3.6 整方程式

x の整式 $P(x)$ について，x に関する方程式で $P(x)=0$ の形に整理できるものを整方程式という．x の整式 $P(x)$ が n 次式であるとき，x に関する方程式で $P(x)=0$ の形に整理できるものを n 次方程式という．つまり，1 次方程式，2 次方程式，3 次方程式，$\cdots$ を併せて整方程式という．

3 以上の次数の整方程式を解く方法の一つは因数分解することである．そのために **2.4** 節で述べた因数定理をよく用いる：x の整式 $P(x)$ 及び任意の複素数 α について

$$P(\alpha) = 0 \iff 1\text{ 次式 } x - \alpha \text{ は } P(x) \text{ の因数である} \quad .$$

3 以上の次数の整方程式を解く方法の一つは因数分解することである．そのために **2.4** 節で述べた因数定理をよく用いる：x の整式 $P(x)$ 及び任意の複素数 α について

$$P(\alpha) = 0 \iff 1 \text{ 次式 } x - \alpha \text{ は } P(x) \text{ の因数である} \quad .$$

定数 α 及び x の整式 $P(x)$ について次のことがいえた：

$$\alpha \text{ が } x \text{ に関する方程式 } P(x) = 0 \text{ の解である} \iff P(\alpha) = 0 \quad .$$

3 以上の次数の整方程式を解く方法の一つは因数分解することである．そのために **2.4** 節で述べた因数定理をよく用いる：x の整式 $P(x)$ 及び任意の複素数 α について

$$P(\alpha) = 0 \iff 1\text{ 次式 } x-\alpha \text{ は } P(x) \text{ の因数である} \quad .$$

定数 α 及び x の整式 $P(x)$ について次のことがいえた：

$$\alpha \text{ が } x \text{ に関する方程式 } P(x)=0 \text{ の解である} \iff P(\alpha) = 0 \quad .$$

故に，任意の整式 $P(x)$ 及び任意の複素数 α について次の **3** 条件は互いに同値になる：

(1) $P(\alpha) = 0$ ；

(2) $x-\alpha$ は $P(x)$ の因数である；

(3) α は x の方程式 $P(x)=0$ の解である．

$\boxed{\text{例}}$ 因数分解によって複素数を表す変数 x に関する 3 次方程式 $x^3 - x^2 - 7x - 5 = 0$ を解く.

$\boxed{\text{例}}$ 因数分解によって複素数を表す変数 x に関する3次方程式 $x^3-x^2-7x-5=0$ を解く． $x=-1$ のとき $x^3-x^2-7x-5=0$ なので，因数定理により，整式 x^3-x^2-7x-5 は $x+1$ で割り切れる．実際に割ると整商は x^2-2x-5 である：

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & x^2 & -\,2x & -\,5 \\ \cline{2-5}
x+1 & \big) \; x^3 - & x^2 & -\,7x & -\,5 \\
 & x^3 - & x^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & -\,2x^2 & -\,7x & \\
 & & -\,2x^2 & -\,2x & \\ \cline{3-4}
 & & & -\,5x & -\,5 \\
 & & & -\,5x & -\,5 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

$$x^3-x^2-7x-5=(x+1)(x^2-x-5)\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 因数分解によって複素数を表す変数 x に関する3次方程式 $x^3-x^2-7x-5=0$ を解く．$x=-1$ のとき $x^3-x^2-7x-5=0$ なので，因数定理により，整式 x^3-x^2-7x-5 は $x+1$ で割り切れる．実際に割ると整商は x^2-2x-5 である：

$$
\begin{array}{r@{\,}r}
 & x^2 - 2x - 5 \\ \cline{2-2}
x+1 \,\big) & x^3 - x^2 - 7x - 5 \\
 & x^3 - x^2 \phantom{{}-7x-5} \\ \cline{2-2}
 & -2x^2 - 7x \phantom{{}-5} \\
 & -2x^2 - 2x \phantom{{}-5} \\ \cline{2-2}
 & -5x - 5 \\
 & -5x - 5 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

$$x^3-x^2-7x-5=(x+1)(x^2-x-5)\ .$$

定理 **1.1.1**“任意の数 a, b について，$ab=0 \iff a=0$ または $b=0$．”により，

$$
\begin{aligned}
x^3-x^2-7x-5=0 &\iff (x+1)(x^2-2x-5)=0 \\
&\iff x+1=0 \text{ または } x^2-2x-5=0 \quad .
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 7x - 5 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (x+1)(x^2 - 2x - 5) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x + 1 = 0 \ \text{または} \ x^2 - 2x - 5 = 0 \qquad . \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x^3 - x^2 - 7x - 5 = 0 \iff& (x+1)(x^2-2x-5) = 0 \\
\iff& x+1 = 0 \text{ または } x^2 - 2x - 5 = 0 \quad .
\end{aligned}
$$

2 次方程式 $x^2 - 2x - 5 = 0$ を解く： $\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{5}{2} = 0$ なので，解の公式により，

$$
x = \frac{1 \pm \sqrt{1+5}}{1} = 1 \pm \sqrt{6} \ ;
$$

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 7x - 5 = 0 &\iff (x+1)(x^2-2x-5) = 0 \\ &\iff x+1 = 0 \text{ または } x^2 - 2x - 5 = 0 \quad . \end{aligned}$$

2 次方程式 $x^2 - 2x - 5 = 0$ を解く： $\dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{5}{2} = 0$ なので，解の公式により，

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+5}}{1} = 1 \pm \sqrt{6} \;;$$

よって

$$x^2 + 2x - 5 = 0 \iff x = 1 + \sqrt{6} \text{ または } x = 1 - \sqrt{6} \;.$$

$$x^3 - x^2 - 7x - 5 = 0 \iff (x+1)(x^2 - 2x - 5) = 0$$

$$\iff x + 1 = 0 \text{ または } x^2 - 2x - 5 = 0 \quad .$$

2 次方程式 $x^2 - 2x - 5 = 0$ を解く： $\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{5}{2} = 0$ なので，解の公式により，

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+5}}{1} = 1 \pm \sqrt{6} \ ;$$

よって

$$x^2 + 2x - 5 = 0 \iff x = 1 + \sqrt{6} \text{ または } x = 1 - \sqrt{6} \ .$$

故に

$$x^3 - x^2 - 7x - 5 = 0 \iff x + 1 = 0 \text{ または } x^2 - 2x - 5 = 0$$

$$\iff x = -1 \text{ または } x = 1 + \sqrt{6} \text{ または } x = 1 - \sqrt{6} \ .$$

$$x^3-x^2-7x-5=0 \iff (x+1)(x^2-2x-5)=0$$
$$\iff x+1=0 \text{ または } x^2-2x-5=0 \quad .$$

2 次方程式 $x^2-2x-5=0$ を解く： $\dfrac{1}{2}x^2-x-\dfrac{5}{2}=0$ なので，解の公式により，

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+5}}{1} = 1 \pm \sqrt{6} \ ;$$

よって

$$x^2+2x-5=0 \iff x = 1+\sqrt{6} \text{ または } x = 1-\sqrt{6} \ .$$

故に

$$x^3-x^2-7x-5=0 \iff x+1=0 \text{ または } x^2-2x-5=0$$
$$\iff x=-1 \text{ または } x=1+\sqrt{6} \text{ または } x=1-\sqrt{6} \ .$$

つまり，3 次方程式 $x^3-x^2-7x-5=0$ の解は -1 と $1+\sqrt{6}$ と $1-\sqrt{6}$ との 3 個である．

終

一般的に議論する．x の 3 次式 $A(x)$ に対して，$A(\alpha)=0$ となる複素数 α が分かったとする．すると，因数定理により，$A(x)$ は $x-\alpha$ で割り切れる．$A(x)$ を $x-\alpha$ で割った整商を $B(x)$ とおく：

$$A(x) = (x-\alpha)B(x)\ .$$

一般的に議論する．x の 3 次式 $A(x)$ に対して，$A(\alpha)=0$ となる複素数 α が分かったとする．すると，因数定理により，$A(x)$ は $x-\alpha$ で割り切れる．$A(x)$ を $x-\alpha$ で割った整商を $B(x)$ とおく：

$$A(x) = (x-\alpha)B(x) \ .$$

定理 **1.1**“任意の数 a, b について，$ab=0 \iff a=0$ または $b=0$ ．”により

$$A(x)=0 \iff (x-\alpha)B(x)=0 \iff x-\alpha=0 \text{ または } B(x)=0 \ .$$

一般的に議論する．x の 3 次式 $A(x)$ に対して，$A(\alpha)=0$ となる複素数 α が分かったとする．すると，因数定理により，$A(x)$ は $x-\alpha$ で割り切れる．$A(x)$ を $x-\alpha$ で割った整商を $B(x)$ とおく：

$$A(x) = (x-\alpha)B(x) \ .$$

定理 **1.1**“任意の数 a,b について，$ab=0 \iff a=0$ または $b=0$.” により

$$A(x) = 0 \iff (x-\alpha)B(x) = 0 \iff x-\alpha = 0 \text{ または } B(x) = 0 \quad .$$

3 次式 $A(x)$ を 1 次式 $x-\alpha$ で割った整商 $B(x)$ は 2 次式である．従って方程式 $B(x)=0$ は 2 次方程式である．この 2 次方程式を解くと，3 次方程式 $A(x)=0$ の α 以外の解を求めることができる．

例 複素数を表す変数 t に関する3次方程式 $t^3 - t + 6 = 0$ を解く.

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 t に関する3次方程式 $t^3-t+6=0$ を解く． $t=-2$ のとき $t^3-t+6=0$ なので，因数定理により，整式 t^3-t+6 は $t+2$ で割り切れる：

$$t^3-t+6=(t+2)(t^2-2t+3)\ .$$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & t^2 & -\,2t & +\,3 & \\
\hline
t+2 & t^3 & & -\ \ t & +\,6 \\
 & t^3 & +\,2t^2 & & \\
\cline{2-3}
 & & -\,2t^2 & -\ \ t & \\
 & & -\,2t^2 & -\,4t & \\
\cline{3-4}
 & & & 3t & +\,6 \\
 & & & 3t & +\,6 \\
\cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 t に関する 3 次方程式 $t^3 - t + 6 = 0$ を解く. $t = -2$ のとき $t^3 - t + 6 = 0$ なので, 因数定理により, 整式 $t^3 - t + 6$ は $t + 2$ で割り切れる :

$$t^3 - t + 6 = (t+2)(t^2 - 2t + 3) \ .$$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & & t^2 & -\,2t & +\,3 \\ \cline{2-5}
t+2\,\Big) & t^3 & & -\ t & +\,6 \\
 & t^3 & +\,2t^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & -\,2t^2 & -\ t & \\
 & & -\,2t^2 & -\,4t & \\ \cline{3-4}
 & & & 3t & +\,6 \\
 & & & 3t & +\,6 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

方程式 $t^3 - t + 6 = 0$ より,

$$(t+2)(t^2 - 2t + 3) = 0 \ ,$$

$$t + 2 = 0 \ \text{または} \ t^2 - 2t + 3 = 0 \ .$$

$\boxed{例}$ 複素数を表す変数 t に関する 3 次方程式 $t^3 - t + 6 = 0$ を解く． $t = -2$ のとき $t^3 - t + 6 = 0$ なので，因数定理により，整式 $t^3 - t + 6$ は $t + 2$ で割り切れる：

$$
t^3 - t + 6 = (t+2)(t^2 - 2t + 3) \ .
$$

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & t^2 & -\,2t & +\,3 \\
\cline{2-5}
t+2 & \big)\, t^3 & & -\ \ t & +\,6 \\
 & t^3 & +\,2t^2 & & \\
\cline{2-3}
 & & -\,2t^2 & -\ \ t & \\
 & & -\,2t^2 & -\,4t & \\
\cline{3-4}
 & & & 3t & +\,6 \\
 & & & 3t & +\,6 \\
\cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

方程式 $t^3 - t + 6 = 0$ より，

$$
(t+2)(t^2 - 2t + 3) = 0 \ ,
$$

$$
t + 2 = 0 \ \text{または}\ t^2 - 2t + 3 = 0 \ .
$$

2 次方程式 $t^2 - 2t + 3 = 0$ を解く：
$\dfrac{1}{2}t^2 - t + \dfrac{3}{2} = 0$ なので，解の公式により，

$$
t = \frac{1 \pm \sqrt{1-3}}{1} = 1 \pm \sqrt{-2} = 1 \pm \sqrt{2}i \ .
$$

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 t に関する 3 次方程式 $t^3 - t + 6 = 0$ を解く． $t = -2$ のとき $t^3 - t + 6 = 0$ なので，因数定理により，整式 $t^3 - t + 6$ は $t + 2$ で割り切れる：

$$t^3 - t + 6 = (t+2)(t^2 - 2t + 3) \ .$$

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & t^2 & -\,2t & +\,3 \\ \cline{2-5}
t+2\,\big) & t^3 & & -\,t & +\,6 \\
 & t^3 & +\,2t^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & -\,2t^2 & -\,t & \\
 & & -\,2t^2 & -\,4t & \\ \cline{3-4}
 & & & 3t & +\,6 \\
 & & & 3t & +\,6 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

方程式 $t^3 - t + 6 = 0$ より，

$$(t+2)(t^2 - 2t + 3) = 0 \ ,$$

$$t + 2 = 0 \ \text{または} \ t^2 - 2t + 3 = 0 \ .$$

2 次方程式 $t^2 - 2t + 3 = 0$ を解く：
$\dfrac{1}{2}t^2 - t + \dfrac{3}{2} = 0$ なので，解の公式により，

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1-3}}{1} = 1 \pm \sqrt{-2} = 1 \pm \sqrt{2}i \ .$$

故に，与えられた方程式の解は $-2, 1 \pm \sqrt{2}i$ である． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問3.6.1}$ 複素数を表す変数 x に関する方程式 $3x^3 = x(5x+2)$ を解け.

方程式 $3x^3 = x(5x+2)$ より

$$(\qquad\qquad\qquad) = 0 \ ,$$

$$= 0 \ \text{または} \qquad\qquad = 0 \ .$$

方程式 $\qquad\qquad = 0$ を解くと $x = \quad , \qquad .$ 故に与えられた方程式の解は

と　と　　とである.

$\boxed{問3.6.1}$ 複素数を表す変数 x に関する方程式 $3x^3 = x(5x+2)$ を解け.

方程式 $3x^3 = x(5x+2)$ より

$$x(3x^2-5x-2)=0 \ ,$$

$$x=0 \ \text{または}\ 3x^2-5x-2=0 \ .$$

方程式 $3x^2-5x-2=0$ を解くと $x=2,-\dfrac{1}{3}$. 故に与えられた方程式の解は 0 と 2 と $-\dfrac{1}{3}$ とである. $\boxed{終}$

$\boxed{問3.6.2}$ 複素数を表す変数 x に関する方程式 $2x^2(x-1)=7x-6$ を解け.

方程式 $2x^2(x-1)=7x-6$ を整理すると $2x^3-2x^2-7x+6=0$. x の 3 次式 は x で割り切れる :

$$2x^3-2x^2-7x+6=(x\qquad)(\qquad\qquad\qquad)\ .$$

方程式 $2x^3-2x^2-7x+6=0$ より

$$(x\qquad)(\qquad\qquad\qquad)=0\ ,$$

$$x\qquad=0 \text{ または } \qquad\qquad\qquad=0\ .$$

方程式 $\qquad\qquad=0$ を解く : $\qquad\qquad=0$ なので

$$x=$$

故に与えられた方程式の解は , であ る.

$\boxed{\text{問}3.6.2}$ 複素数を表す変数 x に関する方程式 $2x^2(x-1)=7x-6$ を解け.

方程式 $2x^2(x-1)=7x-6$ を整理すると $2x^3-2x^2-7x+6=0$. x の 3 次式 $2x^3-2x^2-7x+6$ は $x-2$ で割り切れる:

$$2x^3-2x^2-7x+6=(x-2)(2x^2+2x-3)\ .$$

方程式 $2x^3-2x^2-7x+6=0$ より

$$(x-2)(2x^2+2x-3)=0\ ,$$

$$x-2=0\ \text{または}\ 2x^2+2x-3=0\ .$$

方程式 $2x^2+2x-3=0$ を解く: $x^2+x-\dfrac{3}{2}=0$ なので

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{1+6}}{2}=-\frac{1\pm\sqrt{7}}{2}\ .$$

故に与えられた方程式の解は $2,-\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{2}$ である. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}3.6.3}$ 複素数を表す変数 x に関する方程式 $x^3 = -8$ を解け.

方程式 $x^3 = -8$ を整理すると $x^3 + 8 = 0$. 整式 $x^3 + 8$ は x で割り切れる:

$$x^3 + 8 = (x \qquad)(\qquad\qquad\qquad) \; .$$

方程式 $x^3 + 8 = 0$ より,

$$(x \qquad)(\qquad\qquad\qquad) = 0 \; ,$$

$$x \qquad = 0 \text{ または } \qquad\qquad\qquad = 0 \; .$$

方程式 $x^2 - 2x + 4 = 0$ を解く: $\qquad\qquad\qquad = 0$ なので

$$x =$$

故に与えられた方程式の解は , である.

$\boxed{\text{問}3.6.3}$ 複素数を表す変数 x に関する方程式 $x^3 = -8$ を解け.

方程式 $x^3 = -8$ を整理すると $x^3 + 8 = 0$. 整式 $x^3 + 8$ は $x + 2$ で割り切れる :

$$x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4) \ .$$

方程式 $x^3 + 8 = 0$ より,

$$(x+2)(x^2 - 2x + 4) = 0 \ ,$$

$$x + 2 = 0 \ \text{または} \ x^2 - 2x + 4 = 0 \ .$$

方程式 $x^2 - 2x + 4 = 0$ を解く : $\dfrac{1}{2}x^2 - x + 2 = 0$ なので

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{1} = 1 \pm \sqrt{3}\,i \ .$$

故に与えられた方程式の解は $-2, 1 \pm \sqrt{3}\,i$ である. $\boxed{\text{終}}$

複素数の範囲で定理**1.1.1**を考える：任意の複素数 α と β とについて，

$$\alpha\beta = 0 \iff \alpha = 0 \text{ または } \beta = 0 \quad .$$

このことより次のことが導かれる：任意の複素数 α と β と γ とについて，

$$\alpha\beta\gamma = 0 \iff \alpha = 0 \text{ または } \beta = 0 \text{ または } \gamma = 0 \quad .$$

複素数の範囲で定理 **1.1.1** を考える：任意の複素数 α と β とについて，

$$\alpha\beta = 0 \iff \alpha = 0 \text{ または } \beta = 0 \quad .$$

このことより次のことが導かれる：任意の複素数 α と β と γ とについて，

$$\alpha\beta\gamma = 0 \iff \alpha = 0 \text{ または } \beta = 0 \text{ または } \gamma = 0 \quad .$$

$\boxed{\text{例}}$ 4 と -2 と -3 とを解とする x に関する 3 次方程式を一つ求める．

複素数の範囲で定理 **1.1.1** を考える：任意の複素数 α と β とについて，

$$\alpha\beta = 0 \iff \alpha = 0 \text{ または } \beta = 0 \quad .$$

このことより次のことが導かれる：任意の複素数 α と β と γ とについて，

$$\alpha\beta\gamma = 0 \iff \alpha = 0 \text{ または } \beta = 0 \text{ または } \gamma = 0 \quad .$$

$\boxed{\text{例}}$ 4 と -2 と -3 とを解とする x に関する 3 次方程式を一つ求める． x に関する方程式の解が 4 と -2 と -3 とであることは，方程式を解いた結果が “ $x = 4$ または $x = -2$ または $x = -3$ ” となることである．

複素数の範囲で定理 **1.1.1** を考える：任意の複素数 α と β とについて，

$$\alpha\beta = 0 \iff \alpha = 0 \text{ または } \beta = 0 \quad .$$

このことより次のことが導かれる：任意の複素数 α と β と γ とについて，

$$\alpha\beta\gamma = 0 \iff \alpha = 0 \text{ または } \beta = 0 \text{ または } \gamma = 0 \quad .$$

$\boxed{\text{例}}$ 4 と -2 と -3 とを解とする x に関する 3 次方程式を一つ求める． x に関する方程式の解が 4 と -2 と -3 とであることは，方程式を解いた結果が "$x = 4$ または $x = -2$ または $x = -3$" となることである．

$$\begin{aligned}
& x = 4 \text{ または } x = -2 \text{ または } x = -3 \\
\iff & x - 4 = 0 \text{ または } x + 2 = 0 \text{ または } x + 3 = 0 \\
\iff & (x-4)(x+2)(x+3) = 0 \iff (x^2 - 2x - 8)(x+3) = 0 \\
\iff & x^3 + x^2 - 14x - 24 = 0 \ .
\end{aligned}$$

複素数の範囲で定理**1.1.1**を考える：任意の複素数 α と β とについて，

$$\alpha\beta = 0 \iff \alpha = 0 \text{ または } \beta = 0 \quad .$$

このことより次のことが導かれる：任意の複素数 α と β と γ とについて，

$$\alpha\beta\gamma = 0 \iff \alpha = 0 \text{ または } \beta = 0 \text{ または } \gamma = 0 \quad .$$

$\boxed{\text{例}}$ 4 と -2 と -3 とを解とする x に関する 3 次方程式を一つ求める．x に関する方程式の解が 4 と -2 と -3 とであることは，方程式を解いた結果が“ $x=4$ または $x=-2$ または $x=-3$ ”となることである．

$$\begin{aligned} & x = 4 \text{ または } x = -2 \text{ または } x = -3 \\ \iff & x - 4 = 0 \text{ または } x + 2 = 0 \text{ または } x + 3 = 0 \\ \iff & (x-4)(x+2)(x+3) = 0 \iff (x^2 - 2x - 8)(x+3) = 0 \\ \iff & x^3 + x^2 - 14x - 24 = 0 \ . \end{aligned}$$

4 と -2 と -3 とを解とする x に関する 3 次方程式の一つは

$x^3 + x^2 - 14x - 24 = 0$ である． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}3.6.4}$ -2 と $3+\sqrt{7}$ と $3-\sqrt{7}$ とを解とする x に関する3次方程式を一つ求めよ．右辺は 0 にして，左辺は降冪の順に整理された x の3次式にせよ．

x に関する方程式の解が -2 と $3+\sqrt{7}$ と $3-\sqrt{7}$ とであることは，方程式を解いた結果が“ $x=-2$ または $x=3+\sqrt{7}$ または $x=3-\sqrt{7}$ ”となることである．

$$x=-2 \quad \text{または} \quad x=3+\sqrt{7} \quad \text{または} \quad x=3-\sqrt{7}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad\qquad =0 \quad \text{または} \qquad\qquad\qquad =0 \quad \text{または} \qquad\qquad\qquad =0$$

$$\Longleftrightarrow (\qquad)(\qquad\qquad\qquad)(\qquad\qquad\qquad)=0$$

$$\Longleftrightarrow (\qquad)(\qquad\qquad\qquad)=0$$

$$\Longleftrightarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =0\ .$$

-2 と $3+\sqrt{7}$ と $3-\sqrt{7}$ とを解とする x に関する3次方程式の一つは

$\qquad\qquad\qquad =0$ である．

問3.6.4 -2 と $3+\sqrt{7}$ と $3-\sqrt{7}$ とを解とする x に関する3次方程式を一つ求めよ．右辺は 0 にして，左辺は降冪の順に整理された x の3次式にせよ．

x に関する方程式の解が -2 と $3+\sqrt{7}$ と $3-\sqrt{7}$ とであることは，方程式を解いた結果が“ $x=-2$ または $x=3+\sqrt{7}$ または $x=3-\sqrt{7}$ ”となることである．

$$
\begin{aligned}
& x=-2 \text{ または } x=3+\sqrt{7} \text{ または } x=3-\sqrt{7} \\
\iff\ & x+2=0 \text{ または } x-3-\sqrt{7}=0 \text{ または } x-3+\sqrt{7}=0 \\
\iff\ & (x+2)\left(x-3-\sqrt{7}\right)\left(x-3-\sqrt{7}\right)=0 \\
\iff\ & (x+2)(x^2-6x+2)=0 \\
\iff\ & x^3-4x^2-10x+4=0\ .
\end{aligned}
$$

-2 と $3+\sqrt{7}$ と $3-\sqrt{7}$ とを解とする x に関する3次方程式の一つは $x^3-4x^2-10x+4=0$ である． 終