7}\right)\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

例 x と y との整式 $x^2+xy-6y^2$ を因数分解する．乗法公式 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ を適用する．

$$x^2+xy-6y^2=x^2+(3y-2y)x+(3y)(-2y)=(x+3y)(x-2y)\ .$$

終

例 x の整式 x^3+125 を因数分解する. 乗法公式 $x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$ を適用する.

$$x^3+125=x^3+5^3=(x+5)(x^2-5x+25)\ .$$

終

$\boxed{問 2.5.1}$ 以下の整式を因数分解せよ.

(1) $9x^2 - 11$.

(2) $x^2 + 3ax - 4a^2$.

(3) $y^3 - 64$.

$\boxed{問 2.5.1}$ 以下の整式を因数分解せよ.

(1) $9x^2 - 11$. **(2)** $x^2 + 3ax - 4a^2$. **(3)** $y^3 - 64$.

(1)

$$9x^2 - 11 = (3x)^2 - \sqrt{11}^2 = \left(3x + \sqrt{11}\right)\left(3x - \sqrt{11}\right) .$$

問2.5.1 以下の整式を因数分解せよ.

(1) $9x^2 - 11$. **(2)** $x^2 + 3ax - 4a^2$. **(3)** $y^3 - 64$.

(1)

$$9x^2 - 11 = (3x)^2 - \sqrt{11}^{\,2} = \left(3x + \sqrt{11}\right)\left(3x - \sqrt{11}\right) .$$

(2)

$$x^2 + 3ax - 4a^2 = (x - a)(x + 4a) .$$

$\boxed{問 2.5.1}$ 以下の整式を因数分解せよ.

(1) $9x^2 - 11$. **(2)** $x^2 + 3ax - 4a^2$. **(3)** $y^3 - 64$.

(1)

$$9x^2 - 11 = (3x)^2 - \sqrt{11}^2 = \left(3x + \sqrt{11}\right)\left(3x - \sqrt{11}\right) .$$

(2)

$$x^2 + 3ax - 4a^2 = (x - a)(x + 4a) .$$

(3)

$$y^3 - 64 = y^3 - 4^3 = (y - 4)(y^2 + 4y + 16) .$$

乗法公式　$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$　を適用して因数分解するために，たすき掛けの図式と呼ばれる図式を用いる.

$\boxed{\text{例}}$ x の 2 次式 $3x^2 - 7x - 6$ を因数分解する.

$\boxed{\text{例}}$ x の 2 次式 $3x^2 - 7x - 6$ を因数分解する．この 2 次式に乗法公式 $acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$ を適用するために，

$$ac = 3\ , \qquad ad + bc = -7\ , \qquad bd = -6$$

となる整数 a, b, c, d を捜す.

$\boxed{例}$ x の 2 次式 $3x^2-7x-6$ を因数分解する．この 2 次式に乗法公式 $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$ を適用するために，

$$ac=3\ ,\qquad ad+bc=-7\ ,\qquad bd=-6$$

となる整数 a,b,c,d を探す．そのために，$ac=3$ ，$bd=-6$ となる整数 a, b,c,d に対して，

$$\begin{array}{ccccc} a & & b & \rightarrow & bc \\ & \times & & & \\ c & & d & \rightarrow & ad \\ \hline & & & & ad+bc \end{array}$$

のような形の図式を書いて，$ad+bc=-7$ となる a,b,c,d を探す．

$\boxed{\text{例}}$ x の 2 次式 $3x^2-7x-6$ を因数分解する．この 2 次式に乗法公式 $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$ を適用するために，

$$ac=3\ ,\qquad ad+bc=-7\ ,\qquad bd=-6$$

となる整数 a,b,c,d を捜す．そのために，$ac=3$，$bd=-6$ となる整数 a,b,c,d に対して，

$$\begin{array}{ccccc} a & & b & \rightarrow & bc \\ & \times & & & \\ c & & d & \rightarrow & ad \\ \hline & & & & ad+bc \end{array}$$

のような形の図式を書いて，$ad+bc=-7$ となる a,b,c,d を捜す．この図式をたすき掛けの図式という．

$ac=3$, $bd=-6$ となる整数 a,b,c,d に対して,

$$\begin{array}{ccccc} a & & b & \rightarrow & bc \\ & \times & & & \\ c & & d & \rightarrow & ad \\ \hline & & & & ad+bc \end{array}$$

のような形の図式を書いて, $ad+bc=-7$ となる a,b,c,d を捜す.

$ac=3$, $bd=-6$ となる整数 a,b,c,d に対して,

$$\begin{array}{ccccc} a & & b & \rightarrow & bc \\ & \times & & & \\ c & & d & \rightarrow & ad \\ \hline & & & & ad+bc \end{array}$$

のような形の図式を書いて, $ad+bc=-7$ となる a,b,c,d を捜す.

$ac=3$, $bd=-6$ となるように

$\begin{cases} a=1 \\ c=3 \end{cases}$, $\begin{cases} b=1 \\ d=-6 \end{cases}$ とすると $\begin{array}{ccccc} 1 & & 1 & \rightarrow & 3 \\ & \times & & & \\ 3 & & -6 & \rightarrow & -6 \\ \hline & & & & -3 \end{array}$ なので $ad+bc=-3$

となり失敗する.

$ac=3$, $bd=-6$ となる整数 a,b,c,d に対して，

$$\begin{array}{ccccc} a & & b & \to & bc \\ & \times & & & \\ c & & d & \to & \underline{ad} \\ & & & & ad+bc \end{array}$$

のような形の図式を書いて， $ad+bc=-7$ となる a,b,c,d を捜す.

$ac=3$, $bd=-6$ となるように

$\begin{cases} a=1 \\ c=3 \end{cases}$, $\begin{cases} b=1 \\ d=-6 \end{cases}$ とすると $\begin{array}{ccccc} 1 & & 1 & \to & 3 \\ & \times & & & \\ 3 & & -6 & \to & \underline{-6} \\ & & & & -3 \end{array}$ なので $ad+bc=-3$

となり失敗する.

$ac=3$, $bd=-6$ となるように

$\begin{cases} a=1 \\ c=3 \end{cases}$, $\begin{cases} b=-1 \\ d=6 \end{cases}$ とすると $\begin{array}{ccccc} 1 & & -1 & \to & -3 \\ & \times & & & \\ 3 & & 6 & \to & \underline{6} \\ & & & & 3 \end{array}$ なので $ad+bc=3$

となり失敗する.

$ac=3$ ， $bd=-6$ となる整数 a,b,c,d に対して，

$$
\begin{array}{ccccc}
a & & b & \rightarrow & bc \\
 & \times & & & \\
c & & d & \rightarrow & ad \\
\hline
 & & & & ad+bc
\end{array}
$$

のような形の図式を書いて， $ad+bc=-7$ となる a,b,c,d を捜す.

$ac=3$, $bd=-6$ となる整数 a,b,c,d に対して,

$$\begin{array}{cccccc} a & \times & b & \rightarrow & bc \\ c & & d & \rightarrow & \underline{ad} \\ & & & & ad+bc \end{array}$$

のような形の図式を書いて, $ad+bc=-7$ となる a,b,c,d を捜す.

$ac=3$, $bd=-6$ となるように

$\begin{cases} a=1 \\ c=3 \end{cases}$, $\begin{cases} b=2 \\ d=-3 \end{cases}$ とすると $\begin{array}{cccccc} 1 & \times & 2 & \rightarrow & 6 \\ 3 & & -3 & \rightarrow & \underline{-3} \\ & & & & 3 \end{array}$ なので $ad+bc=3$

となり失敗する.

$ac=3$ ，$bd=-6$ となる整数 a,b,c,d に対して，

$$\begin{array}{ccccc} a & & b & \to & bc \\ & \times & & & \\ c & & d & \to & ad \\ \hline & & & & ad+bc \end{array}$$

のような形の図式を書いて，$ad+bc=-7$ となる a,b,c,d を捜す.

$ac=3$ ，$bd=-6$ となるように

$\begin{cases} a=1 \\ c=3 \end{cases}$, $\begin{cases} b=2 \\ d=-3 \end{cases}$ とすると $\begin{array}{ccccc} 1 & & 2 & \to & 6 \\ & \times & & & \\ 3 & & -3 & \to & -3 \\ \hline & & & & 3 \end{array}$ なので $ad+bc=3$

となり失敗する.

$ac=3$ ，$bd=-6$ となるように

$\begin{cases} a=1 \\ c=3 \end{cases}$, $\begin{cases} b=-2 \\ d=3 \end{cases}$ とすると $\begin{array}{ccccc} 1 & & -2 & \to & -6 \\ & \times & & & \\ 3 & & 3 & \to & 3 \\ \hline & & & & -3 \end{array}$ なので $ad+bc=-3$

となり失敗する.

$ac=3$, $bd=-6$ となる整数 a,b,c,d に対して,

$$\begin{array}{ccccc} a & & b & \rightarrow & bc \\ & \times & & & \\ c & & d & \rightarrow & ad \\ \hline & & & & ad+bc \end{array}$$

のような形の図式を書いて, $ad+bc=-7$ となる a,b,c,d を捜す.

$ac=3$ ，$bd=-6$ となる整数 a,b,c,d に対して，

$$\begin{array}{ccccc} a & \multirow{2}{*}{$\times$} & b & \rightarrow & bc \\ c & & d & \rightarrow & ad \\ \hline & & & & ad+bc \end{array}$$

のような形の図式を書いて， $ad+bc=-7$ となる a,b,c,d を捜す.

$ac=3$ ，$bd=-6$ となるように

$\begin{cases} a=1 \\ c=3 \end{cases}$ ， $\begin{cases} b=3 \\ d=-2 \end{cases}$ とすると $\begin{array}{ccccc} 1 & \multirow{2}{*}{$\times$} & 3 & \rightarrow & 9 \\ 3 & & -2 & \rightarrow & -2 \\ \hline & & & & 7 \end{array}$ なので $ad+bc=7$

となり失敗する.

$ac=3$ ，$bd=-6$ となる整数 a,b,c,d に対して，

$$\begin{array}{ccccc} a & \multirow{2}{*}{$\times$} & b & \to & bc \\ c & & d & \to & ad \\ \hline & & & & ad+bc \end{array}$$

のような形の図式を書いて，$ad+bc=-7$ となる a,b,c,d を捜す.

$ac=3$ ，$bd=-6$ となるように

$\begin{cases} a=1 \\ c=3 \end{cases}$，$\begin{cases} b=3 \\ d=-2 \end{cases}$ とすると $\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 3 & \to & 9 \\ 3 & & -2 & \to & -2 \\ \hline & & & & 7 \end{array}$ なので $ad+bc=7$

となり失敗する.

$ac=3$ ，$bd=-6$ となるように

$\begin{cases} a=1 \\ c=3 \end{cases}$，$\begin{cases} b=-3 \\ d=2 \end{cases}$ とすると $\begin{array}{ccccc} 1 & \times & -3 & \to & -9 \\ 3 & & 2 & \to & 2 \\ \hline & & & & -7 \end{array}$ なので $ad+bc=-7$

となり成功する.

$\begin{cases} a = 1 \\ c = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} b = -3 \\ d = 2 \end{cases}$ のとき $\begin{array}{ccccc} 1 & & -3 & \rightarrow & -9 \\ & \times & & & \\ 3 & & 2 & \rightarrow & 2 \\ \hline & & & & -7 \end{array}$ なので $ad + bc = -7$;

$\begin{cases} a = 1 \\ c = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} b = -3 \\ d = 2 \end{cases}$ のとき $\begin{array}{cccccc} 1 & & -3 & \to & -9 \\ & \times & & & \\ 3 & & 2 & \to & 2 \\ \hline & & & & -7 \end{array}$ なので $ad + bc = -7$;

このとき

$$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd = 3x^2 - 7x - 6 \ ;$$

$\begin{cases} a = 1 \\ c = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} b = -3 \\ d = 2 \end{cases}$ のとき $\begin{array}{ccccc} 1 & & -3 & \rightarrow & -9 \\ & \times & & & \\ 3 & & 2 & \rightarrow & 2 \\ \hline & & & & -7 \end{array}$ なので $ad + bc = -7$;

このとき

$$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd = 3x^2 - 7x - 6 \ ;$$

よって

$$3x^2 - 7x - 6 = (ax+b)(cx+d) = (1x-3)(3x+2) = (x-3)(3x+2) \ .$$

$\begin{cases} a = 1 \\ c = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} b = -3 \\ d = 2 \end{cases}$ のとき $\begin{array}{ccccc} 1 & \times & -3 & \rightarrow & -9 \\ 3 & & 2 & \rightarrow & 2 \\ \hline & & & & -7 \end{array}$ なので $ad + bc = -7$;

このとき

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd = 3x^2 - 7x - 6 \ ;$$

よって

$$3x^2 - 7x - 6 = (ax + b)(cx + d) = (1x - 3)(3x + 2) = (x - 3)(3x + 2) \ .$$

従って $3x^2 - 7x - 6$ を因数分解すると

$$3x^2 - 7x - 6 = (x - 3)(3x + 2) \ .$$

終

$\boxed{問 2.5.2}$ 以下の整式を因数分解せよ.

(1) $2x^2 - x - 6$. **(2)** $4y^2 - 13y - 12$.

(1) $ac = 2$, $bd = -6$ となるように

$$\begin{cases} a = 1 \\ c = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} b = -2 \\ d = 3 \end{cases}$$ とすると $$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & -2 & \rightarrow & -4 \\ 2 & & 3 & \rightarrow & 3 \\ \hline & & & & -1 \end{array}$$ なので $ad + bc = -1$.

これより

$$2x^2 - x - 6 = (x-2)(2x+3) \ .$$

(2) $ac = 4$, $bd = -12$ となるように

$$\begin{cases} a = 1 \\ c = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} b = -4 \\ d = 3 \end{cases}$$ とすると $$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & -4 & \rightarrow & -16 \\ 4 & & 3 & \rightarrow & 3 \\ \hline & & & & -13 \end{array}$$ なので $ad + bc = -1$.

これより

$$4y^2 - 13y - 12 = (y-4)(4y+3) \ .$$

$\boxed{終}$

整式を因数分解するために，共通因数があればまずそれを括り出す.

$\boxed{\text{例}}$ x の整式 $3x^2-9x+6$ を因数分解する． 3 を括り出す.

$$3x^2-9x+6=3(x^2-3x+2)=3(x-1)(x-2)\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

例 t の整式 $t^3 - 3t^2 - 4t$ を因数分解する．共通因数 t を括り出す．

$$2t^3 - 6t^2 - 8t = 2t(t^2 - 3t - 4) = t(t+1)(t-4) \ .$$

終

$\boxed{問2.5.2}$ 以下の整式を因数分解せよ.

(1) $2x^2 - 8x + 6$.　　**(2)** $3x^3 - 16x^2 - 12x$.

(1)

$$2x^2 - 8x + 6 = 2(x^2 - 4x + 3) = 2(x-1)(x-3) \ .$$

(2)

$$3x^3 - 16x^2 - 12x = x(3x^2 - 16x - 12) = x(x-6)(3x+2) \ .$$

$\boxed{終}$

次数が 3 以上の整式を因数分解するためには，しばしば，因数定理を用いて因数を探す．

$\boxed{例}$ 整式 $x^3+x^2-8x-12$ を因数分解する.

$\boxed{例}$ 整式 $x^3+x^2-8x-12$ を因数分解する.

$P(x)=x^3+x^2-8x-12$ とおく. $P(1)=-18\neq 0$.

$P(-1)=-4\neq 0$. $P(2)=-16\neq 0$. $P(-2)=0$.

$\boxed{\text{例}}$ 整式 $x^3+x^2-8x-12$ を因数分解する.

$P(x)=x^3+x^2-8x-12$ とおく. $P(1)=-18\neq 0$.

$P(-1)=-4\neq 0$. $P(2)=-16\neq 0$. $P(-2)=0$.

よって因数定理により $x+2$ は $P(x)$ の因数なので, $P(x)=x^3+x^2-8x-12$ は $x+2$ で割り切れる.

$\boxed{\text{例}}$ 整式 $x^3+x^2-8x-12$ を因数分解する．

$P(x)=x^3+x^2-8x-12$ とおく． $P(1)=-18\neq 0$ ．
$P(-1)=-4\neq 0$ ． $P(2)=-16\neq 0$ ． $P(-2)=0$ ．
よって因数定理により $x+2$ は $P(x)$ の因数なので，$P(x)=x^3+x^2-8x-12$ は $x+2$ で割り切れる．実際に $x^3+x^2-8x-12$ を $x+2$ で割ると整商は x^2-x-6 である：

$$
\begin{array}{r}
x^2-\ \ x-\ \ 6 \\
x+2\ \overline{\big)\,x^3+\ \ x^2-8x-12} \\
\underline{x^3+2x^2}\qquad\qquad \\
-\ \ x^2\quad 8x\qquad \\
\underline{-\ \ x^2-2x}\qquad \\
-6x-12 \\
\underline{-6x-12} \\
0
\end{array}
$$

$$x^3+x^2-8x-12=(x+2)(x^2-x-6)\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 整式 $x^3+x^2-8x-12$ を因数分解する.

$P(x)=x^3+x^2-8x-12$ とおく. $P(1)=-18\neq 0$. $P(-1)=-4\neq 0$. $P(2)=-16\neq 0$. $P(-2)=0$. よって因数定理により $x+2$ は $P(x)$ の因数なので, $P(x)=x^3+x^2-8x-12$ は $x+2$ で割り切れる. 実際に $x^3+x^2-8x-12$ を $x+2$ で割ると整商は x^2-x-6 である:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & -x & -6 & \\ \hline
x+2 & x^3 & +x^2 & -8x & -12 \\
 & x^3 & +2x^2 & & \\ \hline
 & & -x^2 & 8x & \\
 & & -x^2 & -2x & \\ \hline
 & & & -6x & -12 \\
 & & & -6x & -12 \\ \hline
 & & & & 0
\end{array}$$

$$x^3+x^2-8x-12=(x+2)(x^2-x-6)\ .$$

更に x の 2 次式 x^2-x-6 を因数分解する: $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$.

$\boxed{\text{例}}$ 整式 $x^3+x^2-8x-12$ を因数分解する.

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2 - \ \ x - \ \ 6 \\
x+2 & \big)\overline{x^3 + \ \ x^2 - 8x - 12} \\
 & \underline{x^3 + 2x^2} \qquad\qquad \\
 & - \ \ x^2 \quad 8x \qquad \\
 & \underline{- \ \ x^2 - 2x} \qquad \\
 & -6x - 12 \\
 & \underline{-6x - 12} \\
 & 0
\end{array}
$$

$P(x)=x^3+x^2-8x-12$ とおく. $P(1)=-18\neq 0$. $P(-1)=-4\neq 0$. $P(2)=-16\neq 0$. $P(-2)=0$. よって因数定理により $x+2$ は $P(x)$ の因数なので, $P(x)=x^3+x^2-8x-12$ は $x+2$ で割り切れる. 実際に $x^3+x^2-8x-12$ を $x+2$ で割ると整商は x^2-x-6 である:

$$x^3+x^2-8x-12 = (x+2)(x^2-x-6) \ .$$

更に x の 2 次式 x^2-x-6 を因数分解する: $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$. 故に $x^3+x^2-8x-12$ を因数分解すると

$$
\begin{aligned}
x^3+x^2-8x-12 &= (x+2)(x^2-x-6) = (x+2)(x+2)(x-3) \\
&= (x+2)^2(x-3) \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問2.5.3}$ x の整式 $x^3-6x^2+5x+12$ を因数分解せよ．

$P(x)=x^3-6x^2+5x+12$ とおくと

$P(\quad)=0$ なので，因数定理により

$x^3-6x^2+5x+12$ は　　　　　で割り切れる．こ

のときの整商は　　　　　　　　　である．

$$
\begin{aligned}
x^3-6x^2+5x+12 &= (\qquad)(\qquad\qquad\qquad) \\
&= (\qquad)(\qquad)(\qquad).
\end{aligned}
$$

$\boxed{問2.5.3}$ x の整式 $x^3-6x^2+5x+12$ を因数分解せよ．

$$P(x)=x^3-6x^2+5x+12$$ とおくと

$P(-1)=0$ なので，因数定理により

$x^3-6x^2+5x+12$ は $x+1$ で割り切れる．こ

のときの整商は $x^2-7x+12$ である．

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & -7x & +12 & \\
\hline
x+1 & x^3-6x^2 & +5x & +12 & \\
 & x^3+x^2 & & & \\
\hline
 & -7x^2 & +5x & & \\
 & -7x^2 & -7x & & \\
\hline
 & & 12x & +12 & \\
 & & 12x & +12 & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
x^3-6x^2+5x+12 &= (x+1)(x^2-7x+12)\\
&= (x+1)(x-3)(x-4)\ .
\end{aligned}
$$

終

$\boxed{\text{問}2.5.4}$ t の整式 $t^3 - 12t + 16$ を因数分解せよ.

$P(t) = t^3 - 12t + 16$ とおくと $P(\quad) = 0$ なので, 因数定理により $t^3 - 12t + 16$ は で割り切れる；このときの整商は であるる.

$$\begin{aligned} t^3 - 12t + 16 &= (\qquad)(\qquad\qquad) \\ &= (\qquad)(\qquad)(\qquad) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{問}2.5.4}$ t の整式 $t^3-12t+16$ を因数分解せよ.

$P(t)=t^3-12t+16$ とおくと $P(2)=0$ なので，因数定理により $t^3-12t+16$ は $t-2$ で割り切れる；このときの整商は t^2+2t-8 である.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & & t^2 & +\ 2t & -\ 8 \\ \cline{2-5}
t-2 & t^3 & & -12t & +16 \\
 & t^3 & -2t^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & 2t^2 & -12t & \\
 & & 2t^2 & -\ 4t & \\ \cline{3-4}
 & & & -\ 8t & +16 \\
 & & & -\ 8t & +16 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
t^3-12t+16 &= (t-2)(t^2+2t-8) \\
&= (t-2)(t-2)(t+4) \\
&= (t-2)^2(t+4)\ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{終}}$

複数の文字について整式と見なせる式を因数分解するためには，どちらか片方の文字について整理する.

例 a と b との整式 $6ab+9a-8b-12$ を因数分解する. 整式 $6ab+9a-8b-12$ を b について整理して共通因数を括り出す.

$$
\begin{aligned}
6ab+9a-8b-12 &= (6a-8)b+9a-12 = 2(3a-4)b+3(3a-4) \\
&= (3a-4)(2b+3) \ .
\end{aligned}
$$

終

$\boxed{問2.5.5}$ x と y との整式 $12xy-9x+8y-6$ を因数分解せよ.

$$12xy-9x+8y-6=(12x+8)y-9x-6=4(3x+2)y-3(3x+2)$$

$$=(3x+2)(4y-3)\ .$$

複数の文字について整式と見なせる式を因数分解するとき，着目する文字によって次数が異なるときは，次数が一番低くなる文字に着目して整理する．

例 整式 $x^2+(3a-2)x+6a-8$ を因数分解する.

$\boxed{例}$ 整式 $x^2+(3a-2)x+6a-8$ を因数分解する．この整式は，x についての整式とみると 2 次式であるが，a についての整式とみると高々1 次式である．

$\boxed{\text{例}}$ 整式 $x^2+(3a-2)x+6a-8$ を因数分解する．この整式は，x についての整式とみると 2 次式であるが，a についての整式とみると高々1 次式である．整式 $x^2+(3a-2)x+6a-8$ を a の整式として降冪の順に整理すると

$$x^2+(3a-2)x+6a-8=x^2+3xa-2x+6a-8=(3x+6)a+x^2-2x-8\ .$$

$\boxed{例}$ 整式 $x^2+(3a-2)x+6a-8$ を因数分解する．この整式は，x についての整式とみると 2 次式であるが，a についての整式とみると高々1 次式である．整式 $x^2+(3a-2)x+6a-8$ を a の整式として降冪の順に整理すると

$$x^2+(3a-2)x+6a-8 = x^2+3xa-2x+6a-8 = (3x+6)a+x^2-2x-8 \ .$$

x の整式 x^2-2x-8 は因数分解できる：$x^2-2x-8=(x+2)(x-4)$ ．共通因数 $(x+2)$ を括り出す.

$$\begin{aligned}(3x+6)a+x^2-2x-8 &= 3(x+2)a+(x+2)(x-4) = (x+2)\{3a+(x-4)\} \\ &= (x+2)(x+3a-4) \ .\end{aligned}$$

例 整式 $x^2+(3a-2)x+6a-8$ を因数分解する．この整式は，x についての整式とみると 2 次式であるが，a についての整式とみると高々1 次式である．整式 $x^2+(3a-2)x+6a-8$ を a の整式として降冪の順に整理すると

$$x^2+(3a-2)x+6a-8 = x^2+3xa-2x+6a-8 = (3x+6)a+x^2-2x-8 \ .$$

x の整式 x^2-2x-8 は因数分解できる：$x^2-2x-8=(x+2)(x-4)$ ．共通因数 $(x+2)$ を括り出す.

$$\begin{aligned}(3x+6)a+x^2-2x-8 &= 3(x+2)a+(x+2)(x-4) = (x+2)\{3a+(x-4)\} \\ &= (x+2)(x+3a-4) \ .\end{aligned}$$

故に

$$x^2+(3a-2)x+6a-8=(3x+6)a+x^2-2x-8=(x+2)(x+3a-4) \ .$$ 終

$\boxed{\text{問}2.5.6}$ 以下の整式を因数分解せよ.

(1) $x^2 + (4a-5)x - 8a + 6$.

(2) $x^2y - 2x - 9y + 6$.

$\boxed{問2.5.7}$ 以下の整式を因数分解せよ.

(1) $x^2+(4a-5)x-8a+6$.

(2) $x^2y-2x-9y+6$.

(1)

$$\begin{aligned}x^2+(4a-5)x-8a+6 &= (4x-8)a+x^2-5x+6\\ &= 4(x-2)a+(x-2)(x-3)\\ &= (x-2)(4a+x-3)\\ &= (x-2)(x+4a-3)\ .\end{aligned}$$

問2.5.8 以下の整式を因数分解せよ.

(1) $x^2+(4a-5)x-8a+6$.　　**(2)** $x^2y-2x-9y+6$.

(1)

$$\begin{aligned} x^2+(4a-5)x-8a+6 &= (4x-8)a+x^2-5x+6 \\ &= 4(x-2)a+(x-2)(x-3) \\ &= (x-2)(4a+x-3) \\ &= (x-2)(x+4a-3) \ . \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} x^2y-2x-9y+6 &= (x^2-9)y-2x+6 \\ &= (x+3)(x-3)y-2(x-3) \\ &= (x-3)\{(x+3)y-2\} \\ &= (x-3)(xy+3y-2) \ . \end{aligned}$$

終

複数の文字について整式と見なせる式を因数分解するとき，着目する文字によって次数が同じときは，最高次の係数がなるべく簡単になる文字に着目して整理する．

例 整式 $3x^2-4xy+y^2+7x-y-6$ を因数分解する.

$\boxed{\text{例}}$ 整式 $3x^2-4xy+y^2+7x-y-6$ を因数分解する．この整式は，x^2 の係数は 3 で y^2 の係数は 1 である．そこで y について整理する．

$$3x^2-4xy+y^2+7x-y-6 = y^2-(4x+1)y+3x^2+7x-6\ .$$

例 整式 $3x^2-4xy+y^2+7x-y-6$ を因数分解する．この整式は，x^2 の係数は 3 で y^2 の係数は 1 である．そこで y について整理する．

$$3x^2-4xy+y^2+7x-y-6 = y^2-(4x+1)y+3x^2+7x-6 \ .$$

ここで $3x^2+7x-6$ を因数分解する：

$$3x^2+7x-6 = (x+3)(3x-2) \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 整式 $3x^2-4xy+y^2+7x-y-6$ を因数分解する．この整式は，x^2 の係数は 3 で y^2 の係数は 1 である．そこで y について整理する．

$$3x^2-4xy+y^2+7x-y-6 = y^2-(4x+1)y+3x^2+7x-6 \ .$$

ここで $3x^2+7x-6$ を因数分解する：

$$3x^2+7x-6 = (x+3)(3x-2) \ .$$

よって

$$y^2-(4x+1)y+3x^2+7x-6 = y^2+(-4x-1)y+(x+3)(3x-2) \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 整式 $3x^2-4xy+y^2+7x-y-6$ を因数分解する．この整式は，x^2 の係数は 3 で y^2 の係数は 1 である．そこで y について整理する．

$$3x^2-4xy+y^2+7x-y-6 = y^2-(4x+1)y+3x^2+7x-6 \ .$$

ここで $3x^2+7x-6$ を因数分解する：

$$3x^2+7x-6 = (x+3)(3x-2) \ .$$

よって

$$y^2-(4x+1)y+3x^2+7x-6 = y^2+(-4x-1)y+(x+3)(3x-2) \ .$$

x のある整式 A, B について，

$$y^2+(-4x-1)y+(x+3)(3x-2) = y^2+(A+B)y+AB = (y+A)(y+B)$$

のように因数分解するために，

$$A+B = -4x-1 \ \text{かつ} \ AB = (x+3)(3x-2)$$

となるようにする．

x のある整式 A, B について，

$$AB = (x+3)(3x-2) \quad \text{かつ} \quad A+B = -4x-1$$

となるようにする．

x のある整式 A, B について，

$$AB = (x+3)(3x-2) \text{ かつ } A+B = -4x-1$$

となるようにする． $A = -(x+3)$ かつ $B = -(3x-2)$ とすると
$A+B = -(x+3)-(3x-2) = -4x-1$ ．

x のある整式 A, B について,

$$AB = (x+3)(3x-2) \quad \text{かつ} \quad A+B = -4x-1$$

となるようにする. $A = -(x+3)$ かつ $B = -(3x-2)$ とすると

$A+B = -(x+3)-(3x-2) = -4x-1$. よって,

$$\begin{aligned} & 3x^2-4xy+y^2+7x-y-6 \\ &= y^2+(-4x-1)y+(x+3)(3x-2) \\ &= y^2+(A+B)y+AB = (y+A)(y+B) \end{aligned}$$

x のある整式 A, B について,

$$AB = (x+3)(3x-2) \text{ かつ } A+B = -4x-1$$

となるようにする. $A = -(x+3)$ かつ $B = -(3x-2)$ とすると

$A+B = -(x+3)-(3x-2) = -4x-1$. よって,

$$\begin{aligned} & 3x^2-4xy+y^2+7x-y-6 \\ &= y^2+(-4x-1)y+(x+3)(3x-2) \\ &= y^2+(A+B)y+AB = (y+A)(y+B) \\ &= \{y-(x+3)\}\{y-(3x-2)\} = (y-x-3)(y-3x+2) \end{aligned}$$

x のある整式 A, B について,

$$AB = (x+3)(3x-2) \quad \text{かつ} \quad A+B = -4x-1$$

となるようにする. $A = -(x+3)$ かつ $B = -(3x-2)$ とすると $A+B = -(x+3)-(3x-2) = -4x-1$. よって,

$$\begin{aligned}
&3x^2 - 4xy + y^2 + 7x - y - 6 \\
&= y^2 + (-4x-1)y + (x+3)(3x-2) \\
&= y^2 + (A+B)y + AB = (y+A)(y+B) \\
&= \{y-(x+3)\}\{y-(3x-2)\} = (y-x-3)(y-3x+2) \\
&= \{-(y-x-3)\}\{-(y-3x+2)\} = (-y+x+3)(-y+3x-2) \\
&= (x-y+3)(3x-y-2) \ .
\end{aligned}$$

x のある整式 A, B について,

$$AB = (x+3)(3x-2) \quad \text{かつ} \quad A+B = -4x-1$$

となるようにする. $A = -(x+3)$ かつ $B = -(3x-2)$ とすると
$A+B = -(x+3)-(3x-2) = -4x-1$. よって,

$$\begin{aligned}
&3x^2-4xy+y^2+7x-y-6 \\
&= y^2+(-4x-1)y+(x+3)(3x-2) \\
&= y^2+(A+B)y+AB = (y+A)(y+B) \\
&= \{y-(x+3)\}\{y-(3x-2)\} = (y-x-3)(y-3x+2) \\
&= \{-(y-x-3)\}\{-(y-3x+2)\} = (-y+x+3)(-y+3x-2) \\
&= (x-y+3)(3x-y-2) \ .
\end{aligned}$$

故に

$$3x^2-4xy+y^2+7x-y-6 = (x-y+3)(3x-y-2) \ .$$

終

$\boxed{問 2.5.6}$ 整式 $3x^2-4xy+y^2+2x+2y-8$ を因数分解せよ.

$$\begin{aligned}3x^2-4xy+y^2+2x+2y-8 &= y^2+(-4x+2)x+3x^2+2x-8\\ &= y^2+(-4x+2)y+(y+2)(3x-4)\\ &= \{y-(x+2)\}\{y-(3x-4)\}\\ &= (x-y+2)(3x-y-4)\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 整式 $x^2+4xy+3y^2-x+3y-6$ を因数分解する.

$\boxed{例}$ 整式 $x^2+4xy+3y^2-x+3y-6$ を因数分解する．この整式は，x^2 の係数は 1 で y^2 の係数は 3 である．そこで x について整理する．

$$x^2+4xy+3y^2-x+3y-6 = x^2+(4y-1)x+3y^2+3y-6 \ .$$

$\boxed{例}$ 整式 $x^2+4xy+3y^2-x+3y-6$ を因数分解する．この整式は，x^2 の係数は 1 で y^2 の係数は 3 である．そこで x について整理する．

$$x^2+4xy+3y^2-x+3y-6 = x^2+(4y-1)x+3y^2+3y-6\ .$$

ここで $3y^2+3y-6$ を因数分解する：

$$3y^2+3y-6 = 3(y^2+y-2) = 3(y+2)(y-1)\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 整式 $x^2+4xy+3y^2-x+3y-6$ を因数分解する．この整式は，x^2 の係数は 1 で y^2 の係数は 3 である．そこで x について整理する．

$$x^2+4xy+3y^2-x+3y-6 = x^2+(4y-1)x+3y^2+3y-6 \ .$$

ここで $3y^2+3y-6$ を因数分解する：

$$3y^2+3y-6 = 3(y^2+y-2) = 3(y+2)(y-1) \ .$$

よって

$$x^2+(4y-1)x+3y^2+3y-6 = x^2+(4y-1)x+3(y+2)(y-1) \ .$$

例 整式 $x^2+4xy+3y^2-x+3y-6$ を因数分解する．この整式は，x^2 の係数は 1 で y^2 の係数は 3 である．そこで x について整理する．

$$x^2+4xy+3y^2-x+3y-6 = x^2+(4y-1)x+3y^2+3y-6 \ .$$

ここで $3y^2+3y-6$ を因数分解する：

$$3y^2+3y-6 = 3(y^2+y-2) = 3(y+2)(y-1) \ .$$

よって

$$x^2+(4y-1)x+3y^2+3y-6 = x^2+(4y-1)x+3(y+2)(y-1) \ .$$

y のある整式 A, B について，

$$x^2+(4y-1)x+3(y+2)(y-1) = x+(A+B)+AB = (x+A)(x+B)$$

のように因数分解するために，

$$A+B = 4y-1 \quad \text{かつ} \quad AB = 3(y+2)(y-1)$$

となるようにする．

y のある整式 A, B について，

$$AB = 3(y+2)(y-1) \quad \text{かつ} \quad A+B = 4y-1$$

となるようにする．

y のある整式 A, B について，

$$AB = 3(y+2)(y-1) \quad \text{かつ} \quad A+B = 4y-1$$

となるようにする． $A = y+2$ ， $B = 3(y-1) = 3y-3$ とすると

$$A+B = y+2+3y-3 = 4y-1 \ .$$

y のある整式 A, B について,

$$AB = 3(y+2)(y-1) \text{ かつ } A+B = 4y-1$$

となるようにする. $A = y+2$, $B = 3(y-1) = 3y-3$ とすると

$$A+B = y+2+3y-3 = 4y-1 \ .$$

よって,

$$\begin{aligned} x^2+4xy+3y^2-x+3y-6 &= x^2+(4y-1)x+3(y+2)(y-1) \\ &= x^2+(A+B)x+AB = (x+A)(x+B) \\ &= \{x+(y+2)\}\{x+(3y-3)\} \\ &= (x+y+2)(x+3y-3) \ . \end{aligned}$$

y のある整式 A, B について，

$$AB = 3(y+2)(y-1) \quad \text{かつ} \quad A+B = 4y-1$$

となるようにする． $A = y+2$ ， $B = 3(y-1) = 3y-3$ とすると

$$A+B = y+2+3y-3 = 4y-1 \ .$$

よって，

$$\begin{aligned} x^2+4xy+3y^2-x+3y-6 &= x^2+(4y-1)x+3(y+2)(y-1) \\ &= x^2+(A+B)x+AB = (x+A)(x+B) \\ &= \{x+(y+2)\}\{x+(3y-3)\} \\ &= (x+y+2)(x+3y-3) \ . \end{aligned}$$

故に

$$x^2+4xy+3y^2-x+3y-6 = (x+y+2)(x+3y-3) \ .$$

終

$\boxed{問 2.5.7}$ 整式 $x^2+3xy+2y^2-4x-2y-12$ を因数分解せよ.

$$
\begin{aligned}
x^2+3xy+2y^2-4x-2y-12 &= x^2+(3y-4)x+2y^2-2y-12 \\
&= x^2+(3y-4)x+2(y^2-y-6) \\
&= x^2+(3y-4)x+2(y+2)(y-3) \\
&= x^2+\{(y+2)+(2y-6)\}x+(y+2)(2y-6) \\
&= \{x+(y+2)\}\{x+(2y-6)\} \\
&= (x+y+2)(x+2y-6) \quad .
\end{aligned}
$$

整式を因数分解するとその整式の約数（因数）が分かる.

整式を因数分解するするとその整式の約数（因数）が分かる.

例 整数 $2\times 3\times 5=30$ の正の約数は，1 と 2 と 3 と 5 と $2\times 3=6$ と $2\times 5=10$ と $3\times 5=15$ と $2\times 3\times 5=30$ との 8 個がある.

整式を因数分解するとその整式の約数（因数）が分かる.

$\boxed{\text{例}}$ 整数 $2\times3\times5=30$ の正の約数は, 1 と 2 と 3 と 5 と $2\times3=6$ と $2\times5=10$ と $3\times5=15$ と $2\times3\times5=30$ との 8 個がある. 同様に考えると, 整式 $(x+2)(x-3)(x-4)$ の約数で降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 である整式は, 1 と $x+2$ と $x-3$ と $x-4$ と $(x+2)(x-3)=x^2-x-6$ と $(x+2)(x-4)=x^2-2x-8$ と $(x-3)(x-4)=x^2-7x+12$ と $(x+2)(x-3)(x-4)=x^3-5x^2-2x+24$ との 8 個がある.

整式を因数分解するするとその整式の約数（因数）が分かる.

$\boxed{\text{例}}$ 整数 $2 \times 3 \times 5 = 30$ の正の約数は, 1 と 2 と 3 と 5 と $2 \times 3 = 6$ と $2 \times 5 = 10$ と $3 \times 5 = 15$ と $2 \times 3 \times 5 = 30$ との 8 個がある. 同様に考えると, 整式 $(x+2)(x-3)(x-4)$ の約数で降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 である整式は, 1 と $x+2$ と $x-3$ と $x-4$ と $(x+2)(x-3) = x^2 - x - 6$ と $(x+2)(x-4) = x^2 - 2x - 8$ と $(x-3)(x-4) = x^2 - 7x + 12$ と $(x+2)(x-3)(x-4) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ との 8 個がある. 例えば,

$$(x+2)(x-3)(x-4) = \frac{5}{7}(x+2)(x-3) \times \frac{7}{5}(x-4)$$

なので, $\frac{5}{7}(x+2)(x-3) = \frac{5}{7}x^2 - \frac{5}{7}x - \frac{30}{7}$ とか $\frac{7}{5}(x-4) = \frac{7}{5}x - \frac{28}{5}$ なども $(x+2)(x-3)(x-4)$ の約数であるが, これらの整式は降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 でない. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ x の整式 $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$ の約数のうち降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 である整式を総て求める.

例 x の整式 $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ の約数のうち降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 である整式を総て求める. まず $P(x)$ を因数分解する.

例 x の整式 $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$ の約数のうち降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 である整式を総て求める. まず $P(x)$ を因数分解する. $P(1)=0$ なので因数定理により $P(x)$ は $x-1$ で割り切れる.

$\boxed{\text{例}}$ x の整式 $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$ の約数のうち降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 である整式を総て求める. まず $P(x)$ を因数分解する. $P(1)=0$ なので因数定理により $P(x)$ は $x-1$ で割り切れる. $P(x)$ を $x-1$ で割ると整商は x^2-x-6 である.

$$
\begin{array}{r@{\,}r}
 & x^2-\ \ x-6 \\ \cline{2-2}
x-1 \,\big) & x^3-2x^2-5x+6 \\
 & \underline{x^3-\ \ x^2}\qquad\quad\ \ \\
 & -\ \ x^2-5x\quad\ \ \\
 & \underline{-\ \ x^2+\ \ x}\quad\ \ \\
 & -6x+6 \\
 & \underline{-6t+6} \\
 & 0
\end{array}
$$

例 x の整式 $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$ の約数のうち降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 である整式を総て求める．まず $P(x)$ を因数分解する． $P(1)=0$ なので因数定理により $P(x)$ は $x-1$ で割り切れる． $P(x)$ を $x-1$ で割ると整商は x^2-x-6 である．

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & x^2 & -x & -6 \\ \cline{2-5}
x-1 \,\big) & x^3 & -2x^2 & -5x & +6 \\
 & x^3 & -x^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & -x^2 & -5x & \\
 & & -x^2 & +x & \\ \cline{3-4}
 & & & -6x & +6 \\
 & & & -6t & +6 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

よって

$$P(x)=(x-1)(x^2-x-6)=(x-1)(x+2)(x-3)\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ x の整式 $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$ の約数のうち降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 である整式を総て求める．まず $P(x)$ を因数分解する． $P(1)=0$ なので因数定理により $P(x)$ は $x-1$ で割り切れる． $P(x)$ を $x-1$ で割ると整商は x^2-x-6 である．よって

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & -x & -6 & \\
\hline
x-1 & x^3 & -2x^2 & -5x & +6 \\
 & x^3 & -x^2 & & \\
\hline
 & & -x^2 & -5x & \\
 & & -x^2 & +x & \\
\hline
 & & & -6x & +6 \\
 & & & -6t & +6 \\
\hline
 & & & & 0
\end{array}
$$

$$P(x)=(x-1)(x^2-x-6)=(x-1)(x+2)(x-3)\ .$$

この等式より，$P(x)$ の約数で降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 である整式は次の 8 個である：1，$x-1$，$x+2$，$x-3$，$(x-1)(x+2)$，$(x-1)(x-3)$，$(x+2)(x-3)$，$(x-1)(x+2)(x-3)$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}2.5.8}$ x の整式 $P(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$ の約数のうち降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 である整式を総て求めよ.

$P(\quad) = 0$ なので因数定理により $P(x)$ は

で割り切れる. $P(x)$ を で割ると

整商は なので,

$$P(x) =$$

$$=\qquad\qquad\qquad\qquad .$$

$P(x)$ の約数で降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 である整式は次の 8 個である: , , , , $(\quad)(\quad)$, $(\quad)(\quad)$, $(\quad)(\quad)$, $(\quad)(\quad)(\quad)$.

問2.5.8 x の整式 $P(x)=x^3+2x^2-9x-18$ の約数のうち降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 である整式を総て求めよ.

$P(-2)=0$ なので因数定理により $P(x)$ は $x+2$ で割り切れる. $P(x)$ を $x+2$ で割ると整商は x^2-9 なので,

$$\begin{array}{rl} & x^2 \qquad\quad -9 \\ x+2 & \overline{)\,x^3+2x^2-9x-18} \\ & \underline{x^3+2x^2} \\ & -9x-18 \\ & \underline{-9x-18} \\ & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+2)(x^2-9) \\ &= (x+2)(x+3)(x-3)\ . \end{aligned}$$

$P(x)$ の約数で降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 である整式は次の 8 個である : 1, $x+2$, $x+3$, $x-3$, $(x+2)(x+3)$, $(x+2)(x-3)$, $(x+3)(x-3)$, $(x+2)(x+3)(x-3)$.

終

$\boxed{\text{例}}$ x の整式 $P(x) = 4x^3 - 7x - 3$ の約数のうち降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 である整式を総て求める.

$\boxed{\text{例}}$ x の整式 $P(x) = 4x^3 - 7x - 3$ の約数のうち降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 である整式を総て求める. まず $P(x)$ を因数分解する.
$P(-1) = 0$ なので因数定理により $P(x)$ は $x + 1$ で割り切れる.

例 x の整式 $P(x)=4x^3-7x-3$ の約数のうち降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 である整式を総て求める．まず $P(x)$ を因数分解する．$P(-1)=0$ なので因数定理により $P(x)$ は $x+1$ で割り切れる．$P(x)$ を $x+1$ で割ると整商は $4x^2-4x-3$ である．よって

$$P(x)=(x+1)(4x^2-4x-3)=(x+1)(2x+1)(2x-3)\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ x の整式 $P(x) = 4x^3 - 7x - 3$ の約数のうち降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 である整式を総て求める．まず $P(x)$ を因数分解する．$P(-1) = 0$ なので因数定理により $P(x)$ は $x+1$ で割り切れる．$P(x)$ を $x+1$ で割ると整商は $4x^2 - 4x - 3$ である．よって

$$P(x) = (x+1)(4x^2 - 4x - 3) = (x+1)(2x+1)(2x-3)\ .$$

この等式より，例えば $(x+1)(2x+1) = 2x^2 + 3x + 1$ は $P(x)$ の約数であるが，最高次の項の係数が 1 でない．

$\boxed{\text{例}}$ x の整式 $P(x)=4x^3-7x-3$ の約数のうち降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 である整式を総て求める．まず $P(x)$ を因数分解する．$P(-1)=0$ なので因数定理により $P(x)$ は $x+1$ で割り切れる．$P(x)$ を $x+1$ で割ると整商は $4x^2-4x-3$ である．よって

$$P(x) = (x+1)(4x^2-4x-3) = (x+1)(2x+1)(2x-3)\ .$$

この等式より，例えば $(x+1)(2x+1)=2x^2+3x+1$ は $P(x)$ の約数であるが，最高次の項の係数が 1 でない．それで次のように変形する：

$$\begin{aligned}P(x) &= (x+1)(2x+1)(2x-3) = (x+1)\times 2\cdot\frac{2x+1}{2}\times 2\cdot\frac{2x-3}{2}\\ &= 4(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ x の整式 $P(x) = 4x^3 - 7x - 3$ の約数のうち降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 である整式を総て求める．まず $P(x)$ を因数分解する．$P(-1) = 0$ なので因数定理により $P(x)$ は $x+1$ で割り切れる．$P(x)$ を $x+1$ で割ると整商は $4x^2 - 4x - 3$ である．よって

$$P(x) = (x+1)(4x^2 - 4x - 3) = (x+1)(2x+1)(2x-3) \ .$$

この等式より，例えば $(x+1)(2x+1) = 2x^2 + 3x + 1$ は $P(x)$ の約数であるが，最高次の項の係数が 1 でない．それで次のように変形する：

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+1)(2x+1)(2x-3) = (x+1) \times 2 \cdot \frac{2x+1}{2} \times 2 \cdot \frac{2x-3}{2} \\ &= 4(x+1)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) \ . \end{aligned}$$

この等式より，$P(x)$ の約数で降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 である整式は次の 8 個である：1，$x+1$，$x + \frac{1}{2}$，$x - \frac{3}{2}$，$(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$，$(x+1)\left(x-\frac{3}{2}\right)$，$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)$，$(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}2.5.9}$ x の整式 $P(x)=6x^3-x^2-10x-3$ の約数のうち降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 である整式を総て求めよ.

$P(x)$ を因数分解すると

$$P(x)=(\qquad)(\qquad\qquad\qquad)=(\qquad)(\qquad)(\qquad)$$
$$=6(\qquad)\Bigg(\qquad\Bigg)\Bigg(\qquad\Bigg).$$

$P(x)$ の約数で降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 である整式は次の 8 個である: $\quad,\quad\quad,\quad\quad,\quad\quad,\ (\qquad)\Bigg(\qquad\Bigg),\ (\qquad)\Bigg(\qquad\Bigg),$
$\Bigg(\qquad\Bigg)\Bigg(\qquad\Bigg),\ (\qquad)\Bigg(\qquad\Bigg)\Bigg(\qquad\Bigg).$

$\boxed{\text{問}2.5.9}$ x の整式 $P(x) = 6x^3 - x^2 - 10x - 3$ の約数のうち降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 である整式を総て求めよ.

$P(x)$ を因数分解すると

$$P(x) = (x+1)(6x^2 - 7x - 3) = (x+1)(2x-3)(3x+1)$$
$$= 6(x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) .$$

$P(x)$ の約数で降冪の順に整理すると最高次の項の係数が 1 である整式は次の 8 個である：1，$x+1$，$x - \frac{3}{2}$，$x + \frac{1}{3}$，$(x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$，$(x+1)\left(x + \frac{1}{3}\right)$，$\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$，$(x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$. $\boxed{\text{終}}$