3.3　2次方程式の解の公式

前節で述べた解法によって次の 2 次方程式の解の公式を導く.

定理（2 次方程式の解の公式） 実数を表す定数 a, b, c （ $a \neq 0$ ）について，複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ を解くと

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \ .$$

定数 a, b, c は実数で $a \neq 0$ とする.

定数 a, b, c は実数で $a \neq 0$ とする.

複素数を表す変数 x について $ax^2 + bx + c = 0$ と仮定する.

定数 a, b, c は実数で $a \neq 0$ とする.

複素数を表す変数 x について $ax^2 + bx + c = 0$ と仮定する. 両辺から c を引いて両辺を a で割る:

$$ax^2 + bx = -c \ ,$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \ .$$

定数 a, b, c は実数で $a \neq 0$ とする.

複素数を表す変数 x について $ax^2 + bx + c = 0$ と仮定する. 両辺から c を引いて両辺を a で割る：

$$ax^2 + bx = -c \ ,$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \ .$$

左辺を $x^2 + \square x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{\square}{2} x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{\square}{2}\right)^2$ の形にするために, 左辺の x の係数 $\frac{b}{a}$ の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ を両辺に足す：

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \ .$$

定数 a, b, c は実数で $a \neq 0$ とする.

複素数を表す変数 x について $ax^2 + bx + c = 0$ と仮定する. 両辺から c を引いて両辺を a で割る:

$$ax^2 + bx = -c \ ,$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \ .$$

左辺を $x^2 + \square x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{\square}{2} x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{\square}{2}\right)^2$ の形にするために, 左辺の x の係数 $\frac{b}{a}$ の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ を両辺に足す:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \ .$$

この等式の左辺は $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, 右辺は

$$-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \ .$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \ ;$$

この等式の左辺は $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ ，右辺は $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ なので，

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \ .$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \ ;$$

この等式の左辺は $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ，右辺は $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ なので，

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \ .$$

右辺も 2 乗の形に変形する．定理 **1.8.2** “ 任意の実数 a について $a=\sqrt{a}^{\,2}$ ．” により $b^2-4ac=\sqrt{b^2-4ac}^{\,2}$ なので，

$$\frac{b^2-4ac}{4a^2} = \frac{\sqrt{b^2-4ac}^{\,2}}{(2a)^2} = \left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 ,$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \ ;$$

この等式の左辺は $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ，右辺は $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ なので，

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \ .$$

右辺も 2 乗の形に変形する．定理 **1.8.2** “ 任意の実数 a について $a=\sqrt{a}^{\,2}$ ．” により $b^2-4ac=\sqrt{b^2-4ac}^{\,2}$ なので，

$$\frac{b^2-4ac}{4a^2} = \frac{\sqrt{b^2-4ac}^{\,2}}{(2a)^2} = \left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 ,$$

よって

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 .$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 .$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 .$$

定理 1.3.2 “任意の数 a, b について，$a^2 = b^2$ ならば $a = \pm b$．” により

$$x+\frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} ,$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 .$$

定理 1.3.2 “任意の数 a, b について, $a^2 = b^2$ ならば $a = \pm b$.” により

$$x+\frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} ,$$

よって

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{（複号同順）} .$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 .$$

定理 **1.3.2**“任意の数 a, b について，$a^2 = b^2$ ならば $a = \pm b$．”により

$$x+\frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} ,$$

よって

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{（複号同順）}.$$

このように等式 $ax^2+bx+c=0$ から等式 $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ が導かれるが，その途中の等式は元の方程式と同値である：

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c=0 \iff\ & ax^2+bx=-c \iff x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a} \\
\iff\ & x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
\iff\ & x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \\
\iff\ & \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}^{\,2} \\
\iff\ & \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 \\
\iff\ & x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \iff x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\
\iff\ & x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c=0 \iff ax^2+bx=-c &\iff x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a} \\
&\iff x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
&\iff x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \\
&\iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}^{\,2} \\
&\iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 \\
&\iff x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \iff x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\
&\iff x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ .
\end{aligned}
$$

故に，x に関する方程式 $ax^2+bx+c=0$ を解くと $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ．

例 複素数を表す変数 x に関する方程式 $2x^2+\sqrt{29}x+3=0$ を解く． 2 次方程式の解の公式により

$$x = \frac{-\sqrt{29} \pm \sqrt{\sqrt{29}^2 - 4\cdot 2\cdot 3}}{4} = \frac{-\sqrt{29} \pm \sqrt{29-24}}{4} = \frac{-\sqrt{29} \pm \sqrt{5}}{4} .$$

よって $x = -\dfrac{\sqrt{29} \pm \sqrt{5}}{4}$. 終

(負の数の根号の値の定義) $a < 0$ である実数 a について $\sqrt{a} = \sqrt{-a}\,i$.

例 複素数を表す変数 x に関する方程式 $3x^2 = 5x - 4$ を解く.

終

(負の数の根号の値の定義) $a<0$ である実数 a について $\sqrt{a}=\sqrt{-a}\,i$ ．

例 複素数を表す変数 x に関する方程式 $3x^2=5x-4$ を解く．方程式 $3x^2=5x-4$ を整理すると $3x^2-5x+4=0$ ． 2 次方程式の解の公式により，

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-48}}{6}=\frac{5\pm\sqrt{-23}}{6}=\frac{5\pm\sqrt{-(-23)}\,i}{6}=\frac{5\pm\sqrt{23}\,i}{6}\ .$$

終

$\boxed{問 3.3.1}$ 複素数を表す変数 x に関する方程式 $2(x^2+3)=3\sqrt{7}x$ を解け.

方程式 $2(x^2+3)=3\sqrt{7}x$ を整理すると $\qquad\qquad\qquad = 0$. 2 次方程式の解の公式により,

問3.3.1 複素数を表す変数 x に関する方程式 $2(x^2+3)=3\sqrt{7}x$ を解け.

方程式 $2(x^2+3)=3\sqrt{7}x$ を整理すると $2x^2-3\sqrt{7}x+6=0$. 2 次方程式の解の公式により,

$$x=\frac{3\sqrt{7}\pm\sqrt{63-48}}{4}=\frac{3\sqrt{7}\pm\sqrt{15}}{4} \quad .$$

終

$\boxed{\text{問}3.3.2}$ 複素数を表す変数 x に関する方程式 $\dfrac{\sqrt{3}x^2}{2}+2x=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ を解け.

方程式 $\dfrac{\sqrt{3}x^2}{2}+2x=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ を整理すると $\qquad\qquad\qquad = 0$. 2 次方程式の解の公式により,

$\boxed{\text{問}3.3.2}$ 複素数を表す変数 x に関する方程式 $\frac{\sqrt{3}x^2}{2}+2x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ を解け.

方程式 $\frac{\sqrt{3}x^2}{2}+2x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ を整理すると $3x^2+4\sqrt{3}x+4=0$. 2 次方程式の解の公式により,

$$x=\frac{-4\sqrt{3}\pm\sqrt{48-48}}{6}=-\frac{4\sqrt{3}}{6}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}3.3.3}$ 複素数を表す変数 x に関する方程式 $(x+1)(3x+1)=-2$ を解け.

方程式 $(x+1)(3x+1)=-2$ を整理すると $3x^2+4x+3=0$. 2 次方程式の解の公式により,

$$x = \frac{-4\pm\sqrt{16-36}}{6} = \frac{-4\pm\sqrt{20}\,i}{6} = \frac{-4\pm2\sqrt{5}\,i}{6} = \frac{-2\pm\sqrt{5}\,i}{3} .$$

定数 a, b, c は実数で $a \neq 0$ とする．複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解 $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ をなるべく簡単に計算するために，できるならば，根号の中の b^2 と $4ac$ とが絶対値が小さい整数になるように予め方程式を変形する．

定数 a, b, c は実数で $a \neq 0$ とする．複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解 $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ をなるべく簡単に計算するために，できるならば，根号の中の b^2 と $4ac$ とが絶対値が小さい整数になるように予め方程式を変形する．

例 複素数を表す変数 x に関する方程式 $9x^2 - 30x + 19 = 0$ を解く．このまま解の公式に代入すると計算が面倒になる．

定数 a,b,c は実数で $a \neq 0$ とする．複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ をなるべく簡単に計算するために，できるならば，根号の中の b^2 と $4ac$ とが絶対値が小さい整数になるように予め方程式を変形する．

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 x に関する方程式 $9x^2-30x+19=0$ を解く．このまま解の公式に代入すると計算が面倒になる．与えられた方程式の両辺を 6 で割ると $\dfrac{3}{2}x^2-5x+\dfrac{19}{6}=0$ ；2 次方程式の解の公式により

$$x=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{19}{6}}}{2\cdot\dfrac{3}{2}}=\frac{5\pm\sqrt{25-19}}{3}=\frac{5\pm\sqrt{6}}{3}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 3.3.3}$ 複素数を表す変数 x に関する方程式 $25x^2 - 70x + 46 = 0$ を解け．まず両辺を 10 で割ること．

$\boxed{問 3.3.3}$ 複素数を表す変数 x に関する方程式 $25x^2-70x+46=0$ を解け．まず両辺を 10 で割ること．

両辺を 10 で割ると $\dfrac{5}{2}x^2-7x+\dfrac{46}{10}=0$ ；2 次方程式の解の公式により

$$x=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4\cdot\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{46}{10}}}{2\cdot\dfrac{5}{2}}=\frac{7\pm\sqrt{49-46}}{5}=\frac{7\pm\sqrt{3}}{5}\ .$$

特に，定数 a, c が整数で $a \neq 0$ で，定数 b が偶数であるとき，複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は次のようになる：$b' = \dfrac{b}{2}$ は整数なので，両辺を 2 で割ると $\dfrac{a}{2}x^2 + b'x + \dfrac{c}{2} = 0$ ，2 次方程式の解の公式により

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^{\,2} - 4 \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{c}{2}}}{2 \cdot \dfrac{a}{2}} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^{\,2} - ac}}{a} .$$

係数に文字が含まれる方程式を解く.

例 実数を表す定数 a に対して, 複素数を表す変数 x に関する方程式 $(x+a)^2=a^2+3$ を解く. 方程式 $(x+a)^2=a^2+3$ を整理すると $x^2+2ax-3=0$. 2 次方程式の解の公式により,

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2a\pm\sqrt{4a^2+12}}{2}=\frac{-2a\pm\sqrt{4(a^2+3)}}{2}=\frac{-2a\pm2\sqrt{a^2+3}}{2} \\ &= -a\pm\sqrt{a^2+3} \ . \end{aligned}$$

終

$\boxed{\text{問}3.3.4}$ 実数を表す定数 k に対して，複素数を表す変数 x に関する方程式 $x^2-2x=k(x-1)$ を解け.

方程式 $x^2-2x=k(x-1)$ を整理すると $x^2-(k+2)x+k=0$. 2 次方程式の解の公式により,

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{k+2\pm\sqrt{(k+2)^2-4k}}{2} = \frac{k+2\pm\sqrt{k^2+4k+4-4k}}{2} \\
&= \frac{k+2\pm\sqrt{k^2+4}}{2} \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{終}}$