

3.9 無理方程式

根号 $\sqrt{\quad}$ の中に変数が現れるような方程式を無理方程式ということがある.

根号 $\sqrt{\quad}$ の中に変数が現れるような方程式を無理方程式ということがある.
根号の中が虚数のときの値は定義されていないので, 根号の中の式の値は実数に限る.

根号 $\sqrt{\quad}$ の中に変数が現れるような方程式を無理方程式ということがある。根号の中が虚数のときの値は定義されていないので、根号の中の式の値は実数に限る。例えば変数 x の無理式 $\sqrt{3x+5}$ を考えるとき、 $2x+5$ の値は実数でなければならないので、 x の値は実数でなければならない。

根号 $\sqrt{\quad}$ の中に変数が現れるような方程式を無理方程式ということがある。根号の中が虚数のときの値は定義されていないので、根号の中の式の値は実数に限る。例えば変数 x の無理式 $\sqrt{3x+5}$ を考えるとき、 $2x+5$ の値は実数でなければならないので、 x の値は実数でなければならない。このような理由で、根号 $\sqrt{\quad}$ の中に変数 x が現れる無理方程式では通常は x は実数を表すものと約束する。

根号 $\sqrt{\quad}$ の中に変数が現れるような方程式を無理方程式ということがある。根号の中が虚数のときの値は定義されていないので、根号の中の式の値は実数に限る。例えば変数 x の無理式 $\sqrt{3x+5}$ を考えるとき、 $2x+5$ の値は実数でなければならないので、 x の値は実数でなければならない。このような理由で、根号 $\sqrt{\quad}$ の中に変数 x が現れる無理方程式では通常は x は実数を表すものと約束する。

無理方程式を解くために次のことを用いる。

- (1) 実数を表す式 A と B について、等式 $A = B$ から等式 $A^2 = B^2$ を導く；但し、等式 $A^2 = B^2$ から等式 $A = B$ は必ずしも導かれないので、等式 $A = B$ と等式 $A^2 = B^2$ とは必ずしも同値でない。
- (2) 実数を表す式 A について $\sqrt{A^2} = A$ (定理 1.8.2)。

例 実数を表す変数 x に関する無理方程式 $\sqrt{x+3} = x+1$ を解く.

例 実数を表す変数 x に関する無理方程式 $\sqrt{x+3} = x+1$ を解く. 両辺を 2 乗すると

$$\sqrt{x+3}^2 = (x+1)^2 ,$$

例 実数を表す変数 x に関する無理方程式 $\sqrt{x+3} = x+1$ を解く. 両辺を 2 乗すると

$$\sqrt{x+3}^2 = (x+1)^2 ,$$

この等式の左辺は $\sqrt{x+3}^2 = x+3$ で右辺は $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ なので,

$$x+3 = x^2 + 2x + 1 ,$$

$$x^2 + x - 2 = 0 ,$$

例 実数を表す変数 x に関する無理方程式 $\sqrt{x+3} = x+1$ を解く. 両辺を 2 乗すると

$$\sqrt{x+3}^2 = (x+1)^2 ,$$

この等式の左辺は $\sqrt{x+3}^2 = x+3$ で右辺は $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ なので,

$$x+3 = x^2 + 2x + 1 ,$$

$$x^2 + x - 2 = 0 ,$$

よって $(x-1)(x+2) = 0$ なので, $x = 1$ または $x = -2$.

例 実数を表す変数 x に関する無理方程式 $\sqrt{x+3} = x+1$ を解く. 両辺を 2 乗すると

$$\sqrt{x+3}^2 = (x+1)^2 ,$$

この等式の左辺は $\sqrt{x+3}^2 = x+3$ で右辺は $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ なので,

$$x+3 = x^2 + 2x + 1 ,$$

$$x^2 + x - 2 = 0 ,$$

よって $(x-1)(x+2) = 0$ なので, $x = 1$ または $x = -2$. 故に,

$$\sqrt{x+3} = x+1 \text{ ならば } x = 1 \text{ または } x = -2 .$$

例 実数を表す変数 x に関する無理方程式 $\sqrt{x+3} = x+1$ を解く. 両辺を 2 乗すると

$$\sqrt{x+3}^2 = (x+1)^2,$$

この等式の左辺は $\sqrt{x+3}^2 = x+3$ で右辺は $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ なので,

$$x+3 = x^2 + 2x + 1,$$

$$x^2 + x - 2 = 0,$$

よって $(x-1)(x+2) = 0$ なので, $x = 1$ または $x = -2$. 故に,

$$\sqrt{x+3} = x+1 \text{ ならば } x = 1 \text{ または } x = -2.$$

等式 $\sqrt{x+3} = x+1$ から等式 $\sqrt{x+3}^2 = (x+1)^2$ が導けるが, 逆に $\sqrt{x+3}^2 = (x+1)^2$ から $\sqrt{x+3} = x+1$ を導けない. なので, x に関する方程式 $\sqrt{x+3}^2 = (x+1)^2$ の解の範囲は, 元の方程式 $\sqrt{x+3} = x+1$ の解の範囲を含むが, 元の方程式の解でない数も含むかもしれない. よって, 方程式 $\sqrt{x+3}^2 = (x+1)^2$ の解の各々が与えられた方程式 $\sqrt{x+3} = x+1$ の解であるかどうか調べる必要がある.

例 実数を表す変数 x に関する無理方程式 $\sqrt{x+3} = x+1$ を解く. 両辺を 2 乗すると

$$\sqrt{x+3}^2 = (x+1)^2,$$

この等式の左辺は $\sqrt{x+3}^2 = x+3$ で右辺は $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ なので,

$$x+3 = x^2 + 2x + 1,$$

$$x^2 + x - 2 = 0,$$

よって $(x-1)(x+2) = 0$ なので, $x = 1$ または $x = -2$. 故に,

$$\sqrt{x+3} = x+1 \text{ ならば } x = 1 \text{ または } x = -2.$$

$x = 1$ のとき, $\sqrt{x+3} = \sqrt{4} = 2$ かつ $x+1 = 2$ なので, $\sqrt{x+3} = x+1$.

1 は与えられた方程式の解である. $x = -2$ のとき, $\sqrt{x+3} = \sqrt{1} = 1$ かつ

$x+1 = -1$ なので, $\sqrt{x+3} \neq x+1$. -2 は与えられた方程式の解でない.

故に与えられた方程式の解は 1 だけである.

終

例 実数を表す変数 x に関する方程式 $x - \sqrt{19 - 2x} = 2$ を解く. $\sqrt{\bigcirc} = \square$ の形の等式に変形して両辺を 2 乗して求めた解が元の方程式の解であるかどうか調べる.

例 実数を表す変数 x に関する方程式 $x - \sqrt{19 - 2x} = 2$ を解く. $\sqrt{\circ} = \square$ の形の等式に変形して両辺を 2 乗して求めた解が元の方程式の解であるかどうか調べる. 方程式 $x - \sqrt{19 - 2x} = 2$ より,

$$\sqrt{19 - 2x} = x - 2 ,$$

例 実数を表す変数 x に関する方程式 $x - \sqrt{19 - 2x} = 2$ を解く. $\sqrt{\square} = \square$ の形の等式に変形して両辺を 2 乗して求めた解が元の方程式の解であるかどうか調べる. 方程式 $x - \sqrt{19 - 2x} = 2$ より,

$$\sqrt{19 - 2x} = x - 2 ,$$

$$\sqrt{19 - 2x}^2 = (x - 2)^2 ,$$

$$19 - 2x = x^2 - 4x + 4 ,$$

例 実数を表す変数 x に関する方程式 $x - \sqrt{19 - 2x} = 2$ を解く. $\sqrt{\square} = \square$ の形の等式に変形して両辺を 2 乗して求めた解が元の方程式の解であるかどうか調べる. 方程式 $x - \sqrt{19 - 2x} = 2$ より,

$$\sqrt{19 - 2x} = x - 2 ,$$

$$\sqrt{19 - 2x}^2 = (x - 2)^2 ,$$

$$19 - 2x = x^2 - 4x + 4 ,$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0 ,$$

$$(x + 3)(x - 5) = 0 ,$$

$$x = 5 \text{ または } x = -3 .$$

例 実数を表す変数 x に関する方程式 $x - \sqrt{19 - 2x} = 2$ を解く. $\sqrt{\circ} = \square$ の形の等式に変形して両辺を 2 乗して求めた解が元の方程式の解であるかどうか調べる. 方程式 $x - \sqrt{19 - 2x} = 2$ より,

$$\sqrt{19 - 2x} = x - 2 ,$$

$$\sqrt{19 - 2x}^2 = (x - 2)^2 ,$$

$$19 - 2x = x^2 - 4x + 4 ,$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0 ,$$

$$(x + 3)(x - 5) = 0 ,$$

$$x = 5 \text{ または } x = -3 .$$

$x = 5$ のとき $x - \sqrt{19 - 2x} = 5 - \sqrt{9} = 2$. 5 は与えられた方程式の解である.

例 実数を表す変数 x に関する方程式 $x - \sqrt{19 - 2x} = 2$ を解く. $\sqrt{\circ} = \square$ の形の等式に変形して両辺を 2 乗して求めた解が元の方程式の解であるかどうか調べる. 方程式 $x - \sqrt{19 - 2x} = 2$ より,

$$\sqrt{19 - 2x} = x - 2 ,$$

$$\sqrt{19 - 2x}^2 = (x - 2)^2 ,$$

$$19 - 2x = x^2 - 4x + 4 ,$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0 ,$$

$$(x + 3)(x - 5) = 0 ,$$

$$x = 5 \text{ または } x = -3 .$$

$x = 5$ のとき $x - \sqrt{19 - 2x} = 5 - \sqrt{9} = 2$. 5 は与えられた方程式の解である. $x = -3$ のとき $x - \sqrt{19 - 2x} \neq 2$. -3 は与えられた方程式の解でない.

例 実数を表す変数 x に関する方程式 $x - \sqrt{19 - 2x} = 2$ を解く. $\sqrt{\circ} = \square$ の形の等式に変形して両辺を 2 乗して求めた解が元の方程式の解であるかどうか調べる. 方程式 $x - \sqrt{19 - 2x} = 2$ より,

$$\sqrt{19 - 2x} = x - 2 ,$$

$$\sqrt{19 - 2x}^2 = (x - 2)^2 ,$$

$$19 - 2x = x^2 - 4x + 4 ,$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0 ,$$

$$(x + 3)(x - 5) = 0 ,$$

$$x = 5 \text{ または } x = -3 .$$

$x = 5$ のとき $x - \sqrt{19 - 2x} = 5 - \sqrt{9} = 2$. 5 は与えられた方程式の解である. $x = -3$ のとき $x - \sqrt{19 - 2x} \neq 2$. -3 は与えられた方程式の解でない. 故に与えられた方程式の解は 5 だけである.

問3.9.1 実数を表す変数 x に関する方程式 $\sqrt{25-x^2} + x = 1$ を解け.

方程式 $\sqrt{25-x^2} + x = 1$ より,

$$\sqrt{25-x^2} = \quad ,$$

$$\sqrt{25-x^2}^2 = (\quad)^2 ,$$

$$= \quad ,$$

$$= 0 ,$$

$$(\quad)(\quad) = 0 ,$$

$$x = \quad \text{または} \quad x = \quad .$$

$x = \quad$ のとき, $\sqrt{25-x^2} + x = 1$. \quad は与えられた方程式の解で \quad .

$x = \quad$ のとき, $\sqrt{25-x^2} + x = 1$. \quad は与えられた方程式の解で \quad . 故

に与えられた方程式の解は \quad .

問3.9.1 実数を表す変数 x に関する方程式 $\sqrt{25-x^2} + x = 1$ を解け.

方程式 $\sqrt{25-x^2} + x = 1$ より,

$$\sqrt{25-x^2} = 1-x,$$

$$\sqrt{25-x^2}^2 = (1-x)^2,$$

$$25-x^2 = x^2 - 2x + 1,$$

$$x^2 - x - 12 = 0,$$

$$(x-4)(x+3) = 0,$$

$$x = 4 \text{ または } x = -3.$$

$x = 4$ のとき, $\sqrt{25-x^2} + x \neq 1$. 4 は与えられた方程式の解でない.

$x = -3$ のとき, $\sqrt{25-x^2} + x = 1$. -3 は与えられた方程式の解である. 故
に与えられた方程式の解は -3 だけである.

終

例 実数を表す変数 a に関する方程式 $6 - \sqrt{20 - a^2} = a$ を解く. $\sqrt{\bigcirc} = \square$ の形の等式に変形して両辺を 2 乗して求めた解が元の方程式の解であるかどうか調べる.

例 実数を表す変数 a に関する方程式 $6 - \sqrt{20 - a^2} = a$ を解く. $\sqrt{\bigcirc} = \square$ の形の等式に変形して両辺を 2 乗して求めた解が元の方程式の解であるかどうか調べる. 方程式 $6 - \sqrt{20 - a^2} = a$ より,

$$\sqrt{20 - a^2} = 6 - a ,$$

例 実数を表す変数 a に関する方程式 $6 - \sqrt{20 - a^2} = a$ を解く. $\sqrt{\circ} = \square$ の形の等式に変形して両辺を 2 乗して求めた解が元の方程式の解であるかどうか調べる. 方程式 $6 - \sqrt{20 - a^2} = a$ より,

$$\sqrt{20 - a^2} = 6 - a ,$$

$$\sqrt{20 - a^2}^2 = (6 - a)^2 ,$$

$$20 - a^2 = a^2 - 12a + 36 ,$$

例 実数を表す変数 a に関する方程式 $6 - \sqrt{20 - a^2} = a$ を解く. $\sqrt{\square} = \square$ の形の等式に変形して両辺を 2 乗して求めた解が元の方程式の解であるかどうか調べる. 方程式 $6 - \sqrt{20 - a^2} = a$ より,

$$\sqrt{20 - a^2} = 6 - a ,$$

$$\sqrt{20 - a^2}^2 = (6 - a)^2 ,$$

$$20 - a^2 = a^2 - 12a + 36 ,$$

$$a^2 - 6a + 8 = 0 ,$$

$$(a - 2)(a - 4) = 0 .$$

$$a = 2 \text{ または } a = 4 .$$

例 実数を表す変数 a に関する方程式 $6 - \sqrt{20 - a^2} = a$ を解く. $\sqrt{\square} = \square$ の形の等式に変形して両辺を 2 乗して求めた解が元の方程式の解であるかどうか調べる. 方程式 $6 - \sqrt{20 - a^2} = a$ より,

$$\sqrt{20 - a^2} = 6 - a ,$$

$$\sqrt{20 - a^2}^2 = (6 - a)^2 ,$$

$$20 - a^2 = a^2 - 12a + 36 ,$$

$$a^2 - 6a + 8 = 0 ,$$

$$(a - 2)(a - 4) = 0 .$$

$$a = 2 \text{ または } a = 4 .$$

$a = 2$ のとき $6 - \sqrt{20 - a^2} = a$. 2 は与えられた方程式の解である.

例 実数を表す変数 a に関する方程式 $6 - \sqrt{20 - a^2} = a$ を解く. $\sqrt{\square} = \square$ の形の等式に変形して両辺を 2 乗して求めた解が元の方程式の解であるかどうか調べる. 方程式 $6 - \sqrt{20 - a^2} = a$ より,

$$\sqrt{20 - a^2} = 6 - a ,$$

$$\sqrt{20 - a^2}^2 = (6 - a)^2 ,$$

$$20 - a^2 = a^2 - 12a + 36 ,$$

$$a^2 - 6a + 8 = 0 ,$$

$$(a - 2)(a - 4) = 0 .$$

$$a = 2 \text{ または } a = 4 .$$

$a = 2$ のとき $6 - \sqrt{20 - a^2} = a$. 2 は与えられた方程式の解である. $a = 4$ のとき $6 - \sqrt{20 - a^2} = a$. 4 は与えられた方程式の解である.

例 実数を表す変数 a に関する方程式 $6 - \sqrt{20 - a^2} = a$ を解く. $\sqrt{\square} = \square$ の形の等式に変形して両辺を 2 乗して求めた解が元の方程式の解であるかどうか調べる. 方程式 $6 - \sqrt{20 - a^2} = a$ より,

$$\sqrt{20 - a^2} = 6 - a ,$$

$$\sqrt{20 - a^2}^2 = (6 - a)^2 ,$$

$$20 - a^2 = a^2 - 12a + 36 ,$$

$$a^2 - 6a + 8 = 0 ,$$

$$(a - 2)(a - 4) = 0 .$$

$$a = 2 \text{ または } a = 4 .$$

$a = 2$ のとき $6 - \sqrt{20 - a^2} = a$. 2 は与えられた方程式の解である. $a = 4$ のとき $6 - \sqrt{20 - a^2} = a$. 4 は与えられた方程式の解である. 故に与えられた方程式の解は 2 と 4 とである.

問3.9.2 実数を表す変数 k に関する方程式 $2 - \sqrt{7 - 6k} = k$ を解け.

方程式 $2 - \sqrt{7 - 6k} = k$ より,

$$\sqrt{7 - 6k} = \quad ,$$

$$\sqrt{7 - 6k}^2 = (\quad)^2 ,$$

$$= \quad ,$$

$$= 0 ,$$

$$(\quad)(\quad) = 0 ,$$

$$k = \quad \text{または} \quad k = \quad .$$

$k = \quad$ のときも $k = \quad$ のときも, $2 - \sqrt{7 - 6k} \quad k$. 故に与えられた方程式の解は \quad .

問3.9.2 実数を表す変数 k に関する方程式 $2 - \sqrt{7 - 6k} = k$ を解け.

方程式 $2 - \sqrt{7 - 6k} = k$ より,

$$\sqrt{7 - 6k} = 2 - k ,$$

$$\sqrt{7 - 6k}^2 = (2 - k)^2 ,$$

$$7 - 6k = k^2 - 4k + 4 ,$$

$$k^2 + 2k - 3 = 0 ,$$

$$(k - 1)(k + 3) = 0 ,$$

$$k = 1 \text{ または } k = -3 .$$

$k = 1$ のときも $k = -3$ のときも, $2 - \sqrt{7 - 6k} = k$. 故に与えられた方程式の解は 1 と -3 とである.

終

例 実数を表す変数 k に関する方程式 $1 - \sqrt{5k - 11} = k$ を解く. $\sqrt{\bigcirc} = \square$ の形の等式に変形して両辺を 2 乗して求めた解が元の方程式の解であるかどうか調べる.

例 実数を表す変数 k に関する方程式 $1 - \sqrt{5k - 11} = k$ を解く. $\sqrt{\circ} = \square$ の形の等式に変形して両辺を 2 乗して求めた解が元の方程式の解であるかどうか調べる. 方程式 $1 - \sqrt{5k - 11} = k$ より,

$$\sqrt{5k - 11} = 1 - k ,$$

例 実数を表す変数 k に関する方程式 $1 - \sqrt{5k - 11} = k$ を解く. $\sqrt{\square} = \square$ の形の等式に変形して両辺を 2 乗して求めた解が元の方程式の解であるかどうか調べる. 方程式 $1 - \sqrt{5k - 11} = k$ より,

$$\sqrt{5k - 11} = 1 - k ,$$

$$\sqrt{5k - 11}^2 = (1 - k)^2 ,$$

$$5k - 11 = 1 - 2k + k^2 ,$$

例 実数を表す変数 k に関する方程式 $1 - \sqrt{5k - 11} = k$ を解く. $\sqrt{\square} = \square$ の形の等式に変形して両辺を 2 乗して求めた解が元の方程式の解であるかどうか調べる. 方程式 $1 - \sqrt{5k - 11} = k$ より,

$$\sqrt{5k - 11} = 1 - k ,$$

$$\sqrt{5k - 11}^2 = (1 - k)^2 ,$$

$$5k - 11 = 1 - 2k + k^2 ,$$

$$k^2 - 7k + 12 = 0 ,$$

$$(k - 3)(k - 4) = 0 ,$$

$$k = 3 \text{ または } k = 4 .$$

例 実数を表す変数 k に関する方程式 $1 - \sqrt{5k - 11} = k$ を解く. $\sqrt{\square} = \square$ の形の等式に変形して両辺を 2 乗して求めた解が元の方程式の解であるかどうか調べる. 方程式 $1 - \sqrt{5k - 11} = k$ より,

$$\sqrt{5k - 11} = 1 - k ,$$

$$\sqrt{5k - 11}^2 = (1 - k)^2 ,$$

$$5k - 11 = 1 - 2k + k^2 ,$$

$$k^2 - 7k + 12 = 0 ,$$

$$(k - 3)(k - 4) = 0 ,$$

$$k = 3 \text{ または } k = 4 .$$

$k = 3$ のとき $1 - \sqrt{5k - 11} \neq k$. 3 は与えられ方程式の解でない.

例 実数を表す変数 k に関する方程式 $1 - \sqrt{5k - 11} = k$ を解く. $\sqrt{\bigcirc} = \square$ の形の等式に変形して両辺を 2 乗して求めた解が元の方程式の解であるかどうか調べる. 方程式 $1 - \sqrt{5k - 11} = k$ より,

$$\sqrt{5k - 11} = 1 - k ,$$

$$\sqrt{5k - 11}^2 = (1 - k)^2 ,$$

$$5k - 11 = 1 - 2k + k^2 ,$$

$$k^2 - 7k + 12 = 0 ,$$

$$(k - 3)(k - 4) = 0 ,$$

$$k = 3 \text{ または } k = 4 .$$

$k = 3$ のとき $1 - \sqrt{5k - 11} \neq k$. 3 は与えられ方程式の解でない. $k = 4$ のとき $1 - \sqrt{5k - 11} \neq k$. 4 は与えられ方程式の解でない.

例 実数を表す変数 k に関する方程式 $1 - \sqrt{5k - 11} = k$ を解く. $\sqrt{\bigcirc} = \square$ の形の等式に変形して両辺を 2 乗して求めた解が元の方程式の解であるかどうか調べる. 方程式 $1 - \sqrt{5k - 11} = k$ より,

$$\sqrt{5k - 11} = 1 - k ,$$

$$\sqrt{5k - 11}^2 = (1 - k)^2 ,$$

$$5k - 11 = 1 - 2k + k^2 ,$$

$$k^2 - 7k + 12 = 0 ,$$

$$(k - 3)(k - 4) = 0 ,$$

$$k = 3 \text{ または } k = 4 .$$

$k = 3$ のとき $1 - \sqrt{5k - 11} \neq k$. 3 は与えられ方程式の解でない. $k = 4$ のとき $1 - \sqrt{5k - 11} \neq k$. 4 は与えられ方程式の解でない. 故に与えられた方程式の解は無い.

問3.9.3 実数を表す変数 a に関する方程式 $a - \sqrt{21 - 4a} = 6$ を解け.

与えられた方程式より,

$$\sqrt{21 - 4a} = \quad ,$$

$$\sqrt{21 - 4a}^2 = (\quad)^2 ,$$

$$= \quad ,$$

$$= 0 ,$$

$$(\quad)(\quad) = 0 ,$$

$$a = \quad \text{または} \quad a = \quad .$$

$a = \quad$ のときも $a = \quad$ のときも, $a - \sqrt{21 - 4a} \neq 6$. 故に与えられた方程式の解は \quad .

問3.9.3 実数を表す変数 a に関する方程式 $a - \sqrt{21 - 4a} = 6$ を解け.

与えられた方程式より,

$$\sqrt{21 - 4a} = a - 6 ,$$

$$\sqrt{21 - 4a}^2 = (a - 6)^2 ,$$

$$21 - 4a = a^2 - 12a + 36 ,$$

$$a^2 - 8a + 15 = 0 ,$$

$$(a - 3)(a - 5) = 0 ,$$

$$a = 3 \text{ または } a = 5 .$$

$a = 3$ のときも $a = 5$ のときも, $a - \sqrt{21 - 4a} \neq 6$. 故に与えられた方程式の解は無い.

終