3.4　2次方程式の判別式

定数 a, b, c は実数を表し $a \neq 0$ とする．便宜的に $D = b^2 - 4ac$ とおく．

定数 a,b,c は実数を表し $a \neq 0$ とする．便宜的に $D=b^2-4ac$ とおく．

前節で述べたように，複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \quad と \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \quad と$$

である．そこで，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ には本来 2 個の解 $\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ と $\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ とがあると考える．

定数 a, b, c は実数を表し $a \neq 0$ とする．便宜的に $D = b^2 - 4ac$ とおく．

前節で述べたように，複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \quad と \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \quad と$$

である．そこで，2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ には本来 2 個の解 $\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ と $\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ とがあると考える． $\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ のとき，2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は一つだけであるが，これは本来 2 個ある解がたまたま重なって一つになったものと考える．このようにたまたま一つなるときの解を重解あるいは 2 重解という．

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解が重解である $\iff \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$

$$
2\text{次方程式 } ax^2+bx+c=0 \text{ の解が重解である} \iff \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}
$$

$$
\iff -b+\sqrt{D}=-b-\sqrt{D}
$$

$$
\iff 2\sqrt{D}=0
$$

$$
\iff \sqrt{D}=0\ ;
$$

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解が重解である

$$
\begin{aligned}
&\iff \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \\
&\iff -b+\sqrt{D}=-b-\sqrt{D} \\
&\iff 2\sqrt{D}=0 \\
&\iff \sqrt{D}=0 \ ;
\end{aligned}
$$

$\sqrt{D}=0$ ならば, $\sqrt{D}^2=0$, 定理 **1.8.2** により $\sqrt{D}^2=D$ なので $D=0$.

(定理 1.8.2) 任意の実数 a について $\sqrt{a}^2=a$.

$$2\text{次方程式}\ ax^2+bx+c=0\ \text{の解が重解である} \iff \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$
$$\iff -b+\sqrt{D}=-b-\sqrt{D}$$
$$\iff 2\sqrt{D}=0$$
$$\iff \sqrt{D}=0\ ;$$

$\sqrt{D}=0$ ならば，$\sqrt{D}^2=0$，定理 **1.8.2** により $\sqrt{D}^2=D$ なので $D=0$.

逆に，$D=0$ ならば $\sqrt{D}=\sqrt{0}=0$.

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解が重解である $\iff \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$

$$\iff -b+\sqrt{D} = -b-\sqrt{D}$$

$$\iff 2\sqrt{D} = 0$$

$$\iff \sqrt{D} = 0\ ;$$

$\sqrt{D}=0$ ならば, $\sqrt{D}^2=0$ ，定理 **1.8.2** により $\sqrt{D}^2=D$ なので $D=0$.
逆に, $D=0$ ならば $\sqrt{D}=\sqrt{0}=0$. よって

$$\sqrt{D} = 0 \iff D = 0\ .$$

$$
\begin{aligned}
2\text{次方程式}\ \ ax^2+bx+c=0\ \ \text{の解が重解である}\quad &\Longleftrightarrow\ \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\\
&\Longleftrightarrow\ -b+\sqrt{D}=-b-\sqrt{D}\\
&\Longleftrightarrow\ 2\sqrt{D}=0\\
&\Longleftrightarrow\ \sqrt{D}=0\ ;
\end{aligned}
$$

$\sqrt{D}=0$ ならば，$\sqrt{D}^2=0$，定理 **1.8.2** により $\sqrt{D}^2=D$ なので $D=0$．
逆に，$D=0$ ならば $\sqrt{D}=\sqrt{0}=0$．よって

$$
\sqrt{D}=0 \iff D=0\ .
$$

こうして次のことが分かる：

$$
2\text{次方程式}\ \ ax^2+bx+c=0\ \ \text{の解が重解である}\iff D=0\ .
$$

複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解が重解でないとき，つまり $\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a} \neq \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ のとき，方程式 $ax^2+bx+c=0$ は異なる 2 個の解を持つという.

複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解が重解でないとき，つまり $\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a} \neq \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ のとき，方程式 $ax^2+bx+c=0$ は異なる 2 個の解を持つという.

$$
\begin{aligned}
&\quad 2\text{ 次方程式 } ax^2+bx+c=0 \text{ は異なる } 2 \text{ 個の解を持つ} \\
\iff &\quad 2\text{ 次方程式 } ax^2+bx+c=0 \text{ の解は重解でない} \\
\iff &\quad D \neq 0\ .
\end{aligned}
$$

複素数を表す変数 x に関する2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \quad \text{と} \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \quad \text{と}$$

である.

複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \quad と \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \quad と$$

である． $D \geq 0$ のとき， $\sqrt{D}$ は実数なので，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解 $\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ と $\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ とはどちらも実数である．

複素数を表す変数 x に関する2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \quad と \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \quad と$$

である． $D \geq 0$ のとき， $\sqrt{D}$ は実数なので，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解 $\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ と $\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ とはどちらも実数である． $D<0$ のとき，**1.8** 節で述べた負の実数の根号の値の定義により $\sqrt{D}=i\sqrt{-D}$ ，

(負の実数の根号の値の定義) $a<0$ である任意の実数 a について

$\sqrt{a}=i\sqrt{-a}$ ．

複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \quad と \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \quad と$$

である．$D \geq 0$ のとき，$\sqrt{D}$ は実数なので，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解 $\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ と $\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ とはどちらも実数である．$D<0$ のとき，**1.8** 節で述べた負の実数の根号の値の定義により $\sqrt{D}=i\sqrt{-D}$ ，$-D>0$ なので定理 **1.6.4** により $\sqrt{-D}>0$ ，定理 **1.5.3** により $\sqrt{-D}\neq 0$ ；

(定理 1.6.4) 任意の実数 a について，$a>0$ ならば $\sqrt{a}>0$.

(定理 1.5.3) 任意の実数 a,b について，$a>b$ ならば $a\neq b$.

複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \quad と \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \quad と$$

である． $D \geq 0$ のとき， $\sqrt{D}$ は実数なので，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解 $\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ と $\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ とはどちらも実数である． $D<0$ のとき，**1.8** 節で述べた負の実数の根号の値の定義により $\sqrt{D}=i\sqrt{-D}$ ， $-D>0$ なので定理 **1.6.4** により $\sqrt{-D}>0$ ，定理 **1.5.3** により $\sqrt{-D}\neq 0$ ；定理 **1.9.3** により，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解

$$\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b+i\sqrt{-D}}{2a} \quad と \quad \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b-i\sqrt{-D}}{2a} \quad と$$

はどちらも虚数である．

(定理 **1.9.3**) 任意の実数 a,b について， $a+ib$ が虚数である $\iff b\neq 0$.

複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \quad と \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \quad と$$

である． $D \geq 0$ のとき， $\sqrt{D}$ は実数なので，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解 $\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ と $\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ とはどちらも実数である． $D<0$ のとき，**1.8** 節で述べた負の実数の根号の値の定義により $\sqrt{D}=i\sqrt{-D}$ ， $-D>0$ なので定理 **1.6.4** により $\sqrt{-D}>0$ ，定理 **1.5.3** により $\sqrt{-D}\neq 0$ ；定理 **1.9.3** により，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解

$$\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b+i\sqrt{-D}}{2a} \quad と \quad \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b-i\sqrt{-D}}{2a} \quad と$$

はどちらも虚数である．このように，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は，$D \geq 0$ のときどちらも実数であり， $D<0$ のときどちらも虚数である．

$D \geq 0$ ならば方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解はどちらも実数である.

$D < 0$ ならば方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解はどちらも虚数である.

$D \geq 0$ ならば方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解はどちらも実数である.

$D < 0$ ならば方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解はどちらも虚数である.

2 番目の述語の対偶（**0.6** 節参照）をとる：

“方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解がどちらも虚数” でなければ $D \not< 0$.

$D \geq 0$ ならば方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解はどちらも実数である.

$D < 0$ ならば方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解はどちらも虚数である.

2 番目の述語の対偶（**0.6** 節参照）をとる：

“方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解がどちらも虚数” でなければ $D \not< 0$.

方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解がどちらも実数ならば，“方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解がどちらも虚数” でないので， $D \not< 0$ ，法則 **1.5.2** により $D \geq 0$.

(法則 1.5.2) 実数 a と b とについて， $a \not< b \iff a \geq b$.

$D \geq 0$ ならば方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解はどちらも実数である.

$D < 0$ ならば方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解はどちらも虚数である.

2 番目の述語の対偶（**0.6** 節参照）をとる：

“方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解がどちらも虚数” でなければ $D \not< 0$.

方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解がどちらも実数ならば,“方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解がどちらも虚数” でないので, $D \not< 0$, 法則 **1.5.2** により $D \geq 0$. つまり次のようになる：

方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解がどちらも実数であるならば $D \geq 0$.

$D \geq 0$ ならば方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解はどちらも実数である.

$D < 0$ ならば方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解はどちらも虚数である.

2 番目の述語の対偶（**0.6** 節参照）をとる：

"方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解がどちらも虚数" でなければ $D \not< 0$.

方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解がどちらも実数ならば, "方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解がどちらも虚数" でないので, $D \not< 0$, 法則 **1.5.2** により $D \geq 0$. つまり次のようになる：

方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解がどちらも実数であるならば $D \geq 0$.

このようにして次のことが分かる：

$$D \geq 0 \iff 2\text{ 次方程式 } ax^2+bx+c=0 \text{ の解がどちらも実数である};$$

$$D < 0 \iff 2\text{ 次方程式 } ax^2+bx+c=0 \text{ の解がどちらも虚数である}.$$

このように，$D = b^2 - 4ac$ の符号を調べると，2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解が実数か虚数か，重解かどうか，が分かる．

定理 3.4 定数 a, b, c は実数を表し $a \neq 0$ とする．複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ について，

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ が異なる 2 個の実数解を持つ} \iff b^2 - 4ac > 0 \ ,$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ が 1 つの実数解（重解）を持つ} \iff b^2 - 4ac = 0 \ ,$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ が異なる 2 個の虚数解を持つ} \iff b^2 - 4ac < 0 \ .$$

このように，$D=b^2-4ac$ の符号を調べると，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解が実数か虚数か，重解かどうか，が分かる．

定理 3.4　定数 a,b,c は実数を表し $a \neq 0$ とする．複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ について，

$$ax^2+bx+c=0 \text{ が異なる2個の実数解を持つ} \iff b^2-4ac>0 \ ,$$

$$ax^2+bx+c=0 \text{ が1つの実数解（重解）を持つ} \iff b^2-4ac=0 \ ,$$

$$ax^2+bx+c=0 \text{ が異なる2個の虚数解を持つ} \iff b^2-4ac<0 \ .$$

定数 a,b,c が実数で $a \neq 0$ のとき，複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ に対して b^2-4ac を判別式という．

$\boxed{\text{例}}$ 実数を表す定数 c について以下のそれぞれのときに，複素数を表す変数 x に関する方程式 $3x^2-8x+c=0$ が，異なる 2 個の実数を解とするか，解が重解であるか，異なる 2 個の虚数を解とするか，調べる．

(1) $c=5$ のとき． **(2)** $c=7$ のとき．

$\boxed{\text{例}}$ 実数を表す定数 c について以下のそれぞれのときに，複素数を表す変数 x に関する方程式 $3x^2-8x+c=0$ が，異なる 2 個の実数を解とするか，解が重解であるか，異なる 2 個の虚数を解とするか，調べる.

(1) $c=5$ のとき.　　**(2)** $c=7$ のとき.

(1) $c=5$ のとき，方程式は $3x^2-8x+5=0$ ，この方程式の判別式の値は $(-8)^2-4\cdot3\cdot5=64-60>0$ ．故に $c=5$ のとき与えられた方程式は異なる 2 個の実数を解とする.

$\boxed{\text{例}}$ 実数を表す定数 c について以下のそれぞれのときに，複素数を表す変数 x に関する方程式 $3x^2-8x+c=0$ が，異なる 2 個の実数を解とするか，解が重解であるか，異なる 2 個の虚数を解とするか，調べる．

(1) $c=5$ のとき．　　**(2)** $c=7$ のとき．

(1) $c=5$ のとき，方程式は $3x^2-8x+5=0$ ，この方程式の判別式の値は $(-8)^2-4\cdot3\cdot5=64-60>0$ ．故に $c=5$ のとき与えられた方程式は異なる 2 個の実数を解とする．

(2) $c=7$ のとき，方程式は $3x^2-8x+7=0$ ，この方程式の判別式の値は $(-8)^2-4\cdot3\cdot7=64-84<0$ ．故に $c=7$ のとき与えられた方程式は異なる 2 個の虚数を解とする． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問} 3.4}$ 実数を表す定数 b について以下のそれぞれのときに，複素数を表す変数 x に関する方程式 $2x^2 + bx + 8 = 0$ が，異なる 2 個の実数を解とするか，解が重解であるか，異なる 2 個の虚数を解とするか，調べなさい．

(1) $b = 5$ のとき．　**(2)** $b = 8$ のとき．　**(3)** $b = 9$ のとき．

(1) $b = 5$ のとき，判別式の値は　　　　　　　　　　なので，与えられた方程式は

(2) $b = 8$ のとき，判別式の値は　　　　　　　　　　なので，与えられた方程式の解は

(3) $b = 9$ のとき，判別式の値は　　　　　　　　　　なので，与えられた方程式は

問3.4 実数を表す定数 b について以下のそれぞれのときに，複素数を表す変数 x に関する方程式 $2x^2+bx+8=0$ が，異なる2個の実数を解とするか，解が重解であるか，異なる2個の虚数を解とするか，調べなさい．

(1) $b=5$ のとき．　**(2)** $b=8$ のとき．　**(3)** $b=9$ のとき．

(1) $b=5$ のとき，判別式の値は $5^2-4\cdot 2\cdot 8<0$ なので，与えられた方程式は異なる2個の虚数を解とする．

(2) $b=8$ のとき，判別式の値は なので，与えられた方程式の解は

(3) $b=9$ のとき，判別式の値は なので，与えられた方程式は

$\boxed{\text{問}3.4}$ 実数を表す定数 b について以下のそれぞれのときに，複素数を表す変数 x に関する方程式 $2x^2+bx+8=0$ が，異なる 2 個の実数を解とするか，解が重解であるか，異なる 2 個の虚数を解とするか，調べなさい．

(1) $b=5$ のとき．　**(2)** $b=8$ のとき．　**(3)** $b=9$ のとき．

(1) $b=5$ のとき，判別式の値は $5^2-4\cdot 2\cdot 8<0$ なので，与えられた方程式は異なる 2 個の虚数を解とする．

(2) $b=8$ のとき，判別式の値は $8^2-4\cdot 2\cdot 8=0$ なので，与えられた方程式の解は重解である．

(3) $b=9$ のとき，判別式の値は　　　　　　　　なので，与えられた方程式は

$\boxed{問 3.4}$ 実数を表す定数 b についてそれぞれのときに，複素数を表す変数 x に関する方程式 $2x^2 + bx + 8 = 0$ が，異なる 2 個の実数を解とするか，解が重解であるか，異なる 2 個の虚数を解とするか，調べなさい．

(1) $b = 5$ のとき．　**(2)** $b = 8$ のとき．　**(3)** $b = 9$ のとき．

(1) $b = 5$ のとき，判別式の値は $5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 < 0$ なので，与えられた方程式は異なる 2 個の虚数を解とする．

(2) $b = 8$ のとき，判別式の値は $8^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = 0$ なので，与えられた方程式の解は重解である．

(3) $b = 9$ のとき，判別式の値は $9^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 > 0$ なので，与えられた方程式は異なる 2 個の実数を解とする．

$\boxed{終}$