3.11 等式の証明

既に分かっている公式や与えられた仮定を用いて等式を導くことを考える.

既に分かっている公式や与えられた仮定を用いて等式を導くことを考える.

数式 A と B とに対して，等式 $A = B$ を導くには次のような方法がある：

(1) 左辺 A を計算して右辺 B に変形する；

(2) 右辺 B を計算して左辺 A に変形する；

(3) 左辺 A と右辺 B とを両方計算して同じ式に変形する；

(4) 左辺から右辺を引いた $A - B$ を計算して 0 にする.

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の複素数 a, b について

$$10(a^2+b^2) = (3a+b)^2+(a-3b)^2 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の複素数 a, b について

$$10(a^2+b^2) = (3a+b)^2+(a-3b)^2 \ .$$

与えられた等式において，左辺は整理されているので，右辺を計算して左辺に変形する.

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の複素数 a, b について

$$10(a^2+b^2) = (3a+b)^2+(a-3b)^2 \ .$$

与えられた等式において，左辺は整理されているので，右辺を計算して左辺に変形する．

$$\begin{aligned}(3a+b)^2+(a-3b)^2 &= (3a)^2+6ab+b^2+a^2-6ab+(3b)^2 \\ &= 9a^2+b^2+a^2+9b^2 = 10a^2+10b^2 \\ &= 10(a^2+b^2) \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の複素数 a, b について

$$10(a^2+b^2) = (3a+b)^2+(a-3b)^2 \ .$$

与えられた等式において，左辺は整理されているので，右辺を計算して左辺に変形する．

$$\begin{aligned}(3a+b)^2+(a-3b)^2 &= (3a)^2+6ab+b^2+a^2-6ab+(3b)^2 \\ &= 9a^2+b^2+a^2+9b^2 = 10a^2+10b^2 \\ &= 10(a^2+b^2) \ .\end{aligned}$$

故に，任意の複素数 a, b について

$$10(a^2+b^2) = (3a+b)^2+(a-3b)^2 \ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{問3.11.1}$ 次のことを示せ：任意の複素数 a, b, c について

$$2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ .$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 =$$

故に，任意の複素数 a, b, c について

$\boxed{\text{問}3.11.1}$ **次のことを示せ：任意の複素数 a, b, c について**

$$2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ .$$

$$\begin{aligned}(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 &= a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2 \\ &= 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca \\ &= 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \ .\end{aligned}$$

故に，任意の複素数 a, b, c について

$$2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

例 次のことを示す：任意の複素数 a, b について

$$(ab+1)^2+(a-b)^2 = (a^2+1)(b^2+1) \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の複素数 a, b について

$$(ab+1)^2+(a-b)^2 = (a^2+1)(b^2+1)\ .$$

与えられた等式の左辺と右辺とを両方計算して同じ式に変形する.

例 次のことを示す：任意の複素数 a, b について

$$(ab+1)^2+(a-b)^2 = (a^2+1)(b^2+1)\ .$$

与えられた等式の左辺と右辺とを両方計算して同じ式に変形する．与えられた等式の左辺は

$$(ab+1)^2+(a-b)^2 = (ab)^2+2ab+1+a^2-2ab+b^2 = a^2b^2+a^2+b^2+1\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の複素数 a, b について

$$(ab+1)^2+(a-b)^2 = (a^2+1)(b^2+1) \ .$$

与えられた等式の左辺と右辺とを両方計算して同じ式に変形する．与えられた等式の左辺は

$$(ab+1)^2+(a-b)^2 = (ab)^2+2ab+1+a^2-2ab+b^2 = a^2b^2+a^2+b^2+1 \ .$$

与えられた等式の右辺は

$$(a^2+1)(b^2+1) = a^2b^2+a^2+b^2+1 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の複素数 a, b について

$$(ab+1)^2 + (a-b)^2 = (a^2+1)(b^2+1) \ .$$

与えられた等式の左辺と右辺とを両方計算して同じ式に変形する．与えられた等式の左辺は

$$(ab+1)^2 + (a-b)^2 = (ab)^2 + 2ab + 1 + a^2 - 2ab + b^2 = a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 \ .$$

与えられた等式の右辺は

$$(a^2+1)(b^2+1) = a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 \ .$$

故に，任意の複素数 a, b について

$$(ab+1)^2 + (a-b)^2 = (a^2+1)(b^2+1) \ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{問3.11.2}$ 次のことを示せ：任意の複素数 a, b について

$$(ab+6)^2-(2a+3b)^2 = (a^2-9)(b^2-4) \ .$$

与えられた等式の左辺は

$$(ab+6)^2-(2a+3b)^2 =$$

与えられた等式の右辺は

$$(a^2-9)(b^2-4) =$$

故に，任意の複素数 a, b について

$$=$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}3.11.2}$ 次のことを示せ：任意の複素数 a, b について

$$(ab+6)^2-(2a+3b)^2 = (a^2-9)(b^2-4) \ .$$

与えられた等式の左辺は

$$\begin{aligned}(ab+6)^2-(2a+3b)^2 &= a^2b^2+12ab+36-(4a^2+12ab+9b^2) \\ &= a^2b^2-4a^2-9b^2+36 \ .\end{aligned}$$

与えられた等式の右辺は

$$(a^2-9)(b^2-4) = a^2b^2-4a^2-9b^2+36 \ .$$

故に，任意の複素数 a, b について

$$(ab+6)^2-(2a+3b)^2 = (a^2-9)(b^2-4) \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の複素数 a, b, c について

$$(a+b)^2 + 4c(a+b+c) = (a+b+2c)^2 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の複素数 a, b, c について

$$(a+b)^2 + 4c(a+b+c) = (a+b+2c)^2 \ .$$

左辺と右辺とに 2 乗の式があるので，左辺から右辺を引くと計算が簡単になる.

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の複素数 a, b, c について

$$(a+b)^2 + 4c(a+b+c) = (a+b+2c)^2 \ .$$

左辺と右辺とに 2 乗の式があるので，左辺から右辺を引くと計算が簡単になる.

$$\begin{aligned}
&(a+b)^2 + 4c(a+b+c) - (a+b+2c)^2 \\
&= (a+b)^2 - (a+b+2c)^2 + 4c(a+b+c) \\
&= (a+b+a+b+2c)\{a+b-(a+b+2c)\} + 4c(a+b+c) \\
&= (2a+2b+2c)(-2c) + 4c(a+b+c) \\
&= -4c(a+b+c) + 4c(a+b+c) \\
&= 0 \ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の複素数 a, b, c について

$$(a+b)^2+4c(a+b+c) = (a+b+2c)^2 \ .$$

左辺と右辺とに 2 乗の式があるので，左辺から右辺を引くと計算が簡単になる．

$$\begin{aligned}
&(a+b)^2+4c(a+b+c)-(a+b+2c)^2 \\
&= (a+b)^2-(a+b+2c)^2+4c(a+b+c) \\
&= (a+b+a+b+2c)\{a+b-(a+b+2c)\}+4c(a+b+c) \\
&= (2a+2b+2c)(-2c)+4c(a+b+c) \\
&= -4c(a+b+c)+4c(a+b+c) \\
&= 0 \ .
\end{aligned}$$

故に，任意の複素数 a, b について

$$(a+b)^2+4c(a+b+c) = (a+b+2c)^2 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}3.11.3}$ 次のことを示せ：任意の複素数 a, b, c について

$$(a+b-c)^2 - 4a(b-c) = (a-b+c)^2 \ .$$

$$(a+b-c)^2 - 4a(b-c) - (a-b+c)^2$$

$$=$$

故に，任意の複素数 a, b について

$$=$$

$\boxed{\text{問}3.11.3}$ 次のことを示せ：任意の複素数 a, b, c について

$$(a+b-c)^2 - 4a(b-c) = (a-b+c)^2 \ .$$

$$\begin{aligned}
&(a+b-c)^2 - 4a(b-c) - (a-b+c)^2 \\
&= (a+b-c)^2 - (a-b+c)^2 - 4a(b-c) \\
&= (a+b-c+a-b+c)\{a+b-c-(a-b+c)\} - 4a(b-c) \\
&= 2a(2b-2c) - 4a(b-c) \\
&= 0 \ .
\end{aligned}$$

故に，任意の複素数 a, b について

$$(a+b-c)^2 - 4a(b-c) = (a-b+c)^2 \ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

等式を用いて別の等式を導くこともある.

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の複素数 a, b について，

$$a+b=2 \quad \text{ならば} \quad a^3+b^3=4a+4b-6ab \quad .$$

例 次のことを示す：任意の複素数 a, b について，

$$a+b=2 \quad \text{ならば} \quad a^3+b^3=4a+4b-6ab \quad .$$

仮定 $a+b=2$ より $b=2-a$ なので，b に $2-a$ を代入する．

例 次のことを示す：任意の複素数 a, b について，

$$a+b=2 \quad \text{ならば} \quad a^3+b^3=4a+4b-6ab \quad .$$

仮定 $a+b=2$ より $b=2-a$ なので，b に $2-a$ を代入する．

複素数 a, b について $a+b=2$ と仮定する．$b=2-a$ ．

$\boxed{例}$ 次のことを示す：任意の複素数 a, b について，

$$a+b=2 \quad ならば \quad a^3+b^3=4a+4b-6ab \quad .$$

仮定 $a+b=2$ より $b=2-a$ なので，b に $2-a$ を代入する.

複素数 a, b について $a+b=2$ と仮定する. $b=2-a$. このとき，

$$a^3+b^3=a^3+(2-a)^3=a^3+8-12a+6a^2-a^3=6a^2-12a+8 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の複素数 a, b について，

$$a + b = 2 \quad \text{ならば} \quad a^3 + b^3 = 4a + 4b - 6ab \quad .$$

仮定 $a+b=2$ より $b=2-a$ なので，b に $2-a$ を代入する．

複素数 a, b について $a+b=2$ と仮定する． $b=2-a$ ．このとき，

$$a^3 + b^3 = a^3 + (2-a)^3 = a^3 + 8 - 12a + 6a^2 - a^3 = 6a^2 - 12a + 8 \ .$$

また

$$\begin{aligned} 4a + 4b - 6ab &= 4a + 4(2-a) - 6a(2-a) = 4a + 8 - 4a - 12a + 6a^2 \\ &= 6a^2 - 12a + 8 \ . \end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の複素数 a, b について，

$$a+b=2 \quad \text{ならば} \quad a^3+b^3=4a+4b-6ab \quad .$$

仮定 $a+b=2$ より $b=2-a$ なので，b に $2-a$ を代入する．

複素数 a, b について $a+b=2$ と仮定する． $b=2-a$ ． このとき，

$$a^3+b^3=a^3+(2-a)^3=a^3+8-12a+6a^2-a^3=6a^2-12a+8 \ .$$

また

$$\begin{aligned} 4a+4b-6ab &= 4a+4(2-a)-6a(2-a)=4a+8-4a-12a+6a^2 \\ &= 6a^2-12a+8 \ . \end{aligned}$$

よって $a^3+b^3=4a+4b-6ab$ ．

$\boxed{例}$ 次のことを示す：任意の複素数 a, b について，

$$a + b = 2 \quad \text{ならば} \quad a^3 + b^3 = 4a + 4b - 6ab \quad .$$

仮定 $a + b = 2$ より $b = 2 - a$ なので，b に $2 - a$ を代入する．

複素数 a, b について $a + b = 2$ と仮定する． $b = 2 - a$ ． このとき，

$$a^3 + b^3 = a^3 + (2-a)^3 = a^3 + 8 - 12a + 6a^2 - a^3 = 6a^2 - 12a + 8 \ .$$

また

$$\begin{aligned} 4a + 4b - 6ab &= 4a + 4(2-a) - 6a(2-a) = 4a + 8 - 4a - 12a + 6a^2 \\ &= 6a^2 - 12a + 8 \ . \end{aligned}$$

よって $a^3 + b^3 = 4a + 4b - 6ab$ ．

故に，任意の複素数 a, b について，

$$a + b = 2 \quad \text{ならば} \quad a^3 + b^3 = 4a + 4b - 6ab \ . \qquad \boxed{終}$$

$\boxed{\text{問}3.11.4}$ 次のことを示せ：任意の複素数 a, b について，

$$a - b = 3 \quad \text{ならば} \quad a^3 - b^3 = 9(ab + a - b) \qquad .$$

複素数 a, b について $a - b = 3$ と仮定する． $b =$ ． このとき，

$a^3 - b^3 =$

また

$9(ab + a - b) =$

よって ．

故に，任意の複素数 a, b について，

ならば

$\boxed{問3.11.4}$ 次のことを示せ：任意の複素数 a, b について，

$$a - b = 3 \quad \text{ならば} \quad a^3 - b^3 = 9(ab + a - b) \quad .$$

複素数 a, b について $a - b = 3$ と仮定する． $b = a - 3$ ．このとき，

$$a^3 - b^3 = a^3 - (a-3)^3 = a^3 - (a^3 - 9a^2 + 27a - 27) = 9a^2 - 27a - 27 \ .$$

また

$$9(ab + a - b) = 9\{a(a-3) + a - (a-3)\} = 9(a^2 - 3a + 9) = 9a^2 - 27a + 27 \ .$$

よって $a^3 - b^3 = 9(ab + a - b)$ ．

故に，任意の複素数 a, b について，

$$a - b = 3 \ \text{ならば} \ a^3 - b^3 = 9(ab + a - b) \ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}3.11.5}$ 次のことを示せ：任意の複素数 a, b, c について，

$$a+b+c = 0 \quad \text{ならば} \quad a^3+b^3+c^3 = 3abc \qquad .$$

複素数 a, b, c について $a+b+c=0$ と仮定する． $c =$ ． このとき，

$$a^3+b^3+c^3 =$$

また

$$3abc =$$

よって ．

故に，任意の複素数 a, b, c について，

ならば

$\boxed{\text{問}3.11.5}$ 次のことを示せ：任意の複素数 a, b, c について，

$$a+b+c=0 \quad \text{ならば} \quad a^3+b^3+c^3=3abc \quad .$$

複素数 a, b, c について $a+b+c=0$ と仮定する． $c=-a-b$ ．このとき，

$$a^3+b^3+c^3=a^3+b^3+(-a-b)^3=a^3+b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3$$

$$=-3ab(a+b) \ .$$

また

$$3abc=3ab(-a-b)=-3ab(a+b) \ .$$

よって $a^3+b^3+c^3=3abc$ ．

故に，任意の複素数 a, b, c について，

$$a+b+c=0 \ \text{ならば} \ a^3+b^3+c^3=3abc \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の複素数 a, b について，

$$a^2 + b \neq b^2 + a \quad \text{ならば} \quad a + b \neq 1 \quad .$$

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の複素数 a,b について，

$$a^2+b \neq b^2+a \quad \text{ならば} \quad a+b \neq 1 \quad .$$

“ $a+b=1$ ならば $a^2+b=b^2+a$ ” がいえれば，その対偶 “ $a^2+b \neq b^2+a$ ならば $a+b \neq 1$ ” がいえる.

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の複素数 a, b について，

$$a^2 + b \neq b^2 + a \quad \text{ならば} \quad a + b \neq 1 \quad .$$

“ $a + b = 1$ ならば $a^2 + b = b^2 + a$ ” がいえれば，その対偶 “ $a^2 + b \neq b^2 + a$ ならば $a + b \neq 1$ ” がいえる.

　複素数 a, b について $a + b = 1$ と仮定する.

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の複素数 a, b について，

$$a^2 + b \neq b^2 + a \quad \text{ならば} \quad a + b \neq 1 \quad .$$

“ $a + b = 1$ ならば $a^2 + b = b^2 + a$ ” がいえれば，その対偶 “ $a^2 + b \neq b^2 + a$ ならば $a + b \neq 1$ ” がいえる．

複素数 a, b について $a + b = 1$ と仮定する．このとき， $b = 1 - a$ なので，

$$a^2 + b = a^2 + 1 - a = a^2 - a + 1 \ ,$$

$$b^2 + a = (1 - a)^2 + a = 1 - 2a + a^2 + a = a^2 - a + 1 \ ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の複素数 a, b について，

$$a^2 + b \neq b^2 + a \quad \text{ならば} \quad a + b \neq 1 \quad .$$

“ $a + b = 1$ ならば $a^2 + b = b^2 + a$ ” がいえれば，その対偶 “ $a^2 + b \neq b^2 + a$ ならば $a + b \neq 1$ ” がいえる．

　複素数 a, b について $a + b = 1$ と仮定する．このとき，$b = 1 - a$ なので，

$$a^2 + b = a^2 + 1 - a = a^2 - a + 1 \ ,$$

$$b^2 + a = (1 - a)^2 + a = 1 - 2a + a^2 + a = a^2 - a + 1 \ ,$$

よって $a^2 + b = b^2 + a$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の複素数 a, b について，

$$a^2+b \neq b^2+a \quad \text{ならば} \quad a+b \neq 1 \quad .$$

“ $a+b=1$ ならば $a^2+b=b^2+a$ ” がいえれば，その対偶 “ $a^2+b \neq b^2+a$ ならば $a+b \neq 1$ ” がいえる．

複素数 a, b について $a+b=1$ と仮定する．このとき， $b=1-a$ なので，

$$a^2+b=a^2+1-a=a^2-a+1 \ ,$$

$$b^2+a=(1-a)^2+a=1-2a+a^2+a=a^2-a+1 \ ,$$

よって $a^2+b=b^2+a$.

故に，任意の複素数 a, b について，

$$a+b=1 \quad \text{ならば} \quad a^2+b=b^2+a \ ,$$

例 次のことを示す：任意の複素数 a, b について，

$$a^2+b \neq b^2+a \quad \text{ならば} \quad a+b \neq 1 \quad .$$

“ $a+b=1$ ならば $a^2+b=b^2+a$ ” がいえれば，その対偶 “ $a^2+b \neq b^2+a$ ならば $a+b \neq 1$ ” がいえる．

複素数 a, b について $a+b=1$ と仮定する．このとき，$b=1-a$ なので，

$$a^2+b=a^2+1-a=a^2-a+1 \ ,$$

$$b^2+a=(1-a)^2+a=1-2a+a^2+a=a^2-a+1 \ ,$$

よって $a^2+b=b^2+a$ ．

故に，任意の複素数 a, b について，

$$a+b=1 \ \text{ならば} \ a^2+b=b^2+a \ ,$$

対偶をとると，

$$a^2+b \neq b^2+a \ \text{ならば} \ a+b \neq 1 \ .$$

終

$\boxed{\text{問}3.11.6}$ 次のことを示せ：任意の複素数 a, b, c について，

$$a^2+b^2+c^2 \neq -2(ab+bc+ca) \quad \text{ならば} \quad a+b+c \neq 0 \quad .$$

複素数 a, b, c について $a+b+c=0$ と仮定する． $c=$ ． このとき，

$a^2+b^2+c^2 =$

$-2(ab+bc+ca) =$

よって

故に，任意の複素数 a, b, c について，

ならば

対偶をとると，

ならば

$\boxed{\text{問}3.11.6}$ 次のことを示せ：任意の複素数 a, b, c について，

$$a^2+b^2+c^2 \neq -2(ab+bc+ca) \quad \text{ならば} \quad a+b+c \neq 0 \quad .$$

複素数 a, b, c について $a+b+c=0$ と仮定する． $c=-a-b$ ．このとき，

$$a^2+b^2+c^2 = a^2+b^2+(-a-b)^2 = a^2+b^2+a^2+2ab+b^2 = 2(a^2+ab+b^2) \ ,$$

$$-2(ab+bc+ca) = -2\{ab+b(-a-b)+(-a-b)a\} = -2(-a^2-b^2-ab)$$
$$= 2(a^2+ab+b^2) \ ,$$

よって $a^2+b^2+c^2 = -2(ab+bc+ca)$ ．

故に，任意の複素数 a, b, c について，

$$a+b+c=0 \ \text{ならば} \ a^2+b^2+c^2 = -2(ab+bc+ca) \ ,$$

対偶をとると，

$$a^2+b^2+c^2 \neq -2(ab+bc+ca) \ \text{ならば} \ a+b+c \neq 0 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$