4.7 2次式の平方完成

変数 x の 2 次式の平方完成とは，x の 2 次式を次の形に変形することである：

$$a(x+p)^2+q \qquad (\ a, p, q \text{ は定数で } a \neq 0\ ).$$

変数 x の 2 次式の平方完成とは，x の 2 次式を次の形に変形することである：

$$a(x+p)^2+q \qquad （ a,p,q \text{ は定数で } a\neq 0 ）.$$

平方完成では次のような変形が重要になる：$x^2+2\frac{\square}{2}x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2=\left(x+\frac{\square}{2}\right)^2$ なので，

$$\begin{aligned} x^2+\square x &= x^2+2\frac{\square}{2}x = x^2+2\frac{\square}{2}x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2-\left(\frac{\square}{2}\right)^2 \\ &= \left(x+\frac{\square}{2}\right)^2-\frac{\square^2}{4} \ . \end{aligned}$$

変数 x の 2 次式の平方完成とは，x の 2 次式を次の形に変形することである：

$$a(x+p)^2+q \qquad （a, p, q \text{ は定数で } a \neq 0 ）.$$

平方完成では次のような変形が重要になる：$x^2+2\dfrac{\square}{2}x+\left(\dfrac{\square}{2}\right)^2=\left(x+\dfrac{\square}{2}\right)^2$ なので，

$$\begin{aligned} x^2+\square x &= x^2+2\frac{\square}{2}x = x^2+2\frac{\square}{2}x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2-\left(\frac{\square}{2}\right)^2 \\ &= \left(x+\frac{\square}{2}\right)^2-\frac{\square^2}{4} \ . \end{aligned}$$

x の係数 $\square$ の $\dfrac{1}{2}$ 倍の 2 乗 $\left(\dfrac{\square}{2}\right)^2$ を足して引くことが肝である.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の 2 次式 $2x^2+6x+5$ を平方完成する.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の 2 次式 $2x^2+6x+5$ を平方完成する. $2x^2+6x$ の部分を x^2 の係数 2 で括る:

$$2x^2+6x+5 = 2(x^2+3x)+5 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の 2 次式 $2x^2+6x+5$ を平方完成する. $2x^2+6x$ の部分を x^2 の係数 2 で括る:

$$2x^2+6x+5 = 2(x^2+3x)+5 \ .$$

括弧 ( ) の中の 2 次式 x^2+3x について, x の係数 3 の $\dfrac{1}{2}$ 倍の 2 乗 $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$ を足して引く.

例 変数 x の 2 次式 $2x^2+6x+5$ を平方完成する．$2x^2+6x$ の部分を x^2 の係数 2 で括る：

$$2x^2+6x+5 = 2(x^2+3x)+5\ .$$

括弧 ( ) の中の 2 次式 x^2+3x について，x の係数 3 の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗 $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ を足して引く．$x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$ なので，

$$x^2+2ax+a^2=(x+2)^2$$

例 変数 x の 2 次式 $2x^2+6x+5$ を平方完成する． $2x^2+6x$ の部分を x^2 の係数 2 で括る：

$$2x^2+6x+5 = 2(x^2+3x)+5 \ .$$

括弧 ( ) の中の 2 次式 x^2+3x について， x の係数 3 の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗 $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ を足して引く． $x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$ なので，

$$x^2+3x = x^2+2\cdot\frac{3}{2}x = x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3^2}{2^2} \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の 2 次式 $2x^2+6x+5$ を平方完成する．$2x^2+6x$ の部分を x^2 の係数 2 で括る：

$$2x^2+6x+5 = 2(x^2+3x)+5 \ .$$

括弧（ ）の中の 2 次式 x^2+3x について，x の係数 3 の $\dfrac{1}{2}$ 倍の 2 乗 $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$ を足して引く． $x^2+2\cdot\dfrac{3}{2}x+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2$ なので，

$$x^2+3x = x^2+2\cdot\frac{3}{2}x = x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3^2}{2^2} \ .$$

よって

$$2x^2+6x+5=2(x^2+3x)+5=2\left\{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3^2}{2^2}\right\}+5$$

例 変数 x の 2 次式 $2x^2+6x+5$ を平方完成する． $2x^2+6x$ の部分を x^2 の係数 2 で括る：

$$2x^2+6x+5 = 2(x^2+3x)+5 \ .$$

括弧（ ）の中の 2 次式 x^2+3x について， x の係数 3 の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗 $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ を足して引く． $x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$ なので，

$$x^2+3x = x^2+2\cdot\frac{3}{2}x = x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3^2}{2^2} \ .$$

よって

$$\begin{aligned} 2x^2+6x+5 &= 2(x^2+3x)+5 = 2\left\{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3^2}{2^2}\right\}+5 = 2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\boxed{2}\cdot\frac{3^2}{2^2}+5 \\ &= 2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2} \ . \end{aligned}$$

2 を掛けることを忘れないこと．

例 変数 x の 2 次式 $2x^2+6x+5$ を平方完成する．$2x^2+6x$ の部分を x^2 の係数 2 で括る：

$$2x^2+6x+5 = 2(x^2+3x)+5 \ .$$

括弧（ ）の中の 2 次式 x^2+3x について，x の係数 3 の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗 $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ を足して引く．$x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$ なので，

$$x^2+3x = x^2+2\cdot\frac{3}{2}x = x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3^2}{2^2} \ .$$

よって

$$\begin{aligned} 2x^2+6x+5 &= 2(x^2+3x)+5 = 2\left\{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3^2}{2^2}\right\}+5 = 2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot\frac{3^2}{2^2}+5 \\ &= 2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2} \ . \end{aligned}$$

x の 2 次式 $2x^2+6x+5$ を平方完成すると $2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$ である．

x に関する 2 次方程式 $2x^2+6x+5=0$ を解く際には,

両辺を 2 で割って $x^2+3x+\dfrac{5}{2}=0$,

両辺から $\dfrac{5}{2}$ を引いて $x^2+3x=-\dfrac{5}{2}$,

両辺に $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$ を足して $x^2+3x+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{5}{2}$, $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2=-\dfrac{1}{4}$,

などと等式を同値な等式に変形した.

x に関する 2 次方程式 $2x^2+6x+5=0$ を解く際には,

両辺を 2 で割って $x^2+3x+\frac{5}{2}=0$,

両辺から $\frac{5}{2}$ を引いて $x^2+3x=-\frac{5}{2}$,

両辺に $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ を足して $x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{2}$, $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}$,

などと等式を同値な等式に変形した. しかし, 関数を表す 2 次式の平方完成では,

$$\begin{aligned}2x^2+6x+5=2(x^2+3x)+5&=2\left\{x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}+5\\&=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

のように, 元の 2 次式 $2x^2+6x+5$ と等しい 2 次式に変形しなければならない. 終

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の 2 次式 $4x^2 - 5x + 1$ を平方完成する.

例 変数 x の 2 次式 $4x^2-5x+1$ を平方完成する.

$$4x^2-5x+1$$

x^2 の項 x の項で x^2 の係数を括りだす: $= 4\left(x^2-\frac{5}{4}x\right)+1$

例 変数 x の 2 次式 $4x^2-5x+1$ を平方完成する.

$$4x^2-5x+1$$

x^2 の項 x の項で x^2 の係数を括りだす:

$$=4\left(x^2-\frac{5}{4}x\right)+1$$

$x^2\pm\square x$ の部分に x の係数の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗を足して引く:

$$=4\left\{x^2-2\cdot\frac{5}{8}x+\left(\frac{5}{8}\right)^2-\left(\frac{5}{8}\right)^2\right\}+1$$

$$=4\left\{\left(x-\frac{5}{8}\right)^2-\frac{5^2}{8^2}\right\}+1$$

例 変数 x の 2 次式 $4x^2-5x+1$ を平方完成する.

$$
\begin{aligned}
& 4x^2-5x+1 \\
\text{x^2 の項 x の項で x^2 の係数を括りだす}:\quad &= 4\left(x^2-\frac{5}{4}x\right)+1 \\
\text{$x^2 \pm \square x$ の部分に x の係数の $\frac{1}{2}$ 倍の} \quad &= 4\left\{x^2-2\cdot\frac{5}{8}x+\left(\frac{5}{8}\right)^2-\left(\frac{5}{8}\right)^2\right\}+1 \\
\text{2 乗を足して引く}:\quad &= 4\left\{\left(x-\frac{5}{8}\right)^2-\frac{5^2}{8^2}\right\}+1 \\
\text{分配法則を用いる}:\quad &= 4\left(x-\frac{5}{8}\right)^2-4\cdot\frac{5^2}{8^2}+1 \\
&= 4\left(x-\frac{5}{8}\right)^2-\frac{9}{16}\ .
\end{aligned}
$$

終

$\boxed{\text{問}4.7.1}$ 変数 x の 2 次式 $3x^2-5x+1$ を平方完成せよ.

問4.7.1 変数 x の 2 次式 $3x^2-5x+1$ を平方完成せよ.

$$
\begin{aligned}
3x^2-5x+1 &= 3\left(x^2-\frac{5}{3}x\right)+1 \\
&= 3\left\{x^2-2\cdot\frac{5}{6}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{5^2}{6^2}\right\}+1 \\
&= 3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{12}+\frac{12}{12} \\
&= 3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{13}{12}\ .
\end{aligned}
$$

終

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の 2 次式 $-3x^2+8x-4$ を平方完成する.

$$
\begin{aligned}
-3x^2+8x-4 &= -3\left(x^2-\frac{8}{3}x\right)-4 \\
&= -3\left\{x^2-2\cdot\frac{4}{3}x+\left(\frac{4}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2\right\}-4 \\
&= -3\left\{\left(x-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{4^2}{3^2}\right\}-4 \\
&= -3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2-(-3)\cdot\frac{4^2}{3^2}-4 \\
&= -3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{4}{3} \quad .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}4.7.2}$ 変数 x の 2 次式 $-5x^2-6x-3$ を平方完成せよ.

$\boxed{\text{問}4.7.2}$ 変数 x の 2 次式 $-5x^2-6x-3$ を平方完成せよ.

$$\begin{aligned}
-5x^2-6x-3 &= -5\left(x^2+\frac{6}{5}x\right)-3 \\
&= -5\left\{x^2+2\cdot\frac{3}{5}x+\left(\frac{3}{5}\right)^2-\frac{3^2}{5^2}\right\}-3 \\
&= -5\left(x+\frac{3}{5}\right)^2+\frac{9}{5}-\frac{15}{5} \\
&= -5\left(x+\frac{3}{5}\right)^2-\frac{6}{5}\ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

例 変数 x の 2 次式 $\frac{9}{5}x^2-3x+2$ を平方完成する.

$$\begin{aligned}\frac{9}{5}x^2-3x+2 &= \frac{9}{5}\left(x^2-\frac{5}{9}\cdot 3x\right)+2\\ &= \frac{9}{5}\left(x^2-\frac{5}{3}x\right)+2\\ &= \frac{9}{5}\left\{x^2-2\cdot\frac{5}{6}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{5^2}{6^2}\right\}+2\\ &= \frac{9}{5}\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{9}{5}\cdot\frac{5^2}{6^2}+2\\ &= \frac{9}{5}\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{24}\ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{\text{問}\,4.7.3}$ 変数 x の 2 次式 $\dfrac{5}{2}x^2 - 4x + 3$ を平方完成せよ.

問 4.7.3 変数 x の 2 次式 $\frac{5}{2}x^2 - 4x + 3$ を平方完成せよ.

$$
\begin{aligned}
\frac{5}{2}x^2 - 4x + 3 &= \frac{5}{2}\left(x^2 - \frac{8}{5}x\right) + 3 \\
&= \frac{5}{2}\left\{x^2 - 2\cdot\frac{4}{5}x + \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \frac{4^2}{5^2}\right\} + 3 \\
&= \frac{5}{2}\left(x - \frac{4}{5}\right)^2 - \frac{8}{5} + \frac{15}{5} \\
&= \frac{5}{2}\left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{7}{5} \ .
\end{aligned}
$$

終

$\boxed{問 4.7.4}$ 変数 x の 2 次式 $-\frac{8}{3}x^2+2x+1$ を平方完成せよ.

問 4.7.4 変数 x の 2 次式 $-\frac{8}{3}x^2+2x+1$ を平方完成せよ.

$$
\begin{aligned}
-\frac{8}{3}x^2+2x+1 &= -\frac{8}{3}\left(x^2-\frac{3}{4}x\right)+1 \\
&= -\frac{8}{3}\left\{x^2-2\cdot\frac{3}{8}x+\left(\frac{3}{8}\right)^2-\frac{3^2}{8^2}\right\}+1 \\
&= -\frac{8}{3}\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{3}{8}+\frac{8}{8} \\
&= -\frac{8}{3}\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{11}{8}\ .
\end{aligned}
$$

終

一般的に，変数 x の 2 次式 ax^2+bx+c （ a,b,c は定数で $a \neq 0$ ）を平方完成すると次のようになる：

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \\ &= a\left\{x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c \\ &= a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right\}+c \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+\frac{4ac}{4a} \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \quad . \end{aligned}$$

このように，変数 x の任意の 2 次式は平方完成して

$$a(x+p)^2+q \qquad (\ a, p, q \text{ は定数で } a \neq 0\ )$$

の形に直すことができる．この 2 次式の平方完成は重要で，以後しばしば用いる．結果ではなく必ず変形する要領を憶えること．