2.6　整式の公約数・公倍数

まず整数の公約数・公倍数について述べる.

まず整数の公約数・公倍数について述べる.

整数 a と b とは 0 でないとする. a と b との公約数とは, a の約数でありかつ b の約数でもある整数のことである. a と b との公約数の中で最大の数を最大公約数という.

まず整数の公約数・公倍数について述べる.

整数 a と b とは 0 でないとする. a と b との公約数とは, a の約数でありかつ b の約数でもある整数のことである. a と b との公約数の中で最大の数を最大公約数という. a と b との公倍数とは, a の倍数でありかつ b の倍数でもある整数のことである. a と b との正の公倍数の中で最小の整数を最小公倍数という.

$\boxed{例}$ 168 と 180 との最大公約数と最小公倍数とを求める．まず 168 と 180 とを素因数分解する：

$$168 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \ , \qquad 180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \ .$$

168 と 180 との最大公約数は両方に共通に現れる因数の（現れる回数を含めた）総ての積である.

$$\begin{array}{rccccccccccccccc}
168 = & \boxed{2} & \times & \boxed{2} & \times & 2 & \times & \boxed{3} & & & & & \times & 7 & & \\
180 = & \boxed{2} & \times & \boxed{2} & & & \times & \boxed{3} & \times & 3 & \times & 5 & & & & \\
& \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & & & & & \\
\text{最大公約数は} & 2 & \times & 2 & & & \times & 3 & & & & & & & = 12
\end{array}$$

168 と 180 との最小公倍数は少なくとも一方に現れる因数の（現れる回数を含めた）総ての積である.

$$\begin{array}{rccccccccccccccc}
168 = & \boxed{2} & \times & \boxed{2} & \times & 2 & \times & \boxed{3} & & & & & \times & 7 & & \\
180 = & \boxed{2} & \times & \boxed{2} & & & \times & \boxed{3} & \times & 3 & \times & 5 & & & & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\text{最小公倍数は} & 2 & \times & 2 & \times & 2 & \times & 3 & \times & 3 & \times & 5 & \times & 7 & = 2520
\end{array}$$

168 と 180 とについて，最大公約数は 12 であり，最小公倍数は 2520 である.

$\boxed{\text{終}}$

整式 A と B とは 0 でないとする.

整式 A と B とは 0 でないとする．A と B との公約数とは，A の約数でありかつ B の約数でもある整式のことである．

整式 A と B とは 0 でないとする．A と B との公約数とは，A の約数でありかつ B の約数でもある整式のことである．A と B との公約数のなかで次数が最高の整式を A と B との最大公約数という．このように，整式の最大公約数という言葉の“最大”は次数が最大であるという意味である．

整式 A と B とは 0 でないとする．A と B との公約数とは，A の約数でありかつ B の約数でもある整式のことである．A と B との公約数のなかで次数が最高の整式を A と B との最大公約数という．このように，整式の最大公約数という言葉の“最大”は次数が最大であるという意味である．A と B との公倍数とは，A の倍数でありかつ B の倍数でもある整数のことである．

整式 A と B とは 0 でないとする．A と B との公約数とは，A の約数でありかつ B の約数でもある整式のことである．A と B との公約数のなかで次数が最高の整式を A と B との最大公約数という．このように，整式の最大公約数という言葉の“最大”は次数が最大であるという意味である．A と B との公倍数とは，A の倍数でありかつ B の倍数でもある整数のことである．A と B との 0 でない公倍数のなかで 次数が最低の整式を A と B との最小公倍数という．このように，整式の最小公倍数という言葉の“最小”は次数が最小であるという意味である．

$\boxed{\text{例}}$ x の整式 $(x+1)^3(x-2)$ と $(x+1)^2(x-2)(x+3)$ との最大公約数と最小公倍数とを求める. この方法は総ての因数の最高次の項の係数が 1 のときに適用できる.

$(x+1)^3(x-2)$ と $(x+1)^2(x-2)(x+3)$ との最大公約数は両方に共通に現れる因数の（現れる回数を含めた）総ての積である．

$$\begin{array}{rccccccccc} (x+1)^3(x-2) = & (x+1) & \times & (x+1) & \times & (x+1) & \times & (x-2) & & \\ (x+1)^2(x-2)(x+3) = & (x+1) & \times & (x+1) & & & \times & (x-2) & \times & (x+3) \\ & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ \text{最大公約数は} & (x+1) & \times & (x+1) & & & \times & (x-2) & & \end{array}$$

$(x+1)^3(x-2)$ と $(x+1)^2(x-2)(x+3)$ との最小公倍数は少なくとも一方に現れる因数の（現れる回数を含めた）総ての積である．

$$\begin{array}{rccccccccc} (x+1)^3(x-2) = & (x+1) & \times & (x+1) & \times & (x+1) & \times & (x-2) & & \\ (x+1)^2(x-2)(x+3) = & (x+1) & \times & (x+1) & & & \times & (x-2) & \times & (x+3) \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{最小公倍数は} & (x+1) & \times & (x+1) & \times & (x+1) & \times & (x-2) & \times & (x+3) \end{array}$$

整式 $(x+1)^3(x-2)$ と $(x+1)^2(x-2)(x+3)$ について，最大公約数は $(x+1)^2(x-2)$ であり，最小公倍数は $(x+1)^3(x-2)(x+3)$ である．

終

例 x の整式 x^2-5x+6 と $3x^2-7x-6$ との最大公約数と最小公倍数とを求める.

$\boxed{\text{例}}$ x の整式 x^2-5x+6 と $3x^2-7x-6$ との最大公約数と最小公倍数とを求める．各々の整式を因数分解する：

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)\ ,\qquad 3x^2-7x-6=(x-3)(3x+2)\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ x の整式 x^2-5x+6 と $3x^2-7x-6$ との最大公約数と最小公倍数とを求める．各々の整式を因数分解する：

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)\ , \qquad 3x^2-7x-6=(x-3)(3x+2)\ .$$

最大公約数は両方に共通に現れる因数の総ての積 $x-3$ であり，最小公倍数は少なくとも一方に現れる因数の総ての積 $(x-2)(x-3)(3x+2)$ である．

$\boxed{\text{例}}$ x の整式 x^2-5x+6 と $3x^2-7x-6$ との最大公約数と最小公倍数とを求める．各々の整式を因数分解する：

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)\ , \qquad 3x^2-7x-6=(x-3)(3x+2)\ .$$

最大公約数は両方に共通に現れる因数の総ての積 $x-3$ であり，最小公倍数は少なくとも一方に現れる因数の総ての積 $(x-2)(x-3)(3x+2)$ である．

　因数分解されている式は，特に要求されない限り，敢えて展開する必要はない． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問2.6.1}$ x の整式 x^2-6x+8 と $2x^2-7x+6$ との最大公約数と最小公倍数とを求めよ.

各々の整式を因数分解する:

$$x^2-6x+8 = (\qquad)(\qquad), \qquad 2x^2-7x+6 = (\qquad)(\qquad).$$

最大公約数は　　　　　であり, 最小公倍数は $(\qquad)(\qquad)(\qquad)$ である.

問2.6.1 x の整式 x^2-6x+8 と $2x^2-7x+6$ との最大公約数と最小公倍数とを求めよ.

各々の整式を因数分解する:

$$x^2-6x+8=(x-2)(x-4)\ , \qquad 2x^2-7x+6=(x-2)(2x-3)\ .$$

最大公約数は $x-2$ であり, 最小公倍数は $(x-2)(x-4)(2x-3)$ である. 終

例 x の整式 $3(x-1)(x+4)$ と $3(x-2)(x+4)$ との公約数を考える.

終

例 x の整式 $3(x-1)(x+4)$ と $3(x-2)(x+4)$ との公約数を考える．整式 $x+4$ も $3(x+4)$ も公約数であり，どちらも 1 次式なので，どちらも最大公約数である（公約数の次数は 1 が最高である）．最大公約数として簡単な方の $x+4$ をとればよい．

終

例 x の整式 $3(x-1)(x+4)$ と $3(x-2)(x+4)$ との公約数を考える．整式 $x+4$ も $3(x+4)$ も公約数であり，どちらも 1 次式なので，どちらも最大公約数である（公約数の次数は 1 が最高である）．最大公約数として簡単な方の $x+4$ をとればよい．次に，x の整式 $3(x-1)(x+4)$ と $3(x-2)(x+4)$ との公倍数を考える．

終

例 x の整式 $3(x-1)(x+4)$ と $3(x-2)(x+4)$ との公約数を考える．整式 $x+4$ も $3(x+4)$ も公約数であり，どちらも 1 次式なので，どちらも最大公約数である（公約数の次数は 1 が最高である）．最大公約数として簡単な方の $x+4$ をとればよい．次に，x の整式 $3(x-1)(x+4)$ と $3(x-2)(x+4)$ との公倍数を考える．x の整式 $3(x-1)(x-2)(x+4)$ は公倍数であり，これに $\dfrac{1}{3}$ を掛けた整式 $\dfrac{1}{3}3(x-1)(x-2)(x+4)=(x-1)(x-2)(x+4)$ もやはり公倍数である．どちらも 3 次式なので，どちらも最小公倍数である（公倍数の次数は 3 が最低である）．最小公倍数として簡単な方の $(x-1)(x-2)(x+4)$ をとればよい． 終

$\boxed{\text{例}}$ y の整式 $2y^2+6y-8$ と $4y^2-4y-8$ との最大公約数と最小公倍数とを求める.

$\boxed{例}$ y の整式 $2y^2+6y-8$ と $4y^2-4y-8$ との最大公約数と最小公倍数とを求める．各々の整式を因数分解する：

$$2y^2+6y-8=2(y^2+3y-4)=2(y-1)(y+4)\ ,$$

$$4y^2-4y-8=4(y^2-y-2)=4(y+1)(y-2)\ .$$

$\boxed{例}$ y の整式 $2y^2+6y-8$ と $4y^2-4y-8$ との最大公約数と最小公倍数とを求める．各々の整式を因数分解する：

$$2y^2+6y-8=2(y^2+3y-4)=2(y-1)(y+4)\ ,$$
$$4y^2-4y-8=4(y^2-y-2)=4(y+1)(y-2)\ .$$

定数の因数を無視して，y の整式 $(y-1)(y+4)$ と $(y+1)(y-2)$ との最大公約数・最小公倍数を考えればよい．

$\boxed{\text{例}}$ y の整式 $2y^2+6y-8$ と $4y^2-4y-8$ との最大公約数と最小公倍数とを求める．各々の整式を因数分解する：

$$2y^2+6y-8=2(y^2+3y-4)=2(y-1)(y+4)\ ,$$

$$4y^2-4y-8=4(y^2-y-2)=4(y+1)(y-2)\ .$$

定数の因数を無視して，y の整式 $(y-1)(y+4)$ と $(y+1)(y-2)$ との最大公約数・最小公倍数を考えればよい．最大公約数は 1 であり，最小公倍数は $(y+1)(y-1)(y-2)(y+4)$ である． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問2.6.2}$ y の整式 $4y^2-12y+8$ と $4y^2-2y-6$ との最大公約数と最小公倍数とを求めよ.

各々の整式を因数分解する:

$$4y^2-12y+8=$$

$$4y^2-2y-6=$$

従って,整式 $4y^2-12y+4$ と $4y^2-2y-6$ との最大公約数は　　であり,最小公倍数は　　　　　　　　　　である. $\boxed{終}$

$\boxed{問2.6.2}$ y の整式 $4y^2-12y+8$ と $4y^2-2y-6$ との最大公約数と最小公倍数とを求めよ.

各々の整式を因数分解する:

$$4y^2-12y+8=4(y^2-3y+2)=4(y-1)(y-2)\ ,$$

$$4y^2-2y-6=2(2y^2-y-3)=2(y+1)(2y-3)\ .$$

従って, 整式 $4y^2-12y+4$ と $4y^2-2y-6$ との最大公約数は 1 であり, 最小公倍数は $(y+1)(y-1)(y-2)(2y-3)$ である. $\boxed{終}$

例えば x の整式 $4(x+1)(x-2)$ と $4(x+2)(x-3)$ との公約数を考えると，両方に共通の 1 以上の次数の因数はない． このように，整式 A と整式 B との両方に共通の 1 以上の次数の因数がないとき，A と B とは互いに素であるという．