

2.7 分数式の計算

整式と整式との和・差・積は常に整式であった.

整式と整式との和・差・積は常に整式であった。しかし、整式を整式で割る場合、割り切れない（つまり剰余が 0 でない）ことがよくある。

整式と整式との和・差・積は常に整式であった。しかし、整式を整式で割る場合、割り切れない（つまり剰余が 0 でない）ことがよくある。そこで、例えば整数 8 を整数 3 で割るときの商を分数 $\frac{8}{3}$ で書き表すように、例えば整式 $3x+4$ を整式 $2x^2-5$ で割るときの商を分数の形の式 $\frac{3x+4}{2x^2-5}$ で表現する。

整式と整式との和・差・積は常に整式であった。しかし、整式を整式で割る場合、割り切れない（つまり剰余が 0 でない）ことがよくある。そこで、例えば整数 8 を整数 3 で割るときの商を分数 $\frac{8}{3}$ で書き表すように、例えば整式

$3x+4$ を整式 $2x^2-5$ で割るときの商を分数の形の式 $\frac{3x+4}{2x^2-5}$ で表現する。

任意の整式 A 及び 0 以外の任意の整式 B に対して、 A を B で割るときの商を分数の形の式 $\frac{A}{B}$ で表す。このような分数の形の式を分数式という。

分数式については次の性質が最も基本的である：整式 A, B, C について,
 $B \neq 0$, $C \neq 0$ のとき

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B} .$$

分数式については次の性質が最も基本的である：整式 A, B, C について， $B \neq 0$ ， $C \neq 0$ のとき

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B} .$$

このような変形を約分という．分数式の約束事として，分数式はできる限り約分する．

分数式については次の性質が最も基本的である：整式 A, B, C について， $B \neq 0$ ， $C \neq 0$ のとき

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B} .$$

このような変形を約分という．分数式の約束事として，分数式はできる限り約分する．

例 分数式 $\frac{21a^4b^2}{15ab^4}$ を約分する：

$$\frac{21a^4b^2}{15ab^4} = \frac{21 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b}{15 \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b} = \frac{7 \cdot a \cdot a \cdot a}{5 \cdot b \cdot b} = \frac{7a^3}{5b^2} .$$

終

問2.7.1 分数式 $\frac{12a^3bc^2}{18a^2b^3d}$ を約分せよ.

問2.7.1 分数式 $\frac{12a^3bc^2}{18a^2b^3d}$ を約分せよ.

$$\frac{12a^3bc^2}{18a^2b^3d} = \frac{2ac^2}{3b^2d} .$$

例 分数式 $\frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 5x - 3}$ を約分する.

例 分数式 $\frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 5x - 3}$ を約分する. 分子 $x^2 - 2x - 3$ と分母 $2x^2 - 5x - 3$ とを因数分解する.

$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3) , \quad 2x^2 - 5x - 3 = (x - 3)(2x + 1) .$$

例 分数式 $\frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 5x - 3}$ を約分する. 分子 $x^2 - 2x - 3$ と分母 $2x^2 - 5x - 3$ とを因数分解する.

$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3), \quad 2x^2 - 5x - 3 = (x - 3)(2x + 1).$$

分母と分子とで共通の因数 $(x - 3)$ を約す:

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 5x - 3} = \frac{(x + 1)(x - 3)}{(2x + 1)(x - 3)} = \frac{x + 1}{2x + 1}.$$

終

問2.7.2 以下の分数式について、約分できるならば約分せよ.

$$(1) \frac{y^2 - 5y + 6}{3y^2 - 4y - 4} .$$

$$(2) \frac{2t^2 - 11t - 6}{t^3 - 4t^2 - 12t} .$$

問2.7.2 以下の分数式について、約分できるならば約分せよ.

$$(1) \frac{y^2 - 5y + 6}{3y^2 - 4y - 4} .$$

$$(2) \frac{2t^2 - 11t - 6}{t^3 - 4t^2 - 12t} .$$

(1)

$$\frac{y^2 - 5y + 6}{3y^2 - 4y - 4} = \frac{(y - 3)(y - 2)}{(y - 2)(3y + 2)} = \frac{y - 3}{3y + 2} .$$

問2.7.2 以下の分数式について、約分できるならば約分せよ。

$$(1) \frac{y^2 - 5y + 6}{3y^2 - 4y - 4} .$$

$$(2) \frac{2t^2 - 11t - 6}{t^3 - 4t^2 - 12t} .$$

(1)

$$\frac{y^2 - 5y + 6}{3y^2 - 4y - 4} = \frac{(y - 3)(y - 2)}{(y - 2)(3y + 2)} = \frac{y - 3}{3y + 2} .$$

(2)

$$\frac{2t^2 - 11t - 6}{t^3 - 4t^2 - 12t} = \frac{(2t + 1)(t - 6)}{t(t + 2)(t - 6)} = \frac{2t + 1}{t(t + 2)} .$$

分数式の分母または分子の中にまた分数式が現れることがある。そのような分数式を繁分数式という。繁分数式は公式 $\frac{A}{B} = \frac{AC}{BC}$ を用いて簡単にする。

分数式の分母または分子の中にまた分数式が現れることがある。そのような分数式を繁分数式という。繁分数式は公式 $\frac{A}{B} = \frac{AC}{BC}$ を用いて簡単にする。

例 分数式 $\frac{x-2}{2+\frac{x+3}{x-1}}$ を計算して簡単にする。

分数式の分母または分子の中にまた分数式が現れることがある。そのような分数式を繁分数式という。繁分数式は公式 $\frac{A}{B} = \frac{AC}{BC}$ を用いて簡単にする。

例 分数式 $\frac{x-2}{2+\frac{x+3}{x-1}}$ を計算して簡単にする。分母の中の分数式の分母を払う

ために、分子と分母との両方に $x-1$ を掛ける。

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{2+\frac{x+3}{x-1}} &= \frac{(x-2)(x-1)}{\left(2+\frac{x+3}{x-1}\right)(x-1)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2(x-1)+\frac{x+3}{x-1}(x-1)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2x-2+x+3} \\ &= \frac{(x-1)(x-2)}{3x+1} .\end{aligned}$$

終

問2.7.3 分数式 $\frac{x+4}{3 - \frac{4x-5}{2x+1}}$ を計算して簡単にせよ.

問2.7.3 分数式 $\frac{x+4}{3-\frac{4x-5}{2x+1}}$ を計算して簡単にせよ.

$$\begin{aligned}\frac{x+4}{3-\frac{4x-5}{2x+1}} &= \frac{(x+4)(2x+1)}{\left(3-\frac{4x-5}{2x+1}\right)(2x+1)} = \frac{(x+4)(2x+1)}{3(2x+1)-\frac{4x-5}{2x+1}(2x+1)} \\ &= \frac{(x+4)(2x+1)}{6x+3-(4x-5)} = \frac{(x+4)(2x+1)}{2x+8} = \frac{(x+4)(2x+1)}{2(x+4)} \\ &= \frac{2x+1}{2} .\end{aligned}$$

例 分数式 $\frac{\frac{2}{x} + \frac{3}{x-2}}{4x+5}$ を計算して簡単にする.

例 分数式 $\frac{\frac{2}{x} + \frac{3}{x-2}}{4x+5}$ を計算して簡単にする. 分子の中の分数式 $\frac{2}{x}$ と $\frac{3}{x-2}$ との分母を払うために, 分子と分母との両方に $x(x-2)$ を掛ける.

例 分数式 $\frac{\frac{2}{x} + \frac{3}{x-2}}{4x+5}$ を計算して簡単にする. 分子の中の分数式 $\frac{2}{x}$ と $\frac{3}{x-2}$ との分母を払うために, 分子と分母との両方に $x(x-2)$ を掛ける.

$$\begin{aligned}\frac{\frac{2}{x} + \frac{3}{x-2}}{4x+5} &= \frac{x(x-2)\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x-2}\right)}{x(x-2)(4x+5)} \\ &= \frac{x(x-2)\frac{2}{x} + x(x-2)\frac{3}{x-2}}{x(x-2)(4x+5)} = \frac{2(x-2) + 3x}{x(x-2)(4x+5)} \\ &= \frac{5x-4}{x(x-2)(4x+5)} .\end{aligned}$$

終

問2.7.4 分数式 $\frac{\frac{5}{x-3} - \frac{3}{x}}{x^2+4}$ を計算して簡単にせよ.

問2.7.4 分数式 $\frac{\frac{5}{x-3} - \frac{3}{x}}{x^2+4}$ を計算して簡単にせよ.

$$\frac{\frac{5}{x-3} - \frac{3}{x}}{x^2+4} = \frac{x(x-3)\left(\frac{5}{x-3} - \frac{3}{x}\right)}{x(x-3)(x^2+4)} = \frac{5x - 3(x-3)}{x(x-3)(x^2+4)} = \frac{2x+9}{x(x-3)(x^2+4)} .$$