3.7　連立方程式

変数 x と y とが現れる等式に対して，その等式が x, y に関する条件を表すと考えるときに，その等式を x, y に関する（x, y についての）方程式という．複数の方程式に対して，各々が表す条件を“かつ”で結んだ条件を考えるとき，それらの方程式を連立するという．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x と y とに関する 2 個の方程式 $2x+y=7$ と $3x-2y=0$ とを連立するとは，それら（が表す条件）を“かつ”で結んだ条件

$$2x+y=7 \quad \text{かつ} \quad 3x-2y=0$$

を考えることである.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x と y とに関する 2 個の方程式 $2x+y=7$ と $3x-2y=0$ とを連立するとは，それら（が表す条件）を“かつ”で結んだ条件

$$2x+y=7 \quad \text{かつ} \quad 3x-2y=0$$

を考えることである．この連立方程式を

$$\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$$

と書き表すことがある．この連立方程式を解く．

連立方程式

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

を解く.

連立方程式

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

を解く. $2x + y = 7$ より $y = 7 - 2x$,

連立方程式

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

を解く. $2x + y = 7$ より $y = 7 - 2x$, この等式と方程式 $3x - 2y = 0$ より

$$3x - 2(7 - 2x) = 0 \ ,$$

この方程式を解くと $x = 2$. $y = 7 - 2x$ より $y = 3$.

連立方程式

$$\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$$

を解く. $2x+y=7$ より $y=7-2x$ ，この等式と方程式 $3x-2y=0$ より

$$3x-2(7-2x) = 0 \ ,$$

この方程式を解くと $x=2$. $y=7-2x$ より $y=3$. 故に，連立方程式

$$2x+y=7 \ \text{かつ} \ 3x-2y=0$$

を解くと， $x=2$ かつ $y=3$.

連立方程式

$$\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$$

を解く． $2x+y=7$ より $y=7-2x$ ，この等式と方程式 $3x-2y=0$ より

$$3x-2(7-2x) = 0 ,$$

この方程式を解くと $x=2$ ． $y=7-2x$ より $y=3$ ．故に，連立方程式

$$2x+y=7 \text{ かつ } 3x-2y=0$$

を解くと， $x=2$ かつ $y=3$ ．このように，連立方程式

$$\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$$

を解くとは，同値で最も簡単な連立方程式

$$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

を導くことである．

終

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 x, y, z に関する次の 3 元連立方程式を解く：

$$\begin{cases} 2x + y - z = -8 & \cdots \textbf{(1)} \\ -x + 2y + 3z = 9 & \cdots \textbf{(2)} \\ 3x - 4y - z = 1 & \cdots \textbf{(3)} \end{cases} .$$

$\textbf{(1)} - \textbf{(3)}$ として z を消去する：

$$-x + 5y = -9 . \tag{4}$$

また，$\textbf{(2)} + \textbf{(3)} \times 3$ として z を消去する：

$$8x - 10y = 12 . \tag{5}$$

$\textbf{(4)} \times 2 + \textbf{(5)}$ として y を消去すると $6x = -6$，よって $x = -1$．等式 $\textbf{(4)}$ より

$$5y = -9 + x = -9 - 1 = -10 ,$$

よって $y = -2$．等式 $\textbf{(1)}$ より

$$z = 2x + y + 8 = -2 - 10 + 8 = -4 .$$

与えられた連立方程式を解くと，$x = -1$ かつ $y = -2$ かつ $z = 4$． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 3.7.1}$ 複素数を表す変数 x, y, z に関する次の 3 元連立方程式を解け：

$$\begin{cases} 3x - 6y + 5z = 5 \\ 4x + 2y - z = 1 \\ 7x - 4y + 8z = 2 \end{cases} .$$

$4x + 2y - z = 1$ と $7x - 4y + 8z = 2$ とより y を消去すると .
$4x + 2y - z = 1$ と $3x - 6y + 5z = 5$ とより y を消去すると .
この 2 個の式から x を消去すると ，よって $z =$.
より $x =$ $=$. $4x + 2y - z = 1$ より $y =$ $=$. 与えられた連立方程式を解くと， $x =$ かつ $y =$ かつ $z =$.

$\boxed{\text{問}3.7.1}$ 複素数を表す変数 x,y,z に関する次の 3 元連立方程式を解け：

$$\begin{cases} 3x-6y+5z=5 \\ 4x+2y-z=1 \\ 7x-4y+8z=2 \end{cases} .$$

$4x+2y-z=1$ と $7x-4y+8z=2$ とより y を消去すると $15x+6z=4$. $4x+2y-z=1$ と $3x-6y+5z=5$ とより y を消去すると $15x+2z=8$. この 2 個の式から x を消去すると $4z=-4$, よって $z=-1$. $15x+2z=8$ より $x=\dfrac{8-2z}{15}=\dfrac{2}{3}$. $4x+2y-z=1$ より $y=\dfrac{1-4x+z}{2}=-\dfrac{4}{3}$. 与えられた連立方程式を解くと, $x=\dfrac{2}{3}$ かつ $y=-\dfrac{4}{3}$ かつ $z=-1$. $\boxed{\text{終}}$

連立方程式を構成する方程式のうちの片方が 1 次方程式で他方が 2 次方程式であるときを扱う.

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 x, y に関する次の連立方程式を解く：

$$\begin{cases} 3x - 2y - 1 = 0 \\ 2y^2 - 3x^2 = 3y - 4x + 5 \end{cases} .$$

例 複素数を表す変数 x, y に関する次の連立方程式を解く：

$$\begin{cases} 3x-2y-1=0 \\ 2y^2-3x^2=3y-4x+5 \end{cases} .$$

等式 $3x-2y-1=0$ より $y=\dfrac{3x-1}{2}$.

$\boxed{例}$ 複素数を表す変数 x, y に関する次の連立方程式を解く：

$$\begin{cases} 3x - 2y - 1 = 0 \\ 2y^2 - 3x^2 = 3y - 4x + 5 \end{cases} .$$

等式 $3x - 2y - 1 = 0$ より $y = \dfrac{3x-1}{2}$. これと等式 $2y^2 - 3x^2 = 3y - 4x + 5$ とより,

$$2\left(\frac{3x-1}{2}\right)^2 - 3x^2 = 3\frac{3x-1}{2} - 4x + 5 ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 x, y に関する次の連立方程式を解く：

$$\begin{cases} 3x-2y-1=0 \\ 2y^2-3x^2=3y-4x+5 \end{cases} .$$

等式 $3x-2y-1=0$ より $y=\dfrac{3x-1}{2}$. これと等式 $2y^2-3x^2=3y-4x+5$ とより,

$$2\left(\frac{3x-1}{2}\right)^2-3x^2=3\frac{3x-1}{2}-4x+5 ,$$

$$\frac{9x^2-6x+1}{2}-3x^2=\frac{9x-3}{2}-4x+5 ,$$

$$9x^2-6x+1-6x^2=9x-3-8x+10 ,$$

$$3x^2-7x-6=0 ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 x, y に関する次の連立方程式を解く：

$$\begin{cases} 3x - 2y - 1 = 0 \\ 2y^2 - 3x^2 = 3y - 4x + 5 \end{cases} .$$

等式 $3x - 2y - 1 = 0$ より $y = \dfrac{3x-1}{2}$ ．これと等式 $2y^2 - 3x^2 = 3y - 4x + 5$ とより,

$$2\left(\frac{3x-1}{2}\right)^2 - 3x^2 = 3\frac{3x-1}{2} - 4x + 5 ,$$

$$\frac{9x^2 - 6x + 1}{2} - 3x^2 = \frac{9x-3}{2} - 4x + 5 ,$$

$$9x^2 - 6x + 1 - 6x^2 = 9x - 3 - 8x + 10 ,$$

$$3x^2 - 7x - 6 = 0 ,$$

$$(x-3)(3x+2) = 0 ,$$

$$x = 3 \text{ または } x = -\frac{2}{3} .$$

$$x = 3 \quad \text{または} \quad x = -\frac{2}{3} \quad .$$

$y = \dfrac{3x-1}{2}$ より， $x = 3$ のとき $y = 4$ ， $x = -\dfrac{2}{3}$ のとき $y = -\dfrac{3}{2}$.

$$x = 3 \text{ または } x = -\frac{2}{3} \quad .$$

$y = \dfrac{3x-1}{2}$ より，$x = 3$ のとき $y = 4$ ，$x = -\dfrac{2}{3}$ のとき $y = -\dfrac{3}{2}$ ．故に，与えられた連立方程式を解くと，$x = 3$ かつ $y = 4$ ，または，$x = -\dfrac{2}{3}$ かつ $y = -\dfrac{3}{2}$ ．

終

$\boxed{問3.7.2}$ 複素数を表す変数 x, y に関する次の連立方程式を解け：

$$\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ 2x^2-3y^2=3x+10y+13 \end{cases}.$$

等式 $2x+3y=-1$ より $y=\qquad\qquad$. これと等式 $2x^2-3y^2=3x+10y+13$ とより,

$$2x^2-3\left(\qquad\qquad\right)^2=3x+10\left(\qquad\qquad\right)+13\ ,$$

$$=\qquad\qquad\qquad\qquad ,$$

$$=\qquad\qquad\qquad\qquad ,$$

$$=0\ ,\ \left(\qquad\right)\left(\qquad\right)=0\ ,\ x=\qquad \text{または}\ x=\qquad .\ y=$$

より, $x=\qquad$ のとき $y=\qquad$, $x=\qquad$ のとき $y=\qquad$. 与えられた連立方程式を解くと, $x=\qquad$ かつ $y=\qquad$, または, $x=\qquad$ かつ $y=\qquad$.

$\boxed{\text{問}3.7.2}$ 複素数を表す変数 x, y に関する次の連立方程式を解け：

$$\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ 2x^2-3y^2=3x+10y+13 \end{cases} .$$

等式 $2x+3y=-1$ より $y=-\dfrac{2x+1}{3}$ ．これと等式 $2x^2-3y^2=3x+10y+13$ とより,

$$2x^2-3\left(-\frac{2x+1}{3}\right)^2=3x+10\left(-\frac{2x+1}{3}\right)+13 ,$$

$$2x^2-3\frac{4x^2+4x+1}{9}=3x-\frac{20x+10}{3}+13 ,$$

$$6x^2-4x^2-4x-1=9x-20x-10+39 ,$$

$2x^2+7x-30=0$, $(x+6)(2x-5)=0$, $x=-6$ または $x=\dfrac{5}{2}$ ． $y=-\dfrac{2x+1}{3}$ より, $x=-6$ のとき $y=\dfrac{11}{3}$, $x=\dfrac{5}{2}$ のとき $y=-2$ ．与えられた連立方程式を解くと, $x=-6$ かつ $y=\dfrac{11}{3}$ ，または, $x=\dfrac{5}{2}$ かつ $y=-2$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 x, y に関する次の連立方程式を解く：

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2xy + 3x = 2y + 4 \end{cases}.$$

x と y との両方が未知数なので下段の方程式 $2xy + 3x = 2y + 4$ の項 $2xy$ は x について 1 次と y について 1 次との併せて 2 次である．よって下段の方程式 $2xy + 3x = 2y + 4$ は 2 次方程式である．

$\boxed{例}$ 複素数を表す変数 x, y に関する次の連立方程式を解く：

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2xy + 3x = 2y + 4 \end{cases} .$$

等式 $x + 2y = 8$ より $x = 8 - 2y$.

例 複素数を表す変数 x, y に関する次の連立方程式を解く：

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2xy + 3x = 2y + 4 \end{cases} .$$

等式 $x + 2y = 8$ より $x = 8 - 2y$. これと等式 $2xy + 3x = 2y + 8$ とより,

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 x, y に関する次の連立方程式を解く：

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2xy + 3x = 2y + 4 \end{cases} .$$

等式 $x + 2y = 8$ より $x = 8 - 2y$ ．これと等式 $2xy + 3x = 2y + 8$ とより，

$$2(8-2y)y + 3(8-2y) = 2y + 8 ,$$

$$16y - 4y^2 + 24 - 6y = 2y + 8 ,$$

$$-4y^2 + 8y + 16 = 0 ,$$

$$\frac{1}{2}y^2 - y - 2 = 0 ,$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1-(-4)}}{1} = 1 \pm \sqrt{5} \quad \text{（複号同順）}.$$

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 x, y に関する次の連立方程式を解く：

$$\begin{cases} x+2y=8 \\ 2xy+3x=2y+4 \end{cases} .$$

等式 $x+2y=8$ より $x=8-2y$ ．これと等式 $2xy+3x=2y+8$ とより，

$$2(8-2y)y+3(8-2y)=2y+8 \ ,$$

$$16y-4y^2+24-6y=2y+8 \ ,$$

$$-4y^2+8y+16=0 \ ,$$

$$\frac{1}{2}y^2-y-2=0 \ ,$$

$$y=\frac{1\pm\sqrt{1-(-4)}}{1}=1\pm\sqrt{5} \quad \text{（複号同順）}.$$

$x=8-2y$ より，$y=1+\sqrt{5}$ のとき $x=8-2\left(1+\sqrt{5}\right)=6-2\sqrt{5}$ ，
$y=1-\sqrt{5}$ のとき $x=8-2\left(1-\sqrt{5}\right)=6+2\sqrt{5}$ ．

例 複素数を表す変数 x, y に関する次の連立方程式を解く：

$$\begin{cases} x+2y=8 \\ 2xy+3x=2y+4 \end{cases}.$$

等式 $x+2y=8$ より $x=8-2y$ ．これと等式 $2xy+3x=2y+8$ とより，

$$2(8-2y)y+3(8-2y)=2y+8 \ ,$$

$$16y-4y^2+24-6y=2y+8 \ ,$$

$$-4y^2+8y+16=0 \ ,$$

$$\frac{1}{2}y^2-y-2=0 \ ,$$

$$y=\frac{1\pm\sqrt{1-(-4)}}{1}=1\pm\sqrt{5} \quad \text{（複号同順）}.$$

$x=8-2y$ より， $y=1+\sqrt{5}$ のとき $x=8-2\left(1+\sqrt{5}\right)=6-2\sqrt{5}$ ，
$y=1-\sqrt{5}$ のとき $x=8-2\left(1-\sqrt{5}\right)=6+2\sqrt{5}$ ．与えられた連立方程式を解くと， $x=6\pm2\sqrt{5}$ かつ $y=1\mp\sqrt{5}$（複号同順）． 終

$\boxed{\text{問}3.7.3}$ 複素数を表す変数 x, y に関する次の連立方程式を解け：

$$\begin{cases} x+3y=2 \\ x^2+2xy=3x+7y+4 \end{cases}.$$

$x+3y=2$ より $x=\qquad$. この等式と $x^2+2xy=3x+7y+4$ とより,

$$(\qquad)^2+2y(\qquad)=3(\qquad)+7y+4\ ,$$

$$=\qquad ,$$

$$=0\ ,$$

$$=0\ ,$$

$$y=\qquad=\qquad$$ （複号同順）.

$x=\qquad$ より, $y=\qquad$ のとき $x=\qquad=\qquad$,

$y=\qquad$ のとき $x=\qquad=\qquad$, 与えられた連立方程式を解くと, $x=\qquad$ かつ $y=\qquad$ （複号同順）.

$\boxed{問3.7.3}$ 複素数を表す変数 x, y に関する次の連立方程式を解け：

$$\begin{cases} x+3y=2 \\ x^2+2xy=3x+7y+4 \end{cases} .$$

$x+3y=2$ より $x=2-3y$ ．この等式と $x^2+2xy=3x+7y+4$ とより，

$$(2-3y)^2+2y(2-3y)=3(2-3y)+7y+4 \ ,$$

$$4-12y+9y^2+4y-6y^2=6-9y+7y+4 \ ,$$

$$3y^2-6y-6=0 \ ,$$

$$\frac{1}{2}y^2-y-1=0 \ ,$$

$$y=1\pm\sqrt{1+2}=1\pm\sqrt{3} \quad （複号同順）.$$

$x=2-3y$ より， $y=1+\sqrt{3}$ のとき $x=2-3\left(1+\sqrt{3}\right)=-1-3\sqrt{3}$ ，
$y=1-\sqrt{3}$ のとき $x=2-3\left(1-\sqrt{3}\right)=-1-+3\sqrt{3}$ ，与えられた連立方程式を解くと， $x=-1\pm3\sqrt{3}$ かつ $y=1\mp\sqrt{3}$ （複号同順）． $\boxed{終}$

$\boxed{例}$ 複素数を表す変数 a, b に関する次の連立方程式を解く：

$$\begin{cases} 2a - 3b = 1 \\ ab + b^2 - 3a - b = -14 \end{cases}.$$

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 a, b に関する次の連立方程式を解く：

$$\begin{cases} 2a - 3b = 1 \\ ab + b^2 - 3a - b = -14 \end{cases}.$$

等式 $2a - 3b = 1$ より $a = \dfrac{3b+1}{2}$.

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 a, b に関する次の連立方程式を解く：

$$\begin{cases} 2a - 3b = 1 \\ ab + b^2 - 3a - b = -14 \end{cases}.$$

等式 $2a - 3b = 1$ より $a = \dfrac{3b+1}{2}$ ．これと等式 $ab + b^2 - 3a - b = -14$ より，

例 複素数を表す変数 a, b に関する次の連立方程式を解く：

$$\begin{cases} 2a - 3b = 1 \\ ab + b^2 - 3a - b = -14 \end{cases} .$$

等式 $2a - 3b = 1$ より $a = \dfrac{3b+1}{2}$ ． これと等式 $ab + b^2 - 3a - b = -14$ より，

$$\frac{3b+1}{2} \cdot b + b^2 - 3 \cdot \frac{3b+1}{2} - b = -14 ,$$

$\boxed{例}$ 複素数を表す変数 a, b に関する次の連立方程式を解く：

$$\begin{cases} 2a - 3b = 1 \\ ab + b^2 - 3a - b = -14 \end{cases} .$$

等式 $2a - 3b = 1$ より $a = \dfrac{3b+1}{2}$ ． これと等式 $ab + b^2 - 3a - b = -14$ より，

$$\frac{3b+1}{2} \cdot b + b^2 - 3 \cdot \frac{3b+1}{2} - b = -14 \ ,$$

$$3b^2 + b + 2b^2 - 9b - 3 - 2b = -28 \ ,$$

$$5b^2 - 10b + 25 = 0 \ ,$$

$$\frac{1}{2}b^2 - b + \frac{5}{2} = 0 \ ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 a,b に関する次の連立方程式を解く：

$$\begin{cases} 2a-3b=1 \\ ab+b^2-3a-b=-14 \end{cases} .$$

等式 $2a-3b=1$ より $a=\dfrac{3b+1}{2}$ ．これと等式 $ab+b^2-3a-b=-14$ より，

$$\frac{3b+1}{2}\cdot b+b^2-3\cdot\frac{3b+1}{2}-b=-14 ,$$

$$3b^2+b+2b^2-9b-3-2b=-28 ,$$

$$5b^2-10b+25=0 ,$$

$$\frac{1}{2}b^2-b+\frac{5}{2}=0 ,$$

$$b=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}}}{2\cdot\frac{1}{2}}=1\pm\sqrt{-4}=1\pm\sqrt{4}\,i=1\pm 2i \quad \text{（複号同順）}.$$

$$b = 1 \pm 2i \ .$$

$$b = 1 \pm 2i \ .$$

$a = \dfrac{3b+1}{2}$ なので,

$\boxed{終}$

$$b = 1 \pm 2i \ .$$

$a = \dfrac{3b+1}{2}$ なので, $b = 1+2i$ のとき $a = \dfrac{3(1+2i)+1}{2} = 2+3i$, $b = 1-2i$ のとき $a = \dfrac{3(1-2i)+1}{2} = 2-3i$.

終

$$b = 1 \pm 2i \ .$$

$a = \dfrac{3b+1}{2}$ なので，$b = 1 + 2i$ のとき $a = \dfrac{3(1+2i)+1}{2} = 2 + 3i$ ，$b = 1 - 2i$ のとき $a = \dfrac{3(1-2i)+1}{2} = 2 - 3i$ ．与えられた連立方程式を解くと，

$a = 2 \pm 3i$ かつ $b = 1 \pm 2i$（複号同順）． 終

$\boxed{\text{問}3.7.4}$ 複素数を表す変数 a, b に関する次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} 3a - 2b = 4 \\ a^2 + 2ab - 2b^2 - 4b = 4 \end{cases}.$$

等式 $3a - 2b = 4$ より $a =$. これと等式 $a^2 + 2ab - 2b^2 - 4b = 4$ より,

$$\left(\qquad \right)^2 + 2 \cdot \qquad \cdot b - 2b^2 - 4b = 4 ,$$

$$= \quad ,$$

$$= 0 ,$$

$$= 0 ,$$

$b =$ （複号同順）.

$\boxed{\text{問}3.7.4}$ 複素数を表す変数 a, b に関する次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} 3a - 2b = 4 \\ a^2 + 2ab - 2b^2 - 4b = 4 \end{cases} .$$

等式 $3a - 2b = 4$ より $a = \dfrac{2b+4}{3}$. これと等式 $a^2 + 2ab - 2b^2 - 4b = 4$ より,

$$\left(\frac{2b+4}{3}\right)^2 + 2 \cdot \frac{2b+4}{3} \cdot b - 2b^2 - 4b = 4 \ ,$$

$$4b^2 + 16b + 16 + 12b^2 + 24b - 18b^2 - 36b = 36 \ ,$$

$$-2b^2 + 4b - 20 = 0 \ ,$$

$$\frac{1}{2}b^2 - b + 5 = 0 \ ,$$

$$b = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1 \pm \sqrt{-9} = 1 \pm \sqrt{9}\, i = 1 \pm 3i \quad (\text{複号同順}) .$$

$$b = 1 \pm 3i$$

$a = \dfrac{2b+4}{3}$ なので， $b = 1+3i$ のとき $a = \dfrac{2(1+3i)+4}{3} = 2+2i$ ， $b = 1-3i$ のとき $a = \dfrac{2(1+-i)+4}{3} = 2-2i$ ． 与えられた連立方程式を解くと，

$a = 2 \pm 2i$ かつ $b = 1 \pm 3i$ （複号同順）． $\boxed{終}$