## 3.10 恒等式

例として $x$ の整式 $(x-2)(2x-3)$ を展開する：

$$(x-2)(2x-3) = 2x^2 - 7x + 6 \ .$$

ここで，文字 $x$ が現れるこの等式は，$x$ の値がどんな数でも $(x-2)(2x-3) = 2x^2 - 7x + 6$ となることを意味する.

例として $x$ の整式 $(x-2)(2x-3)$ を展開する：

$$(x-2)(2x-3) = 2x^2 - 7x + 6 \ .$$

ここで，文字 $x$ が現れるこの等式は，$x$ の値がどんな数でも $(x-2)(2x-3) = 2x^2 - 7x + 6$ となることを意味する．

このように，例えば文字 $x$ が現れる等式について，任意の数 $x$ についてその等式が成り立つ（と考える）とき，その等式を $x$ に関する（$x$ についての）恒等式という．

$\boxed{例}$ $x$ の $3$ 次式 $2x^3-5x^2+7x-8$ を $2$ 次式 $x^2-x+3$ で割ると整商が $2x-3$ で剰余が $-2x+1$ になる．このことを式で表すと次の等式になる：

$$2x^3-5x^2+7x-8=(2x-3)(x^2-x+3)-2x+1\ .$$

$\boxed{例}$ $x$ の 3 次式 $2x^3-5x^2+7x-8$ を 2 次式 $x^2-x+3$ で割ると整商が $2x-3$ で剰余が $-2x+1$ になる．このことを式で表すと次の等式になる：

$$2x^3-5x^2+7x-8 = (2x-3)(x^2-x+3)-2x+1\ .$$

この等式は，

任意の数 $x$ について　$2x^3-5x^2+7x-8=(2x-3)(x^2-x+3)-2x+1$

となることを意図している；

例 $x$ の 3 次式 $2x^3-5x^2+7x-8$ を 2 次式 $x^2-x+3$ で割ると整商が $2x-3$ で剰余が $-2x+1$ になる．このことを式で表すと次の等式になる：

$$2x^3-5x^2+7x-8=(2x-3)(x^2-x+3)-2x+1\ .$$

この等式は，

　任意の数 $x$ について　$2x^3-5x^2+7x-8=(2x-3)(x^2-x+3)-2x+1$

となることを意図している；つまり $x$ に関する恒等式である． 終

方程式も恒等式も等式であるが，対照的な概念である．

$x$ に関する方程式とは $x$ の値がある条件を満たす数のときに成り立つ等式のことであり，

$x$ に関する恒等式とは $x$ の値がどんな数でも成り立つ等式

のことである．

$\boxed{\text{例}}$ 定数 $a, b$ について，等式 $ax+b=2x+3$ が $x$ に関する恒等式になるとする．

$\boxed{\text{例}}$ 定数 $a, b$ について，等式 $ax + b = 2x + 3$ が $x$ に関する恒等式になるとする．つまり，

$$\text{任意の数 } x \text{ について} \quad ax + b = 2x + 3$$

とする．

$\boxed{例}$ 定数 $a, b$ について，等式 $ax+b=2x+3$ が $x$ に関する恒等式になるとする．つまり，

$$任意の数\ x\ について\quad ax+b=2x+3$$

とする．等式 $ax+b=2x+3$ において $x=0$ とすると，$a\cdot 0+b=2\cdot 0+3$ なので $b=3$ ．

例 定数 $a, b$ について，等式 $ax+b=2x+3$ が $x$ に関する恒等式になるとする．つまり，

任意の数 $x$ について　$ax+b=2x+3$

とする．等式 $ax+b=2x+3$ において $x=0$ とすると， $a\cdot 0+b=2\cdot 0+3$ なので $b=3$ ．等式 $ax+b=2x+3$ において $x=1$ とすると， $a\cdot 1+b=2\cdot 1+3$ なので $a+b=5$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 定数 $a,b$ について，等式 $ax+b=2x+3$ が $x$ に関する恒等式になるとする．つまり，

$$\text{任意の数 } x \text{ について} \quad ax+b=2x+3$$

とする．等式 $ax+b=2x+3$ において $x=0$ とすると，$a\cdot 0+b=2\cdot 0+3$ なので $b=3$ ．等式 $ax+b=2x+3$ において $x=1$ とすると，$a\cdot 1+b=2\cdot 1+3$ なので $a+b=5$ ． $b=3$ なので，$a+3=5$ ，$a=2$ ．

$\boxed{例}$ 定数 $a,b$ について，等式 $ax+b=2x+3$ が $x$ に関する恒等式になるとする．つまり，

$$\text{任意の数 } x \text{ について} \quad ax+b=2x+3$$

とする．等式 $ax+b=2x+3$ において $x=0$ とすると，$a\cdot0+b=2\cdot0+3$ なので $b=3$ ．等式 $ax+b=2x+3$ において $x=1$ とすると，$a\cdot1+b=2\cdot1+3$ なので $a+b=5$ ． $b=3$ なので，$a+3=5$ ，$a=2$ ．こうして次のことが分かる：

等式 $ax+b=2x+3$ が $x$ に関する恒等式 ならば $a=2$ かつ $b=3$ ．

$\boxed{例}$ 定数 $a, b$ について，等式 $ax+b=2x+3$ が $x$ に関する恒等式になるとする．つまり，

$$\text{任意の数 } x \text{ について} \quad ax+b=2x+3$$

とする．等式 $ax+b=2x+3$ において $x=0$ とすると，$a\cdot 0+b=2\cdot 0+3$ なので $b=3$ ．等式 $ax+b=2x+3$ において $x=1$ とすると，$a\cdot 1+b=2\cdot 1+3$ なので $a+b=5$ ． $b=3$ なので，$a+3=5$ ，$a=2$ ．こうして次のことが分かる：

等式 $ax+b=2x+3$ が $x$ に関する恒等式 ならば $a=2$ かつ $b=3$ ．

逆に，$a=2$ かつ $b=3$ のとき，明らかに，

$$\text{任意の数 } x \text{ について} \quad ax+b=2x+3$$

である；

$\boxed{\text{例}}$ 定数 $a,b$ について，等式 $ax+b=2x+3$ が $x$ に関する恒等式になるとする．つまり，

$$\text{任意の数 } x \text{ について} \quad ax+b=2x+3$$

とする．等式 $ax+b=2x+3$ において $x=0$ とすると， $a\cdot 0+b=2\cdot 0+3$ なので $b=3$ ．等式 $ax+b=2x+3$ において $x=1$ とすると， $a\cdot 1+b=2\cdot 1+3$ なので $a+b=5$ ． $b=3$ なので，$a+3=5$ ，$a=2$ ．こうして次のことが分かる：

等式 $ax+b=2x+3$ が $x$ に関する恒等式 ならば $a=2$ かつ $b=3$ ．

逆に， $a=2$ かつ $b=3$ のとき，明らかに，

$$\text{任意の数 } x \text{ について} \quad ax+b=2x+3$$

である；つまり，このとき等式 $ax+b=2x+3$ は $x$ に関する恒等式である：

$a=2$ かつ $b=3$ ならば 等式 $ax+b=2x+3$ は $x$ に関する恒等式．

$\boxed{\text{例}}$ 定数 $a,b$ について，等式 $ax+b=2x+3$ が $x$ に関する恒等式になるとする．つまり，

任意の数 $x$ について　$ax+b=2x+3$

とする．等式 $ax+b=2x+3$ において $x=0$ とすると，$a\cdot 0+b=2\cdot 0+3$ なので $b=3$ ．等式 $ax+b=2x+3$ において $x=1$ とすると，$a\cdot 1+b=2\cdot 1+3$ なので $a+b=5$ ． $b=3$ なので，$a+3=5$ ，$a=2$ ．こうして次のことが分かる：

等式 $ax+b=2x+3$ が $x$ に関する恒等式　ならば　$a=2$ かつ $b=3$ ．

逆に，$a=2$ かつ $b=3$ のとき，明らかに，

任意の数 $x$ について　$ax+b=2x+3$

である；つまり，このとき等式 $ax+b=2x+3$ は $x$ に関する恒等式である：

$a=2$ かつ $b=3$　ならば　等式 $ax+b=2x+3$ は $x$ に関する恒等式.

以上のことをまとめる：

$ax+b=2x+3$ が $x$ に関する恒等式　$\Longleftrightarrow$　$a=2$ かつ $b=3$　． $\boxed{\text{終}}$

この例を一般化すると次の定理が導かれる.

**定理 3.10.1** 定数 $a, b, p, q$ は変数 $x$ と無関係とする. 高々1 次の $x$ の整式 $ax+b$ と $px+q$ とについて,

$$\text{等式 } ax+b=px+q \text{ が } x \text{ に関する恒等式} \iff a=p \text{ かつ } b=q \quad .$$

$\boxed{\text{例}}$ 等式 $a(x+2)+b(x-3)=3x+16$ が $x$ に関する恒等式になるように定数 $a$ と $b$ との値を定める. 左辺を $x$ について整理して定理 **3.10.1** を用いる.

$\boxed{例}$ 等式 $a(x+2)+b(x-3)=3x+16$ が $x$ に関する恒等式になるように定数 $a$ と $b$ との値を定める．左辺を $x$ について整理して定理**3.10.1**を用いる．左辺を $x$ について整理すると

$$a(x+2)+b(x-3) = (a+b)x+2a-3b \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 等式 $a(x+2)+b(x-3)=3x+16$ が $x$ に関する恒等式になるように定数 $a$ と $b$ との値を定める．左辺を $x$ について整理して定理 **3.10.1** を用いる．左辺を $x$ について整理すると

$$a(x+2)+b(x-3) = (a+b)x+2a-3b \ .$$

従って，等式

$$(a+b)x+2a-3b = 3x+16$$

が $x$ に関する恒等式になればよい.

$\boxed{\text{例}}$ 等式 $a(x+2)+b(x-3)=3x+16$ が $x$ に関する恒等式になるように定数 $a$ と $b$ との値を定める．左辺を $x$ について整理して定理**3.10.1**を用いる．左辺を $x$ について整理すると

$$a(x+2)+b(x-3) = (a+b)x+2a-3b \ .$$

従って，等式

$$(a+b)x+2a-3b = 3x+16$$

が $x$ に関する恒等式になればよい．その条件は，左辺と右辺の係数を比べて，

$$a+b = 3 \ \text{かつ} \ 2a-3b = 16 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 等式 $a(x+2)+b(x-3)=3x+16$ が $x$ に関する恒等式になるように定数 $a$ と $b$ との値を定める．左辺を $x$ について整理して定理 **3.10.1** を用いる．左辺を $x$ について整理すると

$$a(x+2)+b(x-3) = (a+b)x+2a-3b \ .$$

従って，等式

$$(a+b)x+2a-3b = 3x+16$$

が $x$ に関する恒等式になればよい．その条件は，左辺と右辺の係数を比べて，

$$a+b=3 \ \text{かつ} \ 2a-3b=16 \ .$$

これらの $a$ と $b$ とに関する方程式を解くと， $a=5$ かつ $b=-2$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問3.10.1}$ 等式 $a(2x-3)+b(x+4)=4x-17$ が $x$ に関する恒等式になるように定数 $a$ と $b$ との値を定めよ.

左辺を $x$ について整理すると

$$(\qquad\qquad)x \qquad\qquad\qquad\qquad = 4x-17\ .$$

この等式が $x$ に関する恒等式になる条件は,

$$= 4 \text{ かつ } \qquad\qquad\qquad\qquad = -17\ .$$

これらの方程式を解くと, $a=$ 　　かつ $b=$ 　　　.

$\boxed{\text{問}3.10.1}$ 等式 $a(2x-3)+b(x+4)=4x-17$ が $x$ に関する恒等式になるように定数 $a$ と $b$ との値を定めよ.

左辺を $x$ について整理すると

$$(2a+b)x-3a+4b = 4x-17 \ .$$

この等式が $x$ に関する恒等式になる条件は,

$$2a+b = 4 \ \text{かつ} \ -3a+4b = -17 \ .$$

これらの方程式を解くと, $a=3$ かつ $b=-2$ . $\boxed{\text{終}}$

高々2 次の整式についても同様のことが成り立つ.

**定理 3.10.2** 定数 $a, b, c, p, q, r$ は変数 $x$ と無関係とする. 高々2 次の $x$ の整式 $ax^2+bx+c$ と $px^2+qx+r$ とについて,

$$\text{等式 } ax^2+bx+c = px^2+qx+r \text{ が } x \text{ に関する恒等式}$$

$$\iff a=p \text{ かつ } b=q \text{ かつ } c=r \quad .$$

$\boxed{\text{例}}$ 等式 $2x^2-3x-1=(x-1)(ax+b)+c$ が $x$ に関する恒等式になるように定数 $a,b,c$ の値を定める．右辺を $x$ について整理して定理 **3.10.2** を用いる．

$\boxed{例}$ 等式 $2x^2-3x-1=(x-1)(ax+b)+c$ が $x$ に関する恒等式になるように定数 $a, b, c$ の値を定める．右辺を $x$ について整理して定理 **3.10.2** を用いる．

右辺を $x$ について整理すると

$$(x-1)(ax+b)+c = ax^2+bx-ax-b+c = ax^2+(b-a)x+c-b \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 等式 $2x^2-3x-1=(x-1)(ax+b)+c$ が $x$ に関する恒等式になるように定数 $a,b,c$ の値を定める．右辺を $x$ について整理して定理 **3.10.2** を用いる．

右辺を $x$ について整理すると

$$(x-1)(ax+b)+c = ax^2+bx-ax-b+c = ax^2+(b-a)x+c-b\ .$$

従って，等式

$$2x^2-3x-1 = ax^2+(b-a)x+c-b$$

が $x$ に関する恒等式になればよい．

$\boxed{\text{例}}$ 等式 $2x^2-3x-1=(x-1)(ax+b)+c$ が $x$ に関する恒等式になるように定数 $a,b,c$ の値を定める．右辺を $x$ について整理して定理 **3.10.2** を用いる．
右辺を $x$ について整理すると

$$(x-1)(ax+b)+c = ax^2+bx-ax-b+c = ax^2+(b-a)x+c-b\ .$$

従って，等式

$$2x^2-3x-1 = ax^2+(b-a)x+c-b$$

が $x$ に関する恒等式になればよい．その条件は，左辺と右辺の係数を比べて，

$$a=2 \text{ かつ } b-a=-3 \text{ かつ } c-b=-1\ .$$

例 等式 $2x^2-3x-1=(x-1)(ax+b)+c$ が $x$ に関する恒等式になるように定数 $a,b,c$ の値を定める．右辺を $x$ について整理して定理 **3.10.2** を用いる．
右辺を $x$ について整理すると

$$(x-1)(ax+b)+c = ax^2+bx-ax-b+c = ax^2+(b-a)x+c-b \ .$$

従って，等式

$$2x^2-3x-1 = ax^2+(b-a)x+c-b$$

が $x$ に関する恒等式になればよい．その条件は，左辺と右辺の係数を比べて，

$$a=2 \ \text{かつ}\ b-a=-3 \ \text{かつ}\ c-b=-1 \ .$$

これらの $a,b,c$ に関する方程式を解くと，$a=2$ かつ $b=-1$ かつ $c=-2$ ．

終

$\boxed{\text{問}3.10.2}$ 等式 $2x^2-5=ax(x-1)+b(x-1)+c$ が $x$ に関する恒等式になるように定数 $a,b,c$ の値を定めよ.

　右辺を $x$ について整理すると

$$2x^2-5= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad .$$

この等式が $x$ に関する恒等式になる条件は,

$$\qquad =2 \text{ かつ } \qquad =0 \text{ かつ } \qquad =-5\ .$$

これらの方程式を解くと, $a=\qquad$ かつ $b=\qquad$ かつ $c=\qquad$ .

問3.10.2 等式 $2x^2-5=ax(x-1)+b(x-1)+c$ が $x$ に関する恒等式になるように定数 $a, b, c$ の値を定めよ.

右辺を $x$ について整理すると

$$2x^2-5 = ax^2+(b-a)x+c-b\ .$$

この等式が $x$ に関する恒等式になる条件は,

$$a = 2\ \text{かつ}\ b-a = 0\ \text{かつ}\ c-b = -5\ .$$

これらの方程式を解くと, $a=2$ かつ $b=2$ かつ $c=-3$ . 終

$\boxed{例}$ 等式 $2x^2-4x+7=a(x+p)^2+q$ が $x$ に関する恒等式になるように定数 $a, p, q$ の値を定める．右辺を $x$ について整理して定理**3.10.2**を用いる．

$\boxed{\text{例}}$ 等式 $2x^2-4x+7=a(x+p)^2+q$ が $x$ に関する恒等式になるように定数 $a,p,q$ の値を定める．右辺を $x$ について整理して定理 **3.10.2** を用いる．右辺を $x$ について整理すると

$$a(x+p)^2+q = ax^2+2apx+ap^2+q \ .$$

例 等式 $2x^2-4x+7=a(x+p)^2+q$ が $x$ に関する恒等式になるように定数 $a,p,q$ の値を定める．右辺を $x$ について整理して定理**3.10.2**を用いる．右辺を $x$ について整理すると

$$a(x+p)^2+q = ax^2+2apx+ap^2+q \ .$$

従って，等式

$$2x^2-4x+7 = ax^2-2apx+ap^2+q \ .$$

が $x$ に関する恒等式になればよい.

$\boxed{\text{例}}$ 等式 $2x^2-4x+7=a(x+p)^2+q$ が $x$ に関する恒等式になるように定数 $a,p,q$ の値を定める．右辺を $x$ について整理して定理**3.10.2**を用いる．右辺を $x$ について整理すると

$$a(x+p)^2+q = ax^2+2apx+ap^2+q \ .$$

従って，等式

$$2x^2-4x+7 = ax^2-2apx+ap^2+q \ .$$

が $x$ に関する恒等式になればよい．その条件は，左辺と右辺の係数を比べて，

$$a=2 \ \text{かつ}\ 2ap=-4 \ \text{かつ}\ ap^2+q=7 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 等式 $2x^2 - 4x + 7 = a(x+p)^2 + q$ が $x$ に関する恒等式になるように定数 $a, p, q$ の値を定める．右辺を $x$ について整理して定理**3.10.2**を用いる．右辺を $x$ について整理すると

$$a(x+p)^2 + q = ax^2 + 2apx + ap^2 + q \ .$$

従って，等式

$$2x^2 - 4x + 7 = ax^2 - 2apx + ap^2 + q \ .$$

が $x$ に関する恒等式になればよい．その条件は，左辺と右辺の係数を比べて，

$$a = 2 \ \text{かつ}\ 2ap = -4 \ \text{かつ}\ ap^2 + q = 7 \ .$$

$a, p, q$ に関するこれらの方程式より，

$$a = 2 \ , \qquad p = \frac{4}{-2a} = -1 \ , \qquad q = 7 - ap^2 = 5 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 等式 $2x^2 - 4x + 7 = a(x+p)^2 + q$ が $x$ に関する恒等式になるように定数 $a, p, q$ の値を定める．右辺を $x$ について整理して定理**3.10.2**を用いる．右辺を $x$ について整理すると

$$a(x+p)^2 + q = ax^2 + 2apx + ap^2 + q \ .$$

従って，等式

$$2x^2 - 4x + 7 = ax^2 - 2apx + ap^2 + q \ .$$

が $x$ に関する恒等式になればよい．その条件は，左辺と右辺の係数を比べて，

$$a = 2 \ \text{かつ}\ 2ap = -4 \ \text{かつ}\ ap^2 + q = 7 \ .$$

$a, p, q$ に関するこれらの方程式より，

$$a = 2 \ , \qquad p = \frac{4}{-2a} = -1 \ , \qquad q = 7 - ap^2 = 5 \ .$$

つまり，$a = 2$ かつ $p = -1$ かつ $q = 5$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}3.10.3}$ 等式 $2x^2-6x+7=a(x+p)^2+q$ が $x$ に関する恒等式になるように定数 $a, p, q$ の値を定めよ.

右辺を $x$ について整理すると

$$2x^2-6x+7= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad .$$

この等式が $x$ に関する恒等式になる条件は,

$$\qquad =2 \text{ かつ } \qquad =-6 \text{ かつ } \qquad\qquad =7 .$$

これらの方程式を解くと, $a=$ 　　かつ $p=$ 　　　かつ $q=$ 　　.

$\boxed{問3.10.3}$ 等式 $2x^2 - 6x + 7 = a(x+p)^2 + q$ が $x$ に関する恒等式になるように定数 $a, p, q$ の値を定めよ.

右辺を $x$ について整理すると

$$2x^2 - 6x + 7 = ax^2 + 2apx + ap^2 + q \ .$$

この等式が $x$ に関する恒等式になる条件は,

$$a = 2 \ \text{かつ}\ 2ap = -6 \ \text{かつ}\ ap^2 + q = 7 \ .$$

これらの方程式を解くと, $a = 2$ かつ $p = -\dfrac{3}{2}$ かつ $q = \dfrac{5}{2}$ . $\boxed{終}$

等式に現れる複数の文字に着目することもある．例えば等式に現れる文字 $x$ と $y$ とに着目すると，$x$ と $y$ との値が何であってもその等式が成り立つ(と考える)とき，その等式を $x$ と $y$ とに関する恒等式という．