## 3.2　2次方程式の解

変数 $x$ に関する 2 次方程式とは次の形に整理できる方程式のことである：

$$ax^2+bx+c = 0 \quad (\ a, b, c \text{ は } x \text{ と無関係な定数で } a \neq 0\ ).$$

変数 $x$ に関する 2 次方程式とは次の形に整理できる方程式のことである：

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\, a, b, c \text{ は } x \text{ と無関係な定数で } a \neq 0 \,).$$

係数が実数である 2 次方程式を解くために次のような式変形が重要になる：$x$ の 2 次式 $x^2 \pm \square x$ に $x$ の係数 $\pm\square$ の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗 $\left(\frac{\square}{2}\right)^2$ を加えて，乗法公式 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$（複号同順）を適用すると，

$$x^2 \pm \square x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = x^2 \pm 2 \cdot \frac{\square}{2} x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = \left(x \pm \frac{\square}{2}\right)^2 \qquad \text{（複号同順）}.$$

$\boxed{例}$ 複素数を表す変数 $x$ に関する2次方程式 $2x^2+10x+9=0$ を解く.

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 $x$ に関する 2 次方程式 $2x^2+10x+9=0$ を解く．左辺を $x^2$ の項と $x$ の項とに右辺を定数にするために両辺から 9 を引く：

$$2x^2+10x=-9\ .$$

$\boxed{例}$ 複素数を表す変数 $x$ に関する2次方程式 $2x^2+10x+9=0$ を解く．左辺を $x^2$ の項と $x$ の項とに右辺を定数にするために両辺から $9$ を引く：

$$2x^2+10x=-9\ .$$

$x^2$ の係数を $1$ にするために両辺を $2$ で割る：

$$x^2+5x=-\frac{9}{2}\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 $x$ に関する 2 次方程式 $2x^2+10x+9=0$ を解く. 左辺を $x^2$ の項と $x$ の項とに右辺を定数にするために両辺から 9 を引く:

$$2x^2+10x=-9\ .$$

$x^2$ の係数を 1 にするために両辺を 2 で割る:

$$x^2+5x=-\frac{9}{2}\ .$$

左辺を $x^2+\square x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2=x^2+2\frac{\square}{2}x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2=\left(x+\frac{\square}{2}\right)^2$ の形にする.

例 複素数を表す変数 $x$ に関する 2 次方程式 $2x^2+10x+9=0$ を解く．左辺を $x^2$ の項と $x$ の項とに右辺を定数にするために両辺から $9$ を引く：

$$2x^2+10x=-9\ .$$

$x^2$ の係数を $1$ にするために両辺を $2$ で割る：

$$x^2+5x=-\frac{9}{2}\ .$$

左辺を $x^2+\square x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2=x^2+2\frac{\square}{2}x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2=\left(x+\frac{\square}{2}\right)^2$ の形にする．そのために左辺の $x$ の係数 $5$ の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗 $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ を両辺に足す：

$$x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=-\frac{9}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 $x$ に関する2次方程式 $2x^2+10x+9=0$ を解く．左辺を $x^2$ の項と $x$ の項とに右辺を定数にするために両辺から $9$ を引く：

$$2x^2+10x=-9 \ .$$

$x^2$ の係数を $1$ にするために両辺を $2$ で割る：

$$x^2+5x=-\frac{9}{2} \ .$$

左辺を $x^2+\square x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2=x^2+2\frac{\square}{2}x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2=\left(x+\frac{\square}{2}\right)^2$ の形にする．そのために左辺の $x$ の係数 $5$ の $\frac{1}{2}$ 倍の2乗 $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ を両辺に足す：

$$x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=-\frac{9}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2 \ .$$

この等式の左辺は $x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=x^2+2\cdot\frac{5}{2}\cdot x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2$ で，

$\boxed{例}$ 複素数を表す変数 $x$ に関する 2 次方程式 $2x^2+10x+9=0$ を解く．左辺を $x^2$ の項と $x$ の項とに右辺を定数にするために両辺から 9 を引く：

$$2x^2+10x=-9\ .$$

$x^2$ の係数を 1 にするために両辺を 2 で割る：

$$x^2+5x=-\frac{9}{2}\ .$$

左辺を $x^2+\square x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2=x^2+2\frac{\square}{2}x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2=\left(x+\frac{\square}{2}\right)^2$ の形にする．そのために左辺の $x$ の係数 5 の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗 $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ を両辺に足す：

$$x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=-\frac{9}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2\ .$$

この等式の左辺は $x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=x^2+2\cdot\frac{5}{2}\cdot x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2$ で，右辺は $-\frac{9}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2=-\frac{9}{2}+\frac{25}{4}=\frac{7}{4}$ なので，

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{7}{4}\ .$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{7}{4} \ .$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}\ .$$

**定理 1.8.2** "任意の実数 $a$ について $a = \sqrt{a}^{\,2}$ ." により $\dfrac{7}{4} = \sqrt{\dfrac{7}{4}}^{\,2} = \left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$ なので,

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2\ .$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{7}{4} \ .$$

定理 **1.8.2** “任意の実数 $a$ について $a = \sqrt{a}^{\,2}$ .” により $\dfrac{7}{4} = \sqrt{\dfrac{7}{4}}^{\,2} = \left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$ なので,

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 \ .$$

定理 **1.3.2** “任意の数 $a, b$ について, $a^2 = b^2$ ならば $a = \pm b$ .” により,

$$x+\frac{5}{2} = \pm\frac{\sqrt{7}}{2} \ .$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}\ .$$

定理 **1.8.2** “任意の実数 $a$ について $a=\sqrt{a}^{\,2}$ .” により $\frac{7}{4}=\sqrt{\frac{7}{4}}^{\,2}=\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$ なので,

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2\ .$$

定理 **1.3.2** “任意の数 $a,b$ について, $a^2=b^2$ ならば $a=\pm b$ .” により,

$$x+\frac{5}{2} = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}\ .$$

両辺から $\frac{5}{2}$ を引くと

$$x = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{5}{2} = \frac{-5\pm\sqrt{7}}{2} = -\frac{5\pm\sqrt{7}}{2}\ .$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{7}{4} \ .$$

定理 **1.8.2**“任意の実数 $a$ について $a = \sqrt{a}^{\,2}$ .”により $\dfrac{7}{4} = \sqrt{\dfrac{7}{4}}^{\,2} = \left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$ なので,

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 \ .$$

定理 **1.3.2**“任意の数 $a, b$ について, $a^2 = b^2$ ならば $a = \pm b$ .”により,

$$x+\frac{5}{2} = \pm\frac{\sqrt{7}}{2} \ .$$

両辺から $\dfrac{5}{2}$ を引くと

$$x = \pm\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{5}{2} = \frac{-5\pm\sqrt{7}}{2} = -\frac{5\pm\sqrt{7}}{2} \ .$$

このように等式 $2x^2+10x+9=0$ から等式 $x = -\dfrac{5\pm\sqrt{7}}{2}$ が導かれる.

このように等式 $2x^2+10x+9=0$ から等式 $x=-\dfrac{5\pm\sqrt{7}}{2}$ が導かれて，この間に現れる等式は元の方程式と同値である：

$$\begin{aligned}
2x^2+10x+9=0 &\iff 2x^2+10x=-9 \iff x^2+5x=-\frac{9}{2}\\
&\iff x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=-\frac{9}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2\\
&\iff x^2+2\cdot\frac{5}{2}\cdot x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{7}{4}\\
&\iff \left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\sqrt{\frac{7}{4}}^{\,2} \iff \left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2\\
&\iff x+\frac{5}{2}=\pm\frac{\sqrt{7}}{2} \iff x=-\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\\
&\iff x=-\frac{5\pm\sqrt{7}}{2}\ .
\end{aligned}$$

このように等式 $2x^2+10x+9=0$ から等式 $x=-\dfrac{5\pm\sqrt{7}}{2}$ が導かれて，この間に現れる等式は元の方程式と同値である：

$$
\begin{aligned}
2x^2+10x+9=0 &\iff 2x^2+10x=-9 \iff x^2+5x=-\frac{9}{2}\\
&\iff x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=-\frac{9}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2\\
&\iff x^2+2\cdot\frac{5}{2}\cdot x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{7}{4}\\
&\iff \left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\sqrt{\frac{7}{4}}^{\,2} \iff \left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2\\
&\iff x+\frac{5}{2}=\pm\frac{\sqrt{7}}{2} \iff x=-\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\\
&\iff x=-\frac{5\pm\sqrt{7}}{2}\ .
\end{aligned}
$$

故に，$x$ に関する方程式 $2x^2+10x+9=0$ を解くと $x=-\dfrac{5\pm\sqrt{7}}{2}$ ． $\boxed{\text{終}}$

例 複素数を表す変数 $x$ に関する 2 次方程式 $4x^2 - 12x + 29 = 0$ を解く.

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 $x$ に関する 2 次方程式 $4x^2 - 12x + 29 = 0$ を解く. 左辺を $x^2$ の項と $x$ の項とに右辺を定数にするために両辺から 29 を引く:

$$4x^2 - 12x = -29 \ .$$

$\boxed{例}$ 複素数を表す変数 $x$ に関する 2 次方程式 $4x^2 - 12x + 29 = 0$ を解く．左辺を $x^2$ の項と $x$ の項とに右辺を定数にするために両辺から 29 を引く：

$$4x^2 - 12x = -29 \ .$$

$x^2$ の係数を 1 にするために両辺を 4 で割る：

$$x^2 - 3x = -\frac{29}{4} \ .$$

$\boxed{例}$ 複素数を表す変数 $x$ に関する 2 次方程式 $4x^2-12x+29=0$ を解く．左辺を $x^2$ の項と $x$ の項とに右辺を定数にするために両辺から 29 を引く：

$$4x^2-12x = -29 \ .$$

$x^2$ の係数を 1 にするために両辺を 4 で割る：

$$x^2-3x = -\frac{29}{4} \ .$$

左辺を $x^2-\square x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2 = x^2+2\frac{\square}{2}x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2 = \left(x-\frac{\square}{2}\right)^2$ の形にする

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 $x$ に関する 2 次方程式 $4x^2 - 12x + 29 = 0$ を解く．左辺を $x^2$ の項と $x$ の項とに右辺を定数にするために両辺から $29$ を引く：

$$4x^2 - 12x = -29 \ .$$

$x^2$ の係数を $1$ にするために両辺を $4$ で割る：

$$x^2 - 3x = -\frac{29}{4} \ .$$

左辺を $x^2 - \square x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = x^2 + 2\frac{\square}{2}x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{\square}{2}\right)^2$ の形にするために，左辺の $x$ の係数の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗 $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ を両辺に足す：

$$x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{29}{4} + \frac{9}{4} \ .$$

$\boxed{例}$ 複素数を表す変数 $x$ に関する 2 次方程式 $4x^2-12x+29=0$ を解く．左辺を $x^2$ の項と $x$ の項とに右辺を定数にするために両辺から $29$ を引く：

$$4x^2-12x = -29 \ .$$

$x^2$ の係数を $1$ にするために両辺を $4$ で割る：

$$x^2-3x = -\frac{29}{4} \ .$$

左辺を $x^2-\square x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2 = x^2+2\frac{\square}{2}x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2 = \left(x-\frac{\square}{2}\right)^2$ の形にするために，左辺の $x$ の係数の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗 $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ を両辺に足す：

$$x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{29}{4}+\frac{9}{4} \ .$$

左辺は $x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2 = x^2-2\cdot\frac{3}{2}\cdot x+\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2$ で，

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 $x$ に関する 2 次方程式 $4x^2-12x+29=0$ を解く．左辺を $x^2$ の項と $x$ の項とに右辺を定数にするために両辺から 29 を引く：

$$4x^2-12x = -29 \ .$$

$x^2$ の係数を 1 にするために両辺を 4 で割る：

$$x^2-3x = -\frac{29}{4} \ .$$

左辺を $x^2-\square x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2=x^2+2\frac{\square}{2}x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2=\left(x-\frac{\square}{2}\right)^2$ の形にするために，左辺の $x$ の係数の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗 $\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$ を両辺に足す：

$$x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{29}{4}+\frac{9}{4} \ .$$

左辺は $x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=x^2-2\cdot\frac{3}{2}\cdot x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$ で，右辺は $-\frac{29}{4}+\frac{9}{4}=-5$ なので，

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 = -5 \ .$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 = -5 \quad .$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 = -5 \ .$$

**定理 1.8.2** "任意の実数 $a$ について $a=\sqrt{a}^{\ 2}$ ." により $-5=\sqrt{-5}^{\ 2}$ なので

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 = \sqrt{-5}^{\ 2} \ .$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -5 \ .$$

定理 **1.8.2** "任意の実数 $a$ について $a = \sqrt{a}^{\,2}$ ." により $-5 = \sqrt{-5}^{\,2}$ なので

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \sqrt{-5}^{\,2} \ .$$

負の実数に対する根号の値の定義 "$a < 0$ である実数 $a$ について $\sqrt{a} = \sqrt{-a}\,i$ ." により $\sqrt{-5} = \sqrt{5}\,i$ なので,

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = (\sqrt{5}\,i)^2 \ .$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 = -5\ .$$

定理 **1.8.2** "任意の実数 $a$ について $a=\sqrt{a}^{\,2}$ ." により $-5=\sqrt{-5}^{\,2}$ なので

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 = \sqrt{-5}^{\,2}\ .$$

負の実数に対する根号の値の定義 "$a<0$ である実数 $a$ について $\sqrt{a}=\sqrt{-a}\,i$ ." により $\sqrt{-5}=\sqrt{5}\,i$ なので,

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 = (\sqrt{5}\,i)^2\ .$$

定理 **1.3.2** "任意の数 $a,b$ について, $a^2=b^2$ ならば $a=\pm b$ ." により

$$x-\frac{3}{2}=\pm\sqrt{5}\,i\ ,$$

$$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{5}\,i\ .$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 = -5 \ .$$

定理 **1.8.2** “任意の実数 $a$ について $a=\sqrt{a}^{\,2}$ .” により $-5=\sqrt{-5}^{\,2}$ なので

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 = \sqrt{-5}^{\,2} \ .$$

負の実数に対する根号の値の定義“ $a<0$ である実数 $a$ について $\sqrt{a}=\sqrt{-a}\,i$ .” により $\sqrt{-5}=\sqrt{5}\,i$ なので,

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 = (\sqrt{5}\,i)^2 \ .$$

定理 **1.3.2** “任意の数 $a,b$ について, $a^2=b^2$ ならば $a=\pm b$ .” により

$$x-\frac{3}{2}=\pm\sqrt{5}\,i \ ,$$

$$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{5}\,i \ .$$

このように等式 $4x^2-12x+29=0$ から等式 $x=\dfrac{3}{2}\pm\sqrt{5}\,i$ が導かれる.

このように等式 $4x^2-12x+29=0$ から等式 $x=\dfrac{3}{2}\pm\sqrt{5}\,i$ が導かれ，この間に現れる等式は元の方程式と同値である：

$$
\begin{aligned}
4x^2-12x+29=0 \iff 4x^2-12x=-29 \iff x^2-3x=-\frac{29}{4} \\
&\iff x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{29}{4}+\left(\frac{3}{2}\right)^2 \\
&\iff x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=-5 \\
&\iff \left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\sqrt{-5}^{\,2} \iff \left(x-\frac{3}{2}\right)^2=(\sqrt{5}\,i)^2 \\
&\iff x-\frac{3}{2}=\pm\sqrt{5}\,i \\
&\iff x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{5}\,i\ .
\end{aligned}
$$

このように等式 $4x^2-12x+29=0$ から等式 $x=\dfrac{3}{2}\pm\sqrt{5}\,i$ が導かれ，この間に現れる等式は元の方程式と同値である：

$$\begin{aligned}
4x^2-12x+29=0 \iff 4x^2-12x=-29 \iff x^2-3x=-\frac{29}{4} \\
&\iff x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{29}{4}+\left(\frac{3}{2}\right)^2 \\
&\iff x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=-5 \\
&\iff \left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\sqrt{-5}^{\,2} \iff \left(x-\frac{3}{2}\right)^2=(\sqrt{5}\,i)^2 \\
&\iff x-\frac{3}{2}=\pm\sqrt{5}\,i \\
&\iff x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{5}\,i\ .
\end{aligned}$$

故に，$x$ に関する方程式 $4x^2-12x+29=0$ を解くと $x=\dfrac{3}{2}\pm\sqrt{5}\,i$ ． 終

例 複素数を表す変数 $x$ に関する方程式 $5x^2 = 2 - 6x$ を解く.

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 $x$ に関する方程式 $5x^2 = 2 - 6x$ を解く.

左辺を $x^2$ の項と $x$ の項とに右辺を定数にする : $5x^2 + 6x = 2$ .

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 $x$ に関する方程式 $5x^2 = 2 - 6x$ を解く.

左辺を $x^2$ の項と $x$ の項とに右辺を定数にする：$5x^2 + 6x = 2$ .

左辺の $x^2$ の係数で両辺を割る：$x^2 + \dfrac{6}{5}x = \dfrac{2}{5}$ .

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 $x$ に関する方程式 $5x^2 = 2 - 6x$ を解く.

左辺を $x^2$ の項と $x$ の項とに右辺を定数にする : $5x^2 + 6x = 2$ .

左辺の $x^2$ の係数で両辺を割る : $x^2 + \dfrac{6}{5}x = \dfrac{2}{5}$ .

左辺の $x$ の係数の $\dfrac{1}{2}$ 倍の $2$ 乗を両辺に足す : $x^2 + 2 \cdot \dfrac{3}{5}x + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{2}{5} + \dfrac{9}{25} = \dfrac{19}{25}$ .

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 $x$ に関する方程式 $5x^2 = 2 - 6x$ を解く.

左辺を $x^2$ の項と $x$ の項とに右辺を定数にする : $5x^2 + 6x = 2$ .

左辺の $x^2$ の係数で両辺を割る : $x^2 + \dfrac{6}{5}x = \dfrac{2}{5}$ .

左辺の $x$ の係数の $\dfrac{1}{2}$ 倍の $2$ 乗を両辺に足す : $x^2 + 2 \cdot \dfrac{3}{5}x + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{2}{5} + \dfrac{9}{25} = \dfrac{19}{25}$ .

両辺を $2$ 乗の形にする : $\left(x + \dfrac{3}{5}\right)^2 = \sqrt{\dfrac{19}{25}}^{\,2} = \left(\dfrac{\sqrt{19}}{5}\right)^2$ .

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 $x$ に関する方程式 $5x^2 = 2 - 6x$ を解く.

左辺を $x^2$ の項と $x$ の項とに右辺を定数にする : $5x^2 + 6x = 2$ .

左辺の $x^2$ の係数で両辺を割る : $x^2 + \frac{6}{5}x = \frac{2}{5}$ .

左辺の $x$ の係数の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗を両辺に足す : $x^2 + 2 \cdot \frac{3}{5}x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} + \frac{9}{25} = \frac{19}{25}$ .

両辺を 2 乗の形にする : $\left(x + \frac{3}{5}\right)^2 = \sqrt{\frac{19}{25}}^{\,2} = \left(\frac{\sqrt{19}}{5}\right)^2$ .

両辺を 2 乗を外す : 右辺に複号が現れる : $x + \frac{3}{5} = \pm\frac{\sqrt{19}}{5}$ .

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 $x$ に関する方程式 $5x^2 = 2 - 6x$ を解く.

左辺を $x^2$ の項と $x$ の項とに右辺を定数にする : $5x^2 + 6x = 2$ .

左辺の $x^2$ の係数で両辺を割る : $x^2 + \dfrac{6}{5}x = \dfrac{2}{5}$ .

左辺の $x$ の係数の $\dfrac{1}{2}$ 倍の $2$ 乗を両辺に足す : $x^2 + 2 \cdot \dfrac{3}{5}x + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{2}{5} + \dfrac{9}{25} = \dfrac{19}{25}$ .

両辺を $2$ 乗の形にする : $\left(x + \dfrac{3}{5}\right)^2 = \sqrt{\dfrac{19}{25}}^{\,2} = \left(\dfrac{\sqrt{19}}{5}\right)^2$ .

両辺を $2$ 乗を外す : 右辺に複号が現れる : $x + \dfrac{3}{5} = \pm\dfrac{\sqrt{19}}{5}$ .

移項する : $x = -\dfrac{3}{5} \pm \dfrac{\sqrt{19}}{5}$ .

$$x = -\frac{3 \pm \sqrt{19}}{5} .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問3.2.1}$ 複素数を表す変数 $x$ に関する方程式 $3x^2 = 1 - 5x$ を解け.

方程式 $3x^2 = 1 - 5x$ より,

$$3x^2 + 5x = \qquad ,$$

$$x^2 + \quad x = \qquad ,$$

$$x^2 + \quad x + \left(\qquad\right)^2 = \qquad\qquad = \qquad ,$$

$$\left(x + \quad\right)^2 = \sqrt{\qquad}^{\,2} = \left(\frac{\sqrt{\qquad}}{\qquad}\right)^2 ,$$

$$x + \quad = \pm\frac{\sqrt{\qquad}}{\qquad} ,$$

$$x = \qquad\qquad\qquad .$$

$\boxed{終}$

問3.2.1 複素数を表す変数 $x$ に関する方程式 $3x^2 = 1 - 5x$ を解け.

方程式 $3x^2 = 1 - 5x$ より,

$$3x^2 + 5x = 1 \ ,$$

$$x^2 + \frac{5}{3}x = \frac{1}{3} \ ,$$

$$x^2 + \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{25}{36} = \frac{37}{36} \ ,$$

$$\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \sqrt{\frac{37}{36}}^2 = \left(\frac{\sqrt{37}}{6}\right)^2 \ ,$$

$$x + \frac{5}{6} = \pm\frac{\sqrt{37}}{6} \ ,$$

$$x = -\frac{5 \pm \sqrt{37}}{6} \ .$$

終

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 $x$ に関する方程式 $\dfrac{1}{2}x^2+17=5x$ を解く.

例 複素数を表す変数 $x$ に関する方程式 $\dfrac{1}{2}x^2 + 17 = 5x$ を解く.

左辺を $x^2$ の項と $x$ の項とに右辺を定数にする：$\dfrac{1}{2}x^2 - 5x = -17$ .

例 複素数を表す変数 $x$ に関する方程式 $\frac{1}{2}x^2+17=5x$ を解く.

左辺を $x^2$ の項と $x$ の項とに右辺を定数にする：$\frac{1}{2}x^2-5x=-17$ .

左辺の $x^2$ の係数で両辺を割る：$x^2-10x=-34$ .

例 複素数を表す変数 $x$ に関する方程式 $\dfrac{1}{2}x^2+17=5x$ を解く.

左辺を $x^2$ の項と $x$ の項とに右辺を定数にする：$\dfrac{1}{2}x^2-5x=-17$ .

左辺の $x^2$ の係数で両辺を割る：$x^2-10x=-34$ .

左辺の $x$ の係数の $\dfrac{1}{2}$ 倍の $2$ 乗を両辺に足す：$x^2-2\cdot 5x+5^2=-34+25=-9$ .

例 複素数を表す変数 $x$ に関する方程式 $\frac{1}{2}x^2+17=5x$ を解く.

左辺を $x^2$ の項と $x$ の項とに右辺を定数にする : $\frac{1}{2}x^2-5x=-17$ .

左辺の $x^2$ の係数で両辺を割る : $x^2-10x=-34$ .

左辺の $x$ の係数の $\frac{1}{2}$ 倍の $2$ 乗を両辺に足す : $x^2-2\cdot 5x+5^2=-34+25=-9$ .

両辺を $2$ 乗の形にする : $(x-5)^2=\sqrt{-9}^2=(3i)^2$ .

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 $x$ に関する方程式 $\dfrac{1}{2}x^2+17=5x$ を解く.

左辺を $x^2$ の項と $x$ の項とに右辺を定数にする : $\dfrac{1}{2}x^2-5x=-17$ .

左辺の $x^2$ の係数で両辺を割る : $x^2-10x=-34$ .

左辺の $x$ の係数の $\dfrac{1}{2}$ 倍の $2$ 乗を両辺に足す : $x^2-2\cdot 5x+5^2=-34+25=-9$ .

両辺を $2$ 乗の形にする : $(x-5)^2=\sqrt{-9}^{\,2}=(3i)^2$ .

両辺を $2$ 乗を外す : 右辺に複号が現れる : $x-5=\pm 3i$ .

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 $x$ に関する方程式 $\frac{1}{2}x^2 + 17 = 5x$ を解く.

左辺を $x^2$ の項と $x$ の項とに右辺を定数にする : $\frac{1}{2}x^2 - 5x = -17$ .

左辺の $x^2$ の係数で両辺を割る : $x^2 - 10x = -34$ .

左辺の $x$ の係数の $\frac{1}{2}$ 倍の $2$ 乗を両辺に足す : $x^2 - 2 \cdot 5x + 5^2 = -34 + 25 = -9$ .

両辺を $2$ 乗の形にする : $(x-5)^2 = \sqrt{-9}^2 = (3i)^2$ .

両辺を $2$ 乗を外す : 右辺に複号が現れる : $x - 5 = \pm 3i$ .

移項する : $x = 5 \pm 3i$ . $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}3.2.2}$ 複素数を表す変数 $x$ に関する方程式 $3x^2+\dfrac{20}{3}=8x$ を解け.

方程式 $3x^2+\dfrac{20}{3}=8x$ より,

$$3x^2-8x=\qquad\qquad ,$$

$$x^2-\quad x=\qquad\qquad ,$$

$$x^2-\quad x+\left(\quad\right)^2=\qquad\qquad\qquad=\qquad ,$$

$$\left(x-\quad\right)^2=\sqrt{\qquad\quad}^{\,2}=\left(\qquad\quad\right)^2=\left(\quad\right)^2 ,$$

$$x-\quad=\pm\qquad ,$$

$$x=\qquad\qquad .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問3.2.2}$ 複素数を表す変数 $x$ に関する方程式 $3x^2+\dfrac{20}{3}=8x$ を解け.

方程式 $3x^2+\dfrac{20}{3}=8x$ より,

$$3x^2-8x=-\frac{20}{3}\ ,$$

$$x^2-\frac{8}{3}x=-\frac{20}{9}\ ,$$

$$x^2-\frac{8}{3}x+\left(\frac{4}{3}\right)^2=-\frac{20}{9}+\frac{16}{9}=-\frac{4}{9}\ ,$$

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2=\sqrt{-\frac{4}{9}}^{\,2}=\left(\sqrt{\frac{4}{9}}\,i\right)^2=\left(\frac{2}{3}i\right)^2\ ,$$

$$x-\frac{4}{3}=\pm\frac{2}{3}i\ ,$$

$$x=\frac{4\pm 2i}{3}\ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 実数を表す定数 $k$ に対して，実数を表す変数 $x$ に関する方程式 $x^2+(3k-2)x+6k-8=0$ を解く.

$\boxed{\text{例}}$ 実数を表す定数 $k$ に対して，実数を表す変数 $x$ に関する方程式 $x^2+(3k-2)x+6k-8=0$ を解く． $x$ の 2 次式 $x^2+(3k-2)x+6k-8$ は $k$ についてみると高々1 次の式なので， $k$ について整理して因数分解する：

$$\begin{aligned} x^2+(3k-2)x+6k-8 &= (3x+6)k+x^2-2x-8 \\ &= 3(x+2)k+(x+2)(x-4) = (x+2)(3k+x-4) \\ &= (x+2)(x+3k-4)\ . \end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数を表す定数 $k$ に対して，実数を表す変数 $x$ に関する方程式 $x^2+(3k-2)x+6k-8=0$ を解く． $x$ の 2 次式 $x^2+(3k-2)x+6k-8$ は $k$ についてみると高々1 次の式なので， $k$ について整理して因数分解する：

$$\begin{aligned}x^2+(3k-2)x+6k-8 &= (3x+6)k+x^2-2x-8\\ &= 3(x+2)k+(x+2)(x-4)=(x+2)(3k+x-4)\\ &= (x+2)(x+3k-4)\ .\end{aligned}$$

**定理 1.1.1** “任意の数 $a, b$ とについて， $ab=0 \iff a=0$ または $b=0$ ．”

により，

$$\begin{aligned}x^2+(3k-2)x+6k-8=0 &\iff (x+2)(x+3k-4)=0\\ &\iff x+2=0 \text{ または } x+3k-4=0\\ &\iff x=-2 \text{ または } x=-3k+4\ .\end{aligned}$$

例 実数を表す定数 $k$ に対して，実数を表す変数 $x$ に関する方程式 $x^2+(3k-2)x+6k-8=0$ を解く．$x$ の 2 次式 $x^2+(3k-2)x+6k-8$ は $k$ についてみると高々1 次の式なので，$k$ について整理して因数分解する：

$$\begin{aligned} x^2+(3k-2)x+6k-8 &= (3x+6)k+x^2-2x-8 \\ &= 3(x+2)k+(x+2)(x-4) = (x+2)(3k+x-4) \\ &= (x+2)(x+3k-4)\ . \end{aligned}$$

**定理 1.1.1** “任意の数 $a, b$ とについて，$ab=0 \iff a=0$ または $b=0$ .”
により，

$$\begin{aligned} x^2+(3k-2)x+6k-8=0 &\iff (x+2)(x+3k-4)=0 \\ &\iff x+2=0 \text{ または } x+3k-4=0 \\ &\iff x=-2 \text{ または } x=-3k+4\ . \end{aligned}$$

$x$ に関する方程式 $x^2+(3k-2)x+6k-8=0$ の解は $-2$ と $-3k+4$ とである． 終

$\boxed{\text{問}3.2.3}$ 実数を表す定数 $a$ に対して，実数を表す変数 $x$ に関する方程式 $2x^2 = (4a+1)x - 6a + 3$ を解け.

方程式 $2x^2 = (4a+1)x - 6a + 3$ を整理すると $x^2 - (\qquad\quad)x + \qquad\quad = 0$ .

この等式の左辺を $a$ について整理して因数分解する：

$$
\begin{aligned}
x^2 - (\qquad\quad)x + \qquad\quad &= (\qquad\qquad)a + \\
&= \qquad (\qquad\quad)a + (\qquad\quad)(\qquad\quad) \\
&= (\qquad\quad)(\qquad\qquad) \,.
\end{aligned}
$$

従って，方程式 $2x^2 - (4a+1)x + 6a - 3 = 0$ より，$(\qquad\quad)(\qquad\qquad) = 0$ ,

$\qquad\quad = 0$ または $\qquad\qquad\qquad = 0$ ，故に $x = \qquad$ または $x = \qquad\quad$ .

$\boxed{問 3.2.3}$ 実数を表す定数 $a$ に対して，実数を表す変数 $x$ に関する方程式 $2x^2=(4a+1)x-6a+3$ を解け.

方程式 $2x^2=(4a+1)x-6a+3$ を整理すると $2x^2-(4a+1)x+6a-3=0$ . この等式の左辺を $a$ について整理して因数分解する：

$$\begin{aligned}2x^2-(4a+1)x+6a-3&=(-4x+6)a+2x^2-x-3\\&=-2(2x-3)a+(x+1)(2x-3)\\&=(2x-3)(x-2a+1)\ .\end{aligned}$$

従って，方程式 $2x^2-(4a+1)x+6a-3=0$ より， $(2x-3)(x-2a+1)=0$ ，$2x-3=0$ または $x-2a+1=0$ ，故に $x=\dfrac{3}{2}$ または $x=2a-1$ . $\boxed{終}$

$\boxed{例}$ $3$ と $-2$ とを解とする $x$ に関する $2$ 次方程式を一つ求める.

例 $3$ と $-2$ とを解とする $x$ に関する $2$ 次方程式を一つ求める．$x$ に関する方程式の解が $3$ と $-2$ とであることは，方程式を解いた結果が "$x=3$ または $x=-2$" となることである．

$\boxed{例}$ $3$ と $-2$ とを解とする $x$ に関する 2 次方程式を一つ求める． $x$ に関する方程式の解が $3$ と $-2$ とであることは，方程式を解いた結果が "$x=3$ または $x=-2$" となることである．定理 **1.1.1** "任意の数 $a,b$ とについて，$a=0$ または $b=0$ $\iff$ $ab=0$ ．" により

$$
\begin{aligned}
x=3 \text{ または } x=-2 &\iff x-3=0 \text{ または } x+2=0 \\
&\iff (x-3)(x+2)=0 \\
&\iff x^2-x-6=0 \ .
\end{aligned}
$$

例 $3$ と $-2$ とを解とする $x$ に関する 2 次方程式を一つ求める． $x$ に関する方程式の解が $3$ と $-2$ とであることは，方程式を解いた結果が “ $x=3$ または $x=-2$ ” となることである． 定理 **1.1.1** “ 任意の数 $a, b$ とについて，$a=0$ または $b=0 \iff ab=0$ ．” により

$$\begin{aligned} x=3 \text{ または } x=-2 &\iff x-3=0 \text{ または } x+2=0 \\ &\iff (x-3)(x+2)=0 \\ &\iff x^2-x-6=0 \ . \end{aligned}$$

$3$ と $-2$ とを解とする $x$ に関する 2 次方程式の一つは $x^2-x-6=0$ である． 終

$\boxed{\text{問}3.2.4}$ $3+\sqrt{5}$ と $3-\sqrt{5}$ とを解とする $x$ に関する 2 次方程式を一つ求めよ．右辺は 0 にして，左辺は降冪の順に整理された $x$ の 2 次式にせよ．

　$x$ に関する方程式の解が $3+\sqrt{5}$ と $3-\sqrt{5}$ とであるとは，方程式を解いた結果が“ $\quad = \qquad\qquad$ または $\quad = \qquad\qquad$ ”となることである．

$$\qquad = \qquad\qquad \text{または} \quad = \qquad\qquad$$

$$\iff \qquad\qquad\qquad = 0 \ \text{ または } \qquad\qquad\qquad = 0$$

$$\iff (\qquad\qquad\qquad)(\qquad\qquad\qquad) = 0$$

$$\iff \qquad\qquad\qquad = 0 \ .$$

$3+\sqrt{5}$ と $3-\sqrt{5}$ とを解とする $x$ に関する 2 次方程式の一つは

$\qquad\qquad\qquad = 0$ である．

$\boxed{問3.2.4}$ $3+\sqrt{5}$ と $3-\sqrt{5}$ とを解とする $x$ に関する 2 次方程式を一つ求めよ．右辺は 0 にして，左辺は降冪の順に整理された $x$ の 2 次式にせよ．

$x$ に関する方程式の解が $3+\sqrt{5}$ と $3-\sqrt{5}$ とであるとは，方程式を解いた結果が “ $x=3+\sqrt{5}$ または $x=3-\sqrt{5}$ ” となることである．

$$
\begin{aligned}
& x=3+\sqrt{5} \text{ または } x=3-\sqrt{5} \\
\Longleftrightarrow\ & x-3-\sqrt{5}=0 \text{ または } x-3+\sqrt{5}=0 \\
\Longleftrightarrow\ & \left(x-3-\sqrt{5}\right)\left(x-3+\sqrt{5}\right)=0 \\
\Longleftrightarrow\ & x^2-6x+4=0\ .
\end{aligned}
$$

$3+\sqrt{5}$ と $3-\sqrt{5}$ とを解とする $x$ に関する 2 次方程式の一つは $x^2-6x+4=0$ である． $\boxed{終}$