4.10 簡単な有理関数のグラフ

分母分子が整式である分数式と等しくなる式を有理式といった.

分母分子が整式である分数式と等しくなる式を有理式といった．変数 x の関数 y が有理関数であるとは， $y = f(x)$ である式 $f(x)$ が x の有理式になることである．

分母分子が整式である分数式と等しくなる式を有理式といった．変数 x の関数 y が有理関数であるとは， $y=f(x)$ である式 $f(x)$ が x の有理式になることである．例えば，変数 x と y とについて，

$$y = 3+\frac{7}{2x+5}\ , \qquad y = \frac{8x+5}{x^2-3x+6}\ , \qquad y = 2x-5+\frac{6}{3x-1}$$

などであるとき，右辺は x の有理式なので，変数 y は 変数 x の有理関数である．

分母分子が整式である分数式と等しくなる式を有理式といった．変数 x の関数 y が有理関数であるとは， $y=f(x)$ である式 $f(x)$ が x の有理式になることである．例えば，変数 x と y とについて，

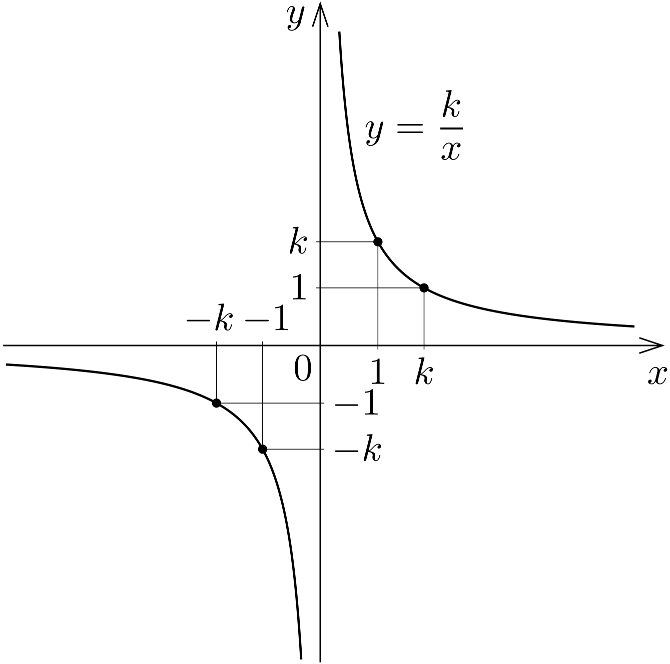
$$y = 3+\frac{7}{2x+5}\ , \qquad y = \frac{8x+5}{x^2-3x+6}\ , \qquad y = 2x-5+\frac{6}{3x-1}$$

などであるとき，右辺は x の有理式なので，変数 y は 変数 x の有理関数である．整式は有理式なので，有理整関数は有理関数である．

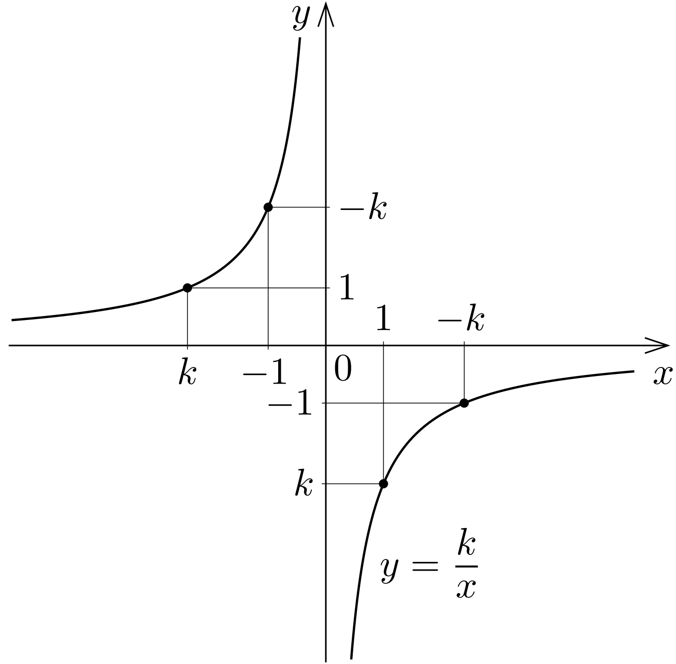
まず，0 でない定数 k に対して，変数 x の関数 $y=\dfrac{k}{x}$ を考える．この関数は反比例といわれる．次のことに注意すること：$x=0$ のとき $y=\dfrac{k}{x}$ の値は無い．

まず，0 でない定数 k に対して，変数 x の関数 $y=\dfrac{k}{x}$ を考える．この関数は反比例といわれる．次のことに注意すること：$x=0$ のとき $y=\dfrac{k}{x}$ の値は無い．

xy 座標平面において，$y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを描く．



$k > 0$ のときの $y = \frac{k}{x}$ のグラフ



$k < 0$ のときの $y = \frac{k}{x}$ のグラフ

次のことが成り立つ：xy 座標平面において，関数 $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフは，

(1) 原点に関して対称であり，

(2) 直線 $y=x$ 及び直線 $y=-x$ に関して対称であり，

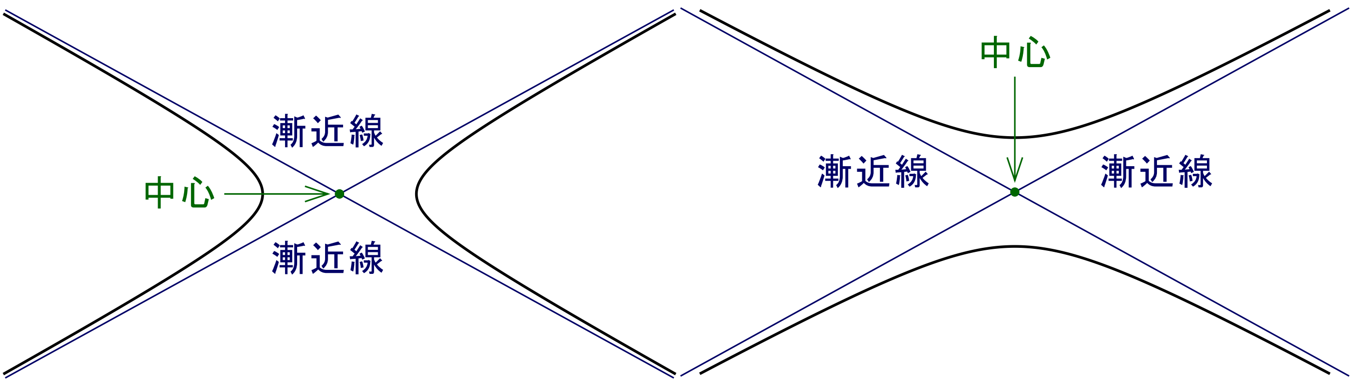
(3) x 軸及び y 軸に限りなく近付いていく．

xy 座標平面における関数 $y = \dfrac{k}{x}$ のグラフは双曲線とよばれる曲線である.

xy 座標平面における関数 $y = \dfrac{k}{x}$ のグラフは双曲線とよばれる曲線である.

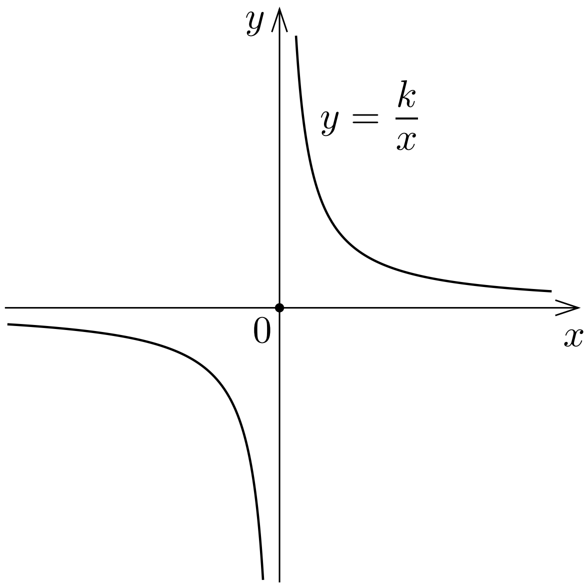
xy 座標平面における関数 $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフは双曲線とよばれる曲線である.

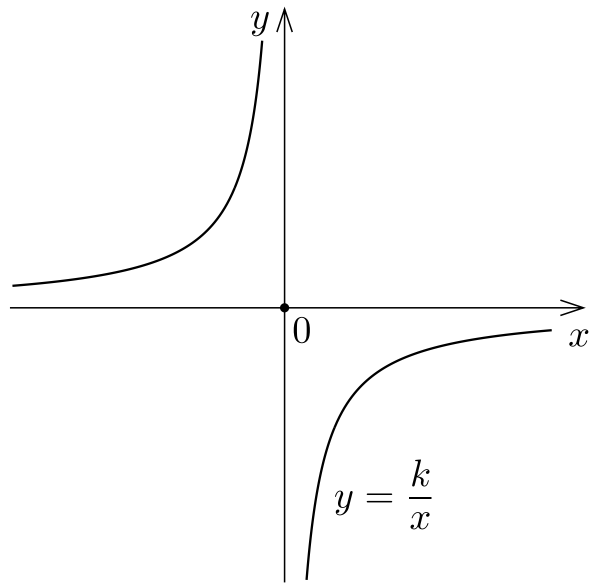
一般に, 双曲線は離れた 2 本の曲線より成り, どちらの曲線も伸ばしていくと直線に限りなく近付いていく. このような直線をその双曲線の漸近線という. 1 組の双曲線に対してその漸近線は 2 本ある. 双曲線の 2 本の漸近線の共有点を中心という.



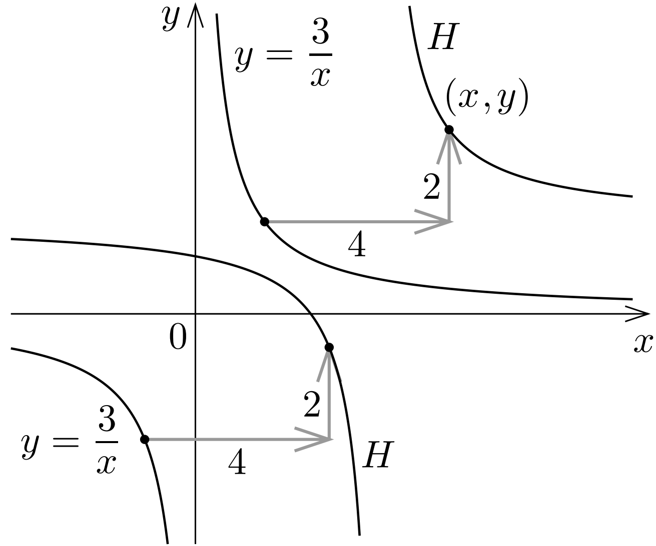
双曲線とその漸近線と中心

xy 座標平面において，変数 x の関数 $y = \dfrac{k}{x}$ のグラフの漸近線は x 軸及び y 軸，つまり直線 $y = 0$ 及び直線 $x = 0$ である．関数 $y = \dfrac{k}{x}$ のグラフの中心は原点 $(0,0)$ である．

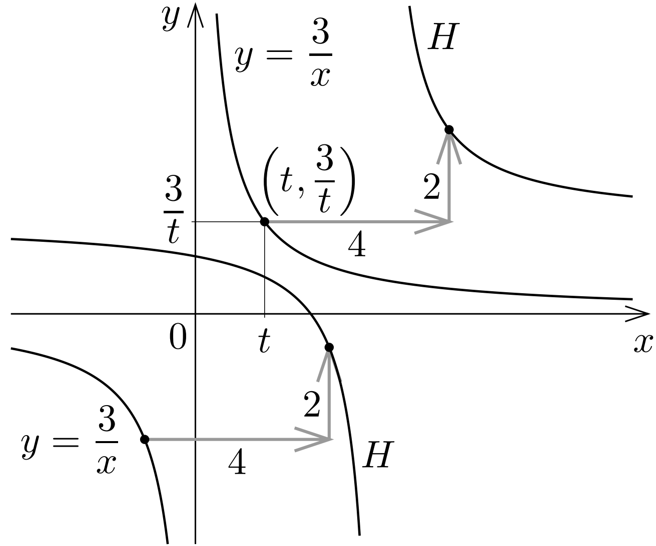


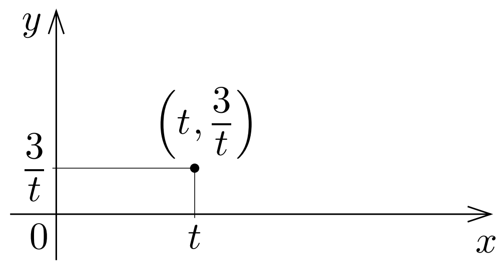


例 xy 座標平面において変数 x の関数 $y=\dfrac{3}{x}$ のグラフを x の軸の向きに 4 だけ y 座標の向きに 2 だけ平行移動させた双曲線を H とおく.



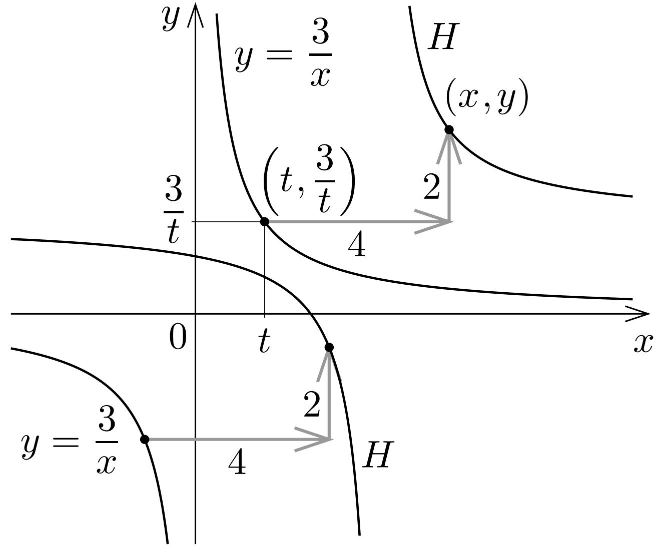
$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において変数 x の関数 $y=\dfrac{3}{x}$ のグラフを x の軸の向きに 4 だけ y 座標の向きに 2 だけ平行移動させた双曲線を H とおく．関数 $y=\dfrac{3}{x}$ のグラフの点は，x 座標を t とおくと，y 座標は $\dfrac{3}{t}$ なので $\left(t,\dfrac{3}{t}\right)$ である．

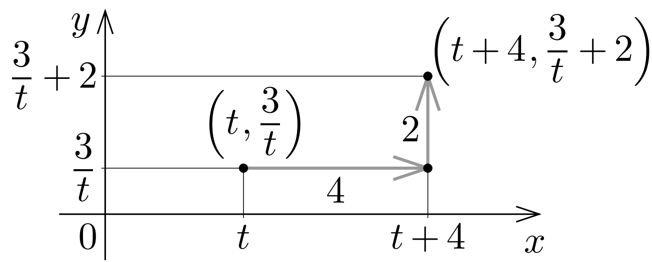




$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において変数 x の関数 $y=\dfrac{3}{x}$ のグラフを x の軸の向きに 4 だけ y 座標の向きに 2 だけ平行移動させた双曲線を H とおく．関数 $y=\dfrac{3}{x}$ のグラフの点は，x 座標を t とおくと，y 座標は $\dfrac{3}{t}$ なので $\left(t,\dfrac{3}{t}\right)$ である．H の各点 (x,y) は，元の関数 $y=\dfrac{3}{x}$ のグラフのある点 $\left(t,\dfrac{3}{t}\right)$ を x の軸の向きに 4 だけ y 座標の向きに 2 だけ移動させた点 $\left(t+4,\dfrac{3}{t}+2\right)$ である；

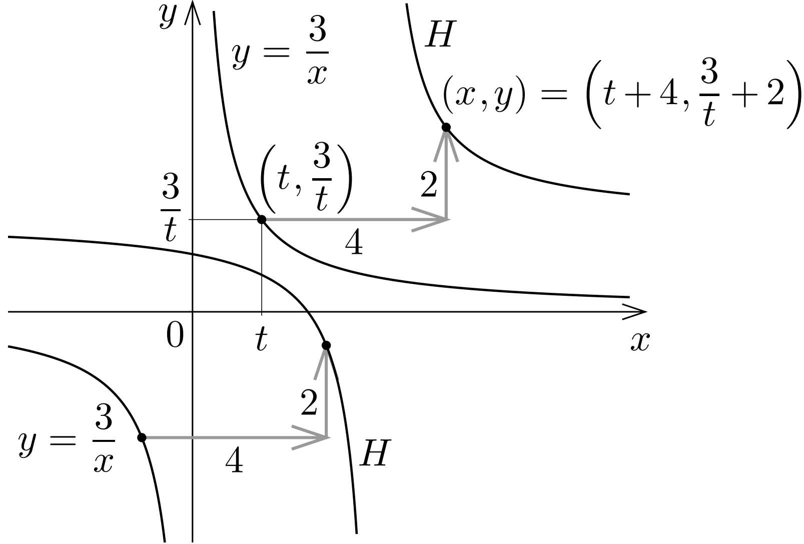
$$(x,y)=\left(t+4,\frac{3}{t}+2\right).$$





$y=\dfrac{3}{x}$ のグラフを x の軸の向きに 4 だけ y 座標の向きに 2 だけ平行移動させた双曲線を H の各点 (x,y) について，ある実数 t をとると

$$(x,y)=\left(t+4,\frac{3}{t}+2\right).$$

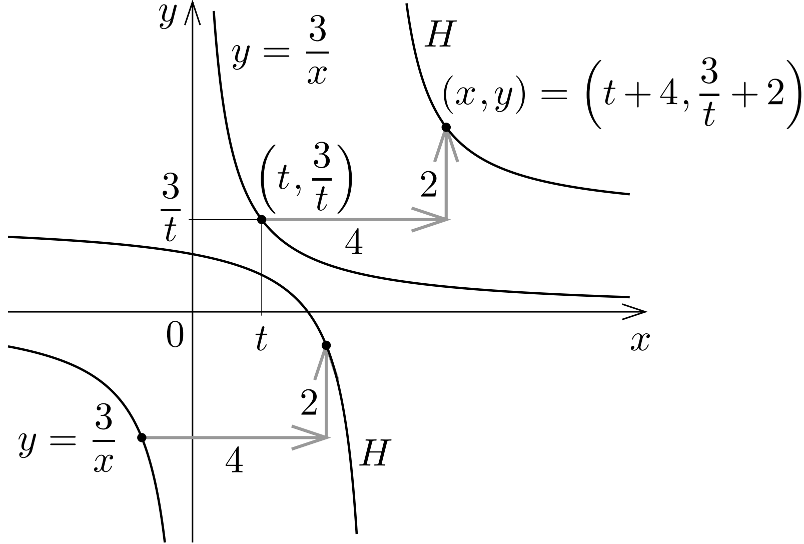


$y = \dfrac{3}{x}$ のグラフを x の軸の向きに 4 だけ y 座標の向きに 2 だけ平行移動させた双曲線を H の各点 (x, y) について，ある実数 t をとると

$$(x, y) = \left(t + 4, \frac{3}{t} + 2\right) .$$

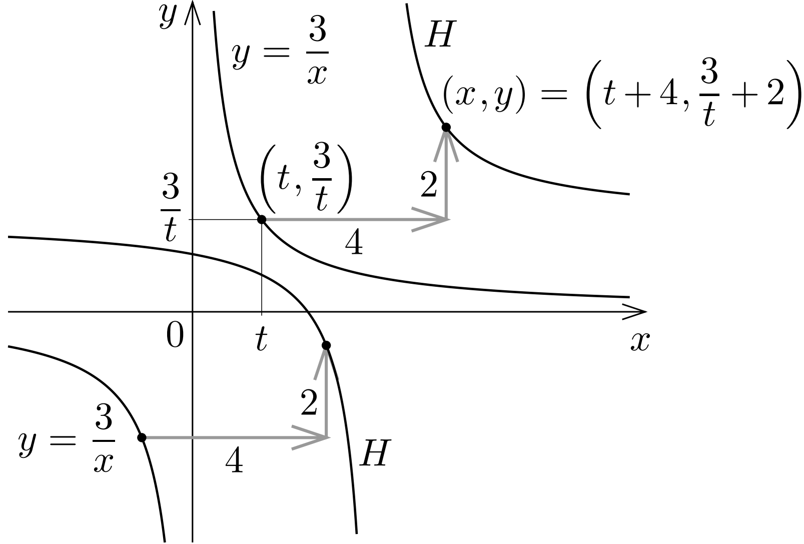
よって

$$x = t + 4 \text{ かつ } y = \frac{3}{t} + 2 .$$



$y=\dfrac{3}{x}$ のグラフを x の軸の向きに 4 だけ y 座標の向きに 2 だけ平行移動させた双曲線を H の各点 (x,y) について，ある実数 t をとると

$$(x,y)=\left(t+4,\frac{3}{t}+2\right) .$$



よって

$$x=t+4 \text{ かつ } y=\frac{3}{t}+2 .$$

等式 $x=t+4$ より $t=x-4$，これを等式 $y=\dfrac{3}{t}+2$ に代入すると

$$y=\frac{3}{x-4}+2 .$$

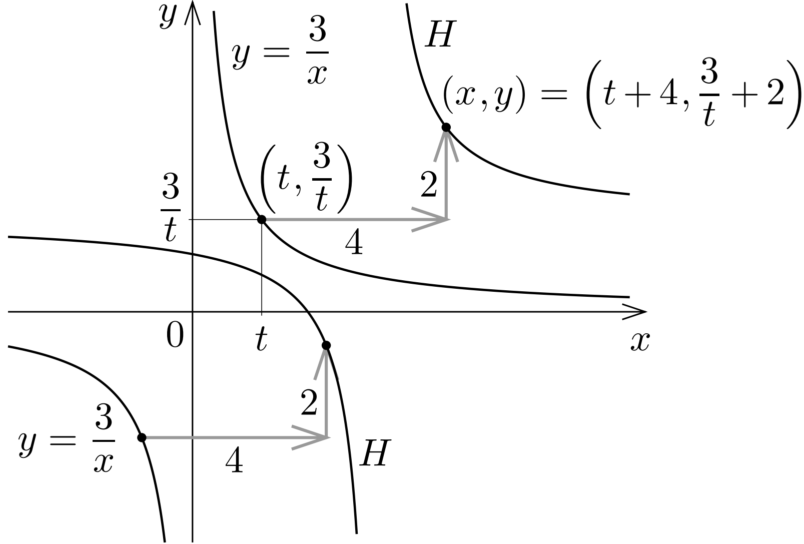
終

$y=\dfrac{3}{x}$ のグラフを x の軸の向きに 4 だけ y 座標の向きに 2 だけ平行移動させた双曲線を H の各点 (x,y) について，ある実数 t をとると

$$(x,y)=\left(t+4,\frac{3}{t}+2\right).$$

よって

$$x=t+4 \text{ かつ } y=\frac{3}{t}+2.$$



等式 $x=t+4$ より $t=x-4$，これを等式 $y=\dfrac{3}{t}+2$ に代入すると $y=\dfrac{3}{x-4}+2$．関数 $y=\dfrac{3}{x}$ のグラフを x の軸の向きに 4 だけ y 座標の向きに 2 だけ平行移動させた双曲線 H は関数 $y=\dfrac{3}{x-4}+2$ のグラフである．終

$\boxed{例}$ xy 座標平面において変数 x の関数 $y = \dfrac{5}{x}$ のグラフを x の軸の向きに 2 だけ y 軸の向きに 3 だけ平行移動させた双曲線 H をグラフとする関数を表す方程式を導く.

例 xy 座標平面において変数 x の関数 $y=\dfrac{5}{x}$ のグラフを x の軸の向きに 2 だけ y 軸の向きに 3 だけ平行移動させた双曲線 H をグラフとする関数を表す方程式を導く． H の各点 (x,y) は，関数 $y=\dfrac{5}{x}$ のグラフの点 $\left(t,\dfrac{5}{t}\right)$（$t$ はある実数）を x の軸の向きに 2 だけ y 軸の向きに 3 だけ平行移動させた点 $\left(t+2,\dfrac{5}{t}+3\right)$ なので， $(x,y)=\left(t+2,\dfrac{5}{t}+3\right)$ ．

$\boxed{例}$ xy 座標平面において変数 x の関数 $y=\dfrac{5}{x}$ のグラフを x の軸の向きに 2 だけ y 軸の向きに 3 だけ平行移動させた双曲線 H をグラフとする関数を表す方程式を導く．H の各点 (x,y) は，関数 $y=\dfrac{5}{x}$ のグラフの点 $\left(t,\dfrac{5}{t}\right)$（$t$ はある実数）を x の軸の向きに 2 だけ y 軸の向きに 3 だけ平行移動させた点 $\left(t+2,\dfrac{5}{t}+3\right)$ なので，$(x,y)=\left(t+2,\dfrac{5}{t}+3\right)$．よって

$$x=t+2 \text{ かつ } y=\frac{5}{t}+3\,.$$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において変数 x の関数 $y=\dfrac{5}{x}$ のグラフを x の軸の向きに 2 だけ y 軸の向きに 3 だけ平行移動させた双曲線 H をグラフとする関数を表す方程式を導く． H の各点 (x,y) は，関数 $y=\dfrac{5}{x}$ のグラフの点 $\left(t,\dfrac{5}{t}\right)$（$t$ はある実数）を x の軸の向きに 2 だけ y 軸の向きに 3 だけ平行移動させた点 $\left(t+2,\dfrac{5}{t}+3\right)$ なので， $(x,y)=\left(t+2,\dfrac{5}{t}+3\right)$ ．よって

$$x=t+2 \text{ かつ } y=\frac{5}{t}+3 .$$

$x=t+2$ より $t=x-2$ なので， $y=\dfrac{5}{t}+3=\dfrac{5}{x-2}+3$ ．

例 xy 座標平面において変数 x の関数 $y=\dfrac{5}{x}$ のグラフを x の軸の向きに 2 だけ y 軸の向きに 3 だけ平行移動させた双曲線 H をグラフとする関数を表す方程式を導く． H の各点 (x,y) は，関数 $y=\dfrac{5}{x}$ のグラフの点 $\left(t,\dfrac{5}{t}\right)$（$t$ はある実数）を x の軸の向きに 2 だけ y 軸の向きに 3 だけ平行移動させた点 $\left(t+2,\dfrac{5}{t}+3\right)$ なので， $(x,y)=\left(t+2,\dfrac{5}{t}+3\right)$ ． よって

$$x=t+2 \text{ かつ } y=\frac{5}{t}+3 .$$

$x=t+2$ より $t=x-2$ なので， $y=\dfrac{5}{t}+3=\dfrac{5}{x-2}+3$ ． 故に H をグラフとする関数は $y=3+\dfrac{5}{x-2}$ である． 終

$\boxed{\text{問}4.10.1}$ xy 座標平面において変数 x の関数 $y=\dfrac{2}{x}$ のグラフを x の軸の向きに -3 だけ y 軸の向きに -4 だけ平行移動させた双曲線 H をグラフとする関数を表わす方程式を導け（導く過程を記せ）.

H の各点 (x,y) は，関数 $y=\dfrac{2}{x}$ のグラフの点 $\left(t, \qquad\right)$（t はある実数）を x の軸の向きに -3 だけ y 軸の向きに -4 だけ平行移動させた点 $\left(\qquad , \qquad\right)$ なので，$(x,y)=\left(\qquad , \qquad\right)$. $x=\qquad$ より $t=\qquad$ なので，$y=\qquad=\qquad$. 故に H をグラフとする関数は $y=-\qquad$ である.

$\boxed{問4.10.1}$ xy 座標平面において変数 x の関数 $y=\dfrac{2}{x}$ のグラフを x の軸の向きに -3 だけ y 軸の向きに -4 だけ平行移動させた双曲線 H をグラフとする関数を表わす方程式を導け（導く過程を記せ）.

H の各点 (x,y) は，関数 $y=\dfrac{2}{x}$ のグラフの点 $\left(t,\dfrac{2}{t}\right)$（$t$ はある実数）を x の軸の向きに -3 だけ y 軸の向きに -4 だけ平行移動させた点 $\left(t-3,\dfrac{2}{t}-4\right)$ なので，$(x,y)=\left(t-3,\dfrac{2}{t}-4\right)$．$x=t-3$ より $t=x+3$ なので，$y=\dfrac{2}{t}-4=\dfrac{2}{x+3}-4$．故に H をグラフとする関数は $y=-4+\dfrac{2}{x+3}$ である.

$\boxed{終}$

一般的に述べる．定数 k, p, q （ $k \neq 0$ ）に対し，xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた双曲線を H とおく．

一般的に述べる．定数 k, p, q （ $k \neq 0$ ）に対し，xy 座標平面において，変数 x の関数 $y = \dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた双曲線を H とおく．H の各点 (x, y) は $y = \dfrac{k}{x}$ のグラフの点 $\left(t, \dfrac{k}{t}\right)$ （t はある実数）を x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ移動させた点 $\left(t-p, \dfrac{k}{t}+q\right)$ なので，$(x, y) = \left(t-p, \dfrac{k}{t}+q\right)$ ．

一般的に述べる．定数 k, p, q （ $k \neq 0$ ）に対し，xy 座標平面において，変数 x の関数 $y = \dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた双曲線を H とおく．H の各点 (x, y) は $y = \dfrac{k}{x}$ のグラフの点 $\left(t, \dfrac{k}{t}\right)$ （t はある実数）を x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ移動させた点 $\left(t-p, \dfrac{k}{t}+q\right)$ なので，$(x, y) = \left(t-p, \dfrac{k}{t}+q\right)$ ．$x = t-p$ より $t = x+p$ なので，

$$y = \frac{k}{t}+q = \frac{k}{x+p}+q \ .$$

一般的に述べる．定数 k, p, q （ $k \neq 0$ ）に対し，xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた双曲線を H とおく．H の各点 (x, y) は $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフの点 $\left(t, \dfrac{k}{t}\right)$ （t はある実数）を x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ移動させた点 $\left(t-p, \dfrac{k}{t}+q\right)$ なので，$(x, y)=\left(t-p, \dfrac{k}{t}+q\right)$ ．$x=t-p$ より $t=x+p$ なので，

$$y=\frac{k}{t}+q=\frac{k}{x+p}+q .$$

双曲線 H は方程式 $y=\dfrac{k}{x+p}+q$ で表される．

一般的に述べる．定数 k, p, q （ $k \neq 0$ ）に対し，xy 座標平面において，変数 x の関数 $y = \dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた双曲線を H とおく．H の各点 (x, y) は $y = \dfrac{k}{x}$ のグラフの点 $\left(t, \dfrac{k}{t}\right)$ （t はある実数）を x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ移動させた点 $\left(t-p, \dfrac{k}{t}+q\right)$ なので，$(x, y) = \left(t-p, \dfrac{k}{t}+q\right)$ ．$x = t-p$ より $t = x+p$ なので，

$$y = \frac{k}{t} + q = \frac{k}{x+p} + q \ .$$

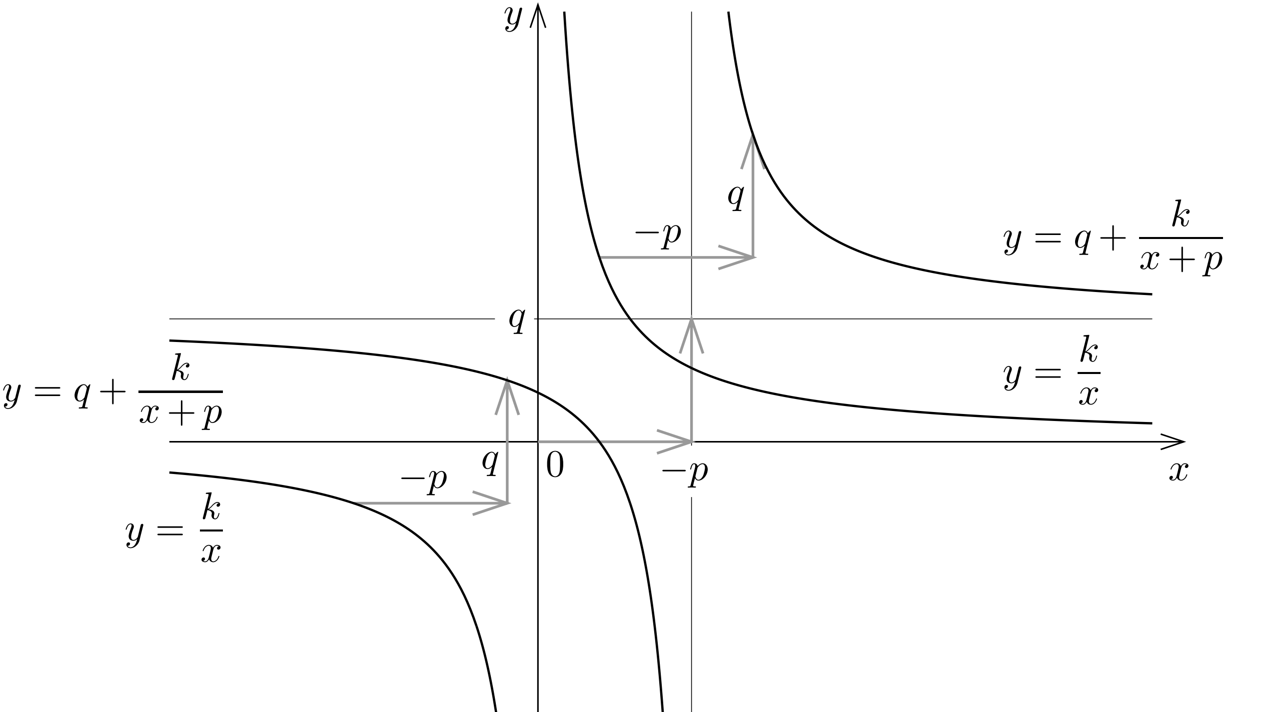
双曲線 H は方程式 $y = \dfrac{k}{x+p} + q$ で表される．故に，変数 x の関数 $y = \dfrac{k}{x+p} + q$ のグラフは，関数 $y = \dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた双曲線である．

変数 x の関数 $y=\dfrac{k}{x+p}+q$ のグラフは，関数 $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた双曲線である．

変数 x の関数 $y=\dfrac{k}{x+p}+q$ のグラフは，関数 $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた双曲線である．関数 $y=\dfrac{k}{x+p}+q$ のグラフの中心は，関数 $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフの中心 $(0,0)$ を x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた点 $(-p,q)$ である．

変数 x の関数 $y=\dfrac{k}{x+p}+q$ のグラフは，関数 $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた双曲線である．関数 $y=\dfrac{k}{x+p}+q$ のグラフの中心は，関数 $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフの中心 $(0,0)$ を x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた点 $(-p,q)$ である．その漸近線は方程式 $x=-p$ で表される直線と方程式 $y=q$ で表される直線とである．

xy 座標平面における関数 $y=\dfrac{k}{x+p}+q$ のグラフは以下のようになる.



定理 4.10　定数 k, p, q（$k \neq 0$）に対し，xy 座標平面において，変数 x の関数 $y = q + \dfrac{k}{x+p}$ のグラフは，x の関数 $y = \dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた双曲線である；その漸近線は直線 $x = -p$ と $y = q$ とである．

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において変数 x の関数 $y=\dfrac{3}{x}$ のグラフを直線 $x=-4$ と直線 $y=5$ とが漸近線になるように平行移動させた双曲線 H をグラフとする関数を表す方程式を導く.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において変数 x の関数 $y=\dfrac{3}{x}$ のグラフを直線 $x=-4$ と直線 $y=5$ とが漸近線になるように平行移動させた双曲線 H をグラフとする関数を表す方程式を導く．関数 $y=\dfrac{3}{x}$ のグラフの漸近線である直線 $x=0$ と直線 $y=0$ とがそれぞれ直線 $x=-4$ と直線 $y=5$ とに移動する平行移動で，各点は x の軸の向きに -4 だけ y 軸の向きに 5 だけ平行移動する．

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において変数 x の関数 $y=\dfrac{3}{x}$ のグラフを直線 $x=-4$ と直線 $y=5$ とが漸近線になるように平行移動させた双曲線 H をグラフとする関数を表す方程式を導く．関数 $y=\dfrac{3}{x}$ のグラフの漸近線である直線 $x=0$ と直線 $y=0$ とがそれぞれ直線 $x=-4$ と直線 $y=5$ とに移動する平行移動で，各点は x の軸の向きに -4 だけ y 軸の向きに 5 だけ平行移動する．H の各点 (x,y) は，関数 $y=\dfrac{3}{x}$ のグラフの点 $\left(t,\dfrac{3}{t}\right)$（$t$ はある実数）を x の軸の向きに -4 だけ y 軸の向きに 5 だけ平行移動させた点 $\left(t-4,\dfrac{3}{t}+5\right)$ である：$(x,y)=\left(t-4,\dfrac{3}{t}+5\right)$.

例 xy 座標平面において変数 x の関数 $y=\dfrac{3}{x}$ のグラフを直線 $x=-4$ と直線 $y=5$ とが漸近線になるように平行移動させた双曲線 H をグラフとする関数を表す方程式を導く．関数 $y=\dfrac{3}{x}$ のグラフの漸近線である直線 $x=0$ と直線 $y=0$ とがそれぞれ直線 $x=-4$ と直線 $y=5$ とに移動する平行移動で，各点は x の軸の向きに -4 だけ y 軸の向きに 5 だけ平行移動する．H の各点 (x,y) は，関数 $y=\dfrac{3}{x}$ のグラフの点 $\left(t,\dfrac{3}{t}\right)$（$t$ はある実数）を x の軸の向きに -4 だけ y 軸の向きに 5 だけ平行移動させた点 $\left(t-4,\dfrac{3}{t}+5\right)$ である：$(x,y)=\left(t-4,\dfrac{3}{t}+5\right)$．$x=t-4$ より $t=x+4$ なので，$y=\dfrac{3}{t}+5=\dfrac{3}{x+4}+5$．故に H をグラフとする関数は $y=5+\dfrac{3}{x+4}$ である．終

$\boxed{\text{問}4.10.2}$ xy 座標平面において変数 x の関数 $y=\dfrac{4}{x}$ のグラフを直線 $x=3$ と直線 $y=-2$ とが漸近線になるように平行移動させた双曲線 H をグラフとする関数を表わす方程式を導け（導く過程を記せ）.

関数 $y=\dfrac{4}{x}$ のグラフの漸近線である直線 $x=0$ と直線 $y=0$ とがそれぞれ直線 $x=3$ と直線 $y=-2$ とに移動する平行移動で，各点は x の軸の向きに　　だけ y 軸の向きに　　　だけ平行移動する． H の各点 (x,y) は，関数 $y=\dfrac{4}{x}$ のグラフの点 $\left(t,\qquad\right)$（t はある実数）を x の軸の向きに 3 だけ y 座標の向きに -2 だけ平行移動させた点 $\left(\qquad,\qquad\right)$ である：

$(x,y)=\left(\qquad,\qquad\right)$． $x=$　　　　なので $t=$　　　　； $y=$　　　　なので

$y=$　　　　　　．故に H をグラフとする関数は $y=$　　　　　　である．

$\boxed{\text{問}4.10.2}$ xy 座標平面において変数 x の関数 $y=\dfrac{4}{x}$ のグラフを直線 $x=3$ と直線 $y=-2$ とが漸近線になるように平行移動させた双曲線 H をグラフとする関数を表わす方程式を導け（導く過程を記せ）.

関数 $y=\dfrac{4}{x}$ のグラフの漸近線である直線 $x=0$ と直線 $y=0$ とがそれぞれ直線 $x=3$ と直線 $y=-2$ とに移動する平行移動で，各点は x の軸の向きに 3 だけ y 軸の向きに -2 だけ平行移動する. H の各点 (x,y) は，関数 $y=\dfrac{4}{x}$ のグラフの点 $\left(t,\dfrac{4}{t}\right)$（$t$ はある実数）を x の軸の向きに 3 だけ y 座標の向きに -2 だけ平行移動させた点 $\left(t+3,\dfrac{4}{t}-2\right)$ である：$(x,y)=\left(t+3,\dfrac{4}{t}-2\right)$. $x=t+3$ なので $t=x-3$; $y=\dfrac{4}{t}-2$ なので $y=\dfrac{4}{x-3}-2$. 故に H をグラフとする関数は $y=-2+\dfrac{4}{x-3}$ である. $\boxed{\text{終}}$

例 変数 x の関数 $y=\dfrac{4x+16}{2x+5}$ のグラフを考える.

$\boxed{例}$ 変数 x の関数 $y=\dfrac{4x+16}{2x+5}$ のグラフを考える．分数式 $\dfrac{4x+16}{2x+5}$ の分子 $4x+16$ を分母 $2x+5$ で割ると整商は 2 で剰余は 6 なので，

$$4x+16=2(2x+5)+6\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $y = \dfrac{4x+16}{2x+5}$ のグラフを考える．分数式 $\dfrac{4x+16}{2x+5}$ の分子 $4x+16$ を分母 $2x+5$ で割ると整商は 2 で剰余は 6 なので，$4x+16 = 2(2x+5)+6$ ．よって

$$\frac{4x+16}{2x+5} = \frac{2(2x+5)+6}{2x+5} = 2 + \frac{6}{2x+5} = 2 + \frac{3}{x+\frac{5}{2}} .$$

$\boxed{例}$ 変数 x の関数 $y = \dfrac{4x+16}{2x+5}$ のグラフを考える．分数式 $\dfrac{4x+16}{2x+5}$ の分子 $4x+16$ を分母 $2x+5$ で割ると整商は 2 で剰余は 6 なので，$4x+16 = 2(2x+5)+6$ ．よって

$$\frac{4x+16}{2x+5} = \frac{2(2x+5)+6}{2x+5} = 2 + \frac{6}{2x+5} = 2 + \frac{3}{x+\frac{5}{2}} \ .$$

従って，関数を表す方程式 $y = \dfrac{4x+16}{2x+5}$ は次のように同値変形できる：

$$y = 2 + \frac{3}{x+\frac{5}{2}} \ .$$

例 変数 x の関数 $y=\dfrac{4x+16}{2x+5}$ のグラフを考える．分数式 $\dfrac{4x+16}{2x+5}$ の分子 $4x+16$ を分母 $2x+5$ で割ると整商は 2 で剰余は 6 なので，$4x+16=2(2x+5)+6$ ．よって

$$\frac{4x+16}{2x+5}=\frac{2(2x+5)+6}{2x+5}=2+\frac{6}{2x+5}=2+\frac{3}{x+\frac{5}{2}}\ .$$

従って，関数を表す方程式 $y=\dfrac{4x+16}{2x+5}$ は次のように同値変形できる：

$$y=2+\frac{3}{x+\frac{5}{2}}\ .$$

xy 座標平面において，この関数のグラフは，関数 $y=\dfrac{3}{x}$ のグラフを x 軸の向きに $-\dfrac{5}{2}$ だけ y 軸の向きに 2 だけ平行移動させた双曲線であり，その漸近線は直線 $x=-\dfrac{5}{2}$ と $y=2$ とである．終

一般的に，関数を表す式 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ （a, b, c, d は定数で $c \neq 0$ ）は，$y=q+\dfrac{k}{x+p}$ （k, p, q は定数）の形に同値変形することでグラフの概形を調べることができる.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において変数 x の関数 $y = \dfrac{3x-12}{x-2}$ のグラフの漸近線を求めてグラフの概形を描く.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において変数 x の関数 $y = \dfrac{3x-12}{x-2}$ のグラフの漸近線を求めてグラフの概形を描く．関数 $y = \dfrac{3x-12}{x-2}$ について，右辺の分子 $3x-12$ を右辺の分母 $x-2$ で割ると整商は 3 で剰余は -6 なので $3x-12 = 3(x-2)-6$ ；よって

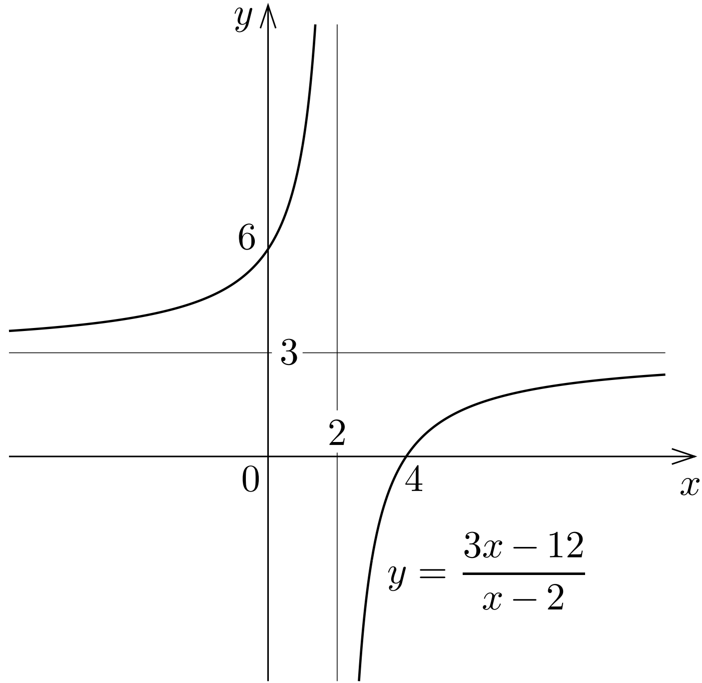
$$y = \frac{3x-12}{x-2} = \frac{3(x-2)-6}{x-2} = 3 - \frac{6}{x-2} \ .$$

$\boxed{例}$ xy 座標平面において変数 x の関数 $y = \dfrac{3x-12}{x-2}$ のグラフの漸近線を求めてグラフの概形を描く．関数 $y = \dfrac{3x-12}{x-2}$ について，右辺の分子 $3x-12$ を右辺の分母 $x-2$ で割ると整商は 3 で剰余は -6 なので
$3x-12 = 3(x-2)-6$ ；よって

$$y = \frac{3x-12}{x-2} = \frac{3(x-2)-6}{x-2} = 3 - \frac{6}{x-2} \ .$$

グラフは関数 $y = -\dfrac{6}{x}$ のグラフを x 軸の向きに 2 だけ y 軸の向きに 3 だけ平行移動させた双曲線であり，その漸近線は直線 $x=2$ と $y=3$ とである．

関数 $3-\dfrac{6}{x-2}$ のグラフは直線 $x=2$ と直線 $y=3$ とを漸近線とする双曲線である.

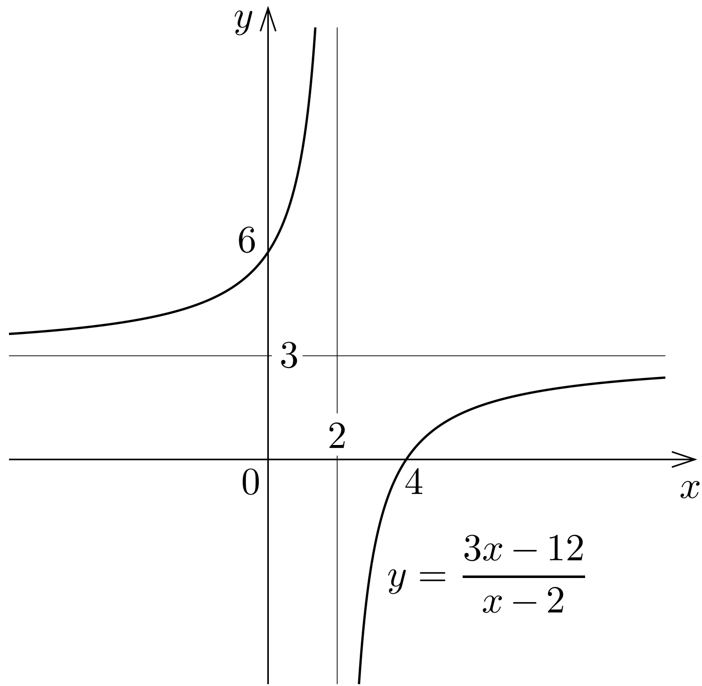


関数 $3-\dfrac{6}{x-2}$ のグラフは直線 $x=2$ と直線 $y=3$ とを漸近線とする双曲線である.

関数 $y=\dfrac{3x-12}{x-2}$ について,

$y=0$ とすると. $\dfrac{3x-12}{x-2}=0$,

$3x-12=0$, $x=4$; このとき分母は 0 にならない.

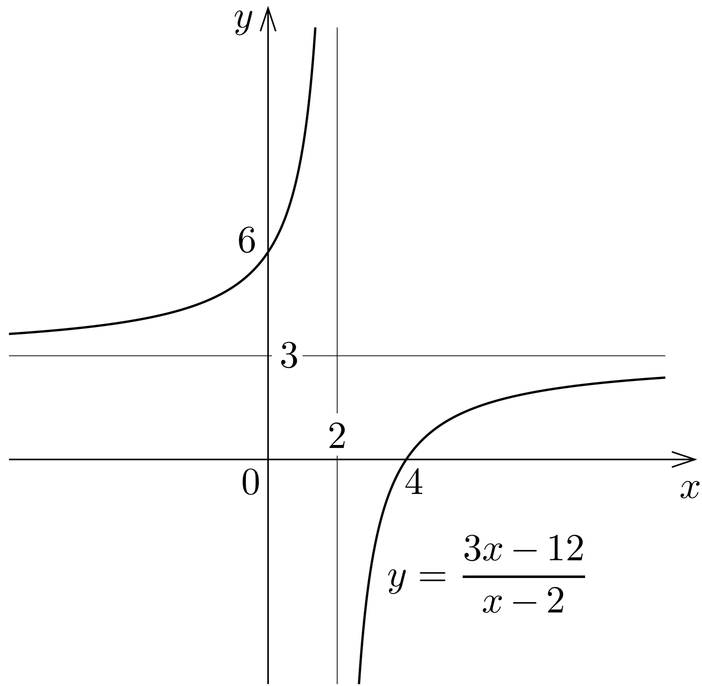


関数 $3-\dfrac{6}{x-2}$ のグラフは直線 $x=2$ と直線 $y=3$ とを漸近線とする双曲線である.

関数 $y=\dfrac{3x-12}{x-2}$ について,

$y=0$ とすると, $\dfrac{3x-12}{x-2}=0$,

$3x-12=0$, $x=4$; このとき分母は 0 にならない. グラフと x 軸との共有点は $(4,0)$ である.



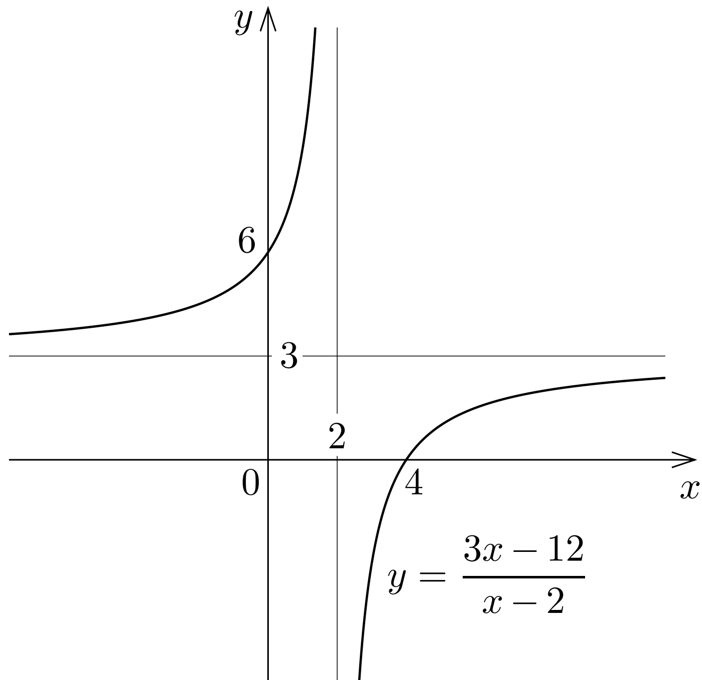
関数 $3-\dfrac{6}{x-2}$ のグラフは直線 $x=2$ と直線 $y=3$ とを漸近線とする双曲線である.

関数 $y=\dfrac{3x-12}{x-2}$ について,

$y=0$ とすると. $\dfrac{3x-12}{x-2}=0$,

$3x-12=0$, $x=4$; このとき分母は 0 にならない. グラフと x 軸との共有点は $(4,0)$ である.

また, $x=0$ とすると $y=6$ なので, グラフと y 軸との共有点は $(0,6)$ である.



終

$\boxed{\text{問}4.10.3}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=\dfrac{2x-10}{x-3}$ のグラフの漸近線を求めてグラフの概形を描け.

関数 $y=\dfrac{2x-10}{x-3}$ について，

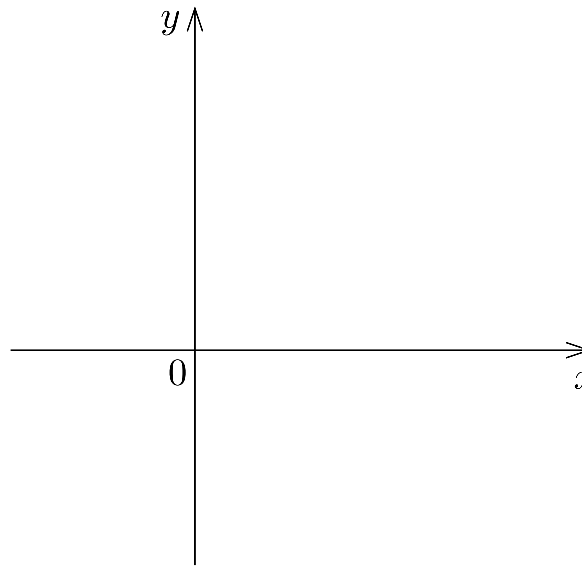
$$y=\frac{2x-10}{x-3}=\frac{\quad(x-3)\quad}{x-3}=\quad\frac{\quad}{x-3}\ .$$

グラフは，直線 $x=\quad$ と直線 $y=\quad$ とを漸近線とする双曲線である.

$y=0$ とすると，$\dfrac{2x-10}{x-3}=0$ ，

$\quad=0$ ，$x=\quad$; このとき分母は 0 にならない. グラフと x 軸との共有点は $(\quad,0)$ である. $x=0$ とすると $y=\quad$.

グラフと y 軸との共有点は $\left(0,\quad\right)$ である.



$\boxed{\text{問}4.10.3}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y = \dfrac{2x-10}{x-3}$ のグラフの漸近線を求めてグラフの概形を描け.

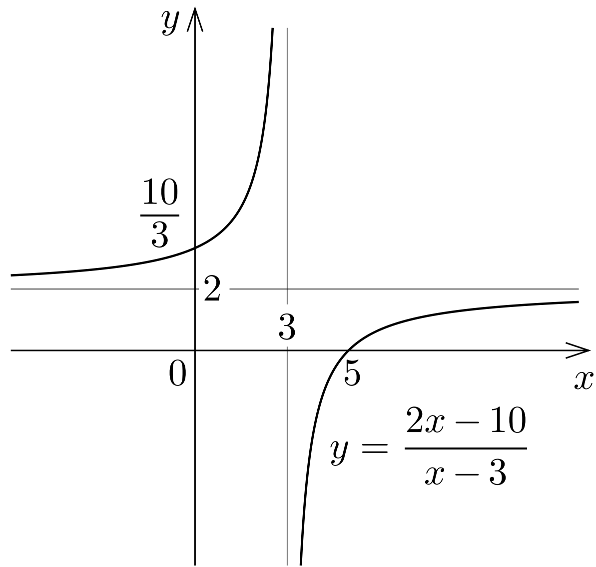
関数 $y = \dfrac{2x-10}{x-3}$ について，

$$y = \frac{2x-10}{x-3} = \frac{2(x-3)-4}{x-3} = 2 - \frac{4}{x-3}.$$

グラフは，直線 $x=3$ と直線 $y=2$ とを漸近線とする双曲線である.

$y=0$ とすると，$\dfrac{2x-10}{x-3}=0$ ，$2x-10=0$ ，$x=5$ ；このとき分母は 0 にならない．グラフと x 軸との共有点は $(5,0)$ である． $x=0$ とすると $y=\dfrac{10}{3}$.

グラフと y 軸との共有点は $\left(0, \dfrac{10}{3}\right)$ である.



$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=\dfrac{3x+11}{2x+4}$ のグラフの漸近線を求めてグラフの概形を描く.

$\boxed{例}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=\dfrac{3x+11}{2x+4}$ のグラフの漸近線を求めてグラフの概形を描く．関数 $y=\dfrac{3x+11}{2x+4}$ について，左辺の分子 $3x+11$ を左辺の分母 $2x+4$ で割ると整商は $\dfrac{3}{2}$ で剰余は 5 なので

$3x+11=\dfrac{3}{2}(2x+4)+5$ ；

例 xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=\dfrac{3x+11}{2x+4}$ のグラフの漸近線を求めてグラフの概形を描く．関数 $y=\dfrac{3x+11}{2x+4}$ について，左辺の分子 $3x+11$ を左辺の分母 $2x+4$ で割ると整商は $\dfrac{3}{2}$ で剰余は 5 なので $3x+11=\dfrac{3}{2}(2x+4)+5$ ；よって，

$$y=\frac{3x+11}{2x+4}=\frac{\frac{3}{2}(2x+4)+5}{2x+4}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2x+4}=\frac{3}{2}+\frac{\frac{5}{2}}{x+2}\ .$$

例 xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=\dfrac{3x+11}{2x+4}$ のグラフの漸近線を求めてグラフの概形を描く．関数 $y=\dfrac{3x+11}{2x+4}$ について，左辺の分子 $3x+11$ を左辺の分母 $2x+4$ で割ると整商は $\dfrac{3}{2}$ で剰余は 5 なので
$3x+11=\dfrac{3}{2}(2x+4)+5$ ；よって，

$$y=\frac{3x+11}{2x+4}=\frac{\frac{3}{2}(2x+4)+5}{2x+4}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2x+4}=\frac{3}{2}+\frac{\frac{5}{2}}{x+2}\ .$$

グラフは関数 $y=\dfrac{5}{2x}$ のグラフを x 軸の向きに -2 だけ y 軸の向きに $\dfrac{3}{2}$ だけ平行移動させた双曲線であり，その漸近線は直線 $x=-2$ と直線 $y=\dfrac{3}{2}$ である．

関数 $y = \dfrac{3x+11}{2x+4}$ について，
グラフは直線 $x = -2$ と直線
$y = \dfrac{3}{2}$ とを漸近線とする双曲
線である．

関数 $y=\dfrac{3x+11}{2x+4}$ について，

グラフは直線 $x=-2$ と直線

$y=\dfrac{3}{2}$ とを漸近線とする双曲

線である． $y=0$ とすると，

$\dfrac{3x+11}{2x+4}=0$ ， $3x+11=0$ ，

$x=-\dfrac{11}{3}$ ；このとき分母は 0 に

ならない．

関数 $y=\dfrac{3x+11}{2x+4}$ について，

グラフは直線 $x=-2$ と直線

$y=\dfrac{3}{2}$ とを漸近線とする双曲

線である． $y=0$ とすると，

$\dfrac{3x+11}{2x+4}=0$ ， $3x+11=0$ ，

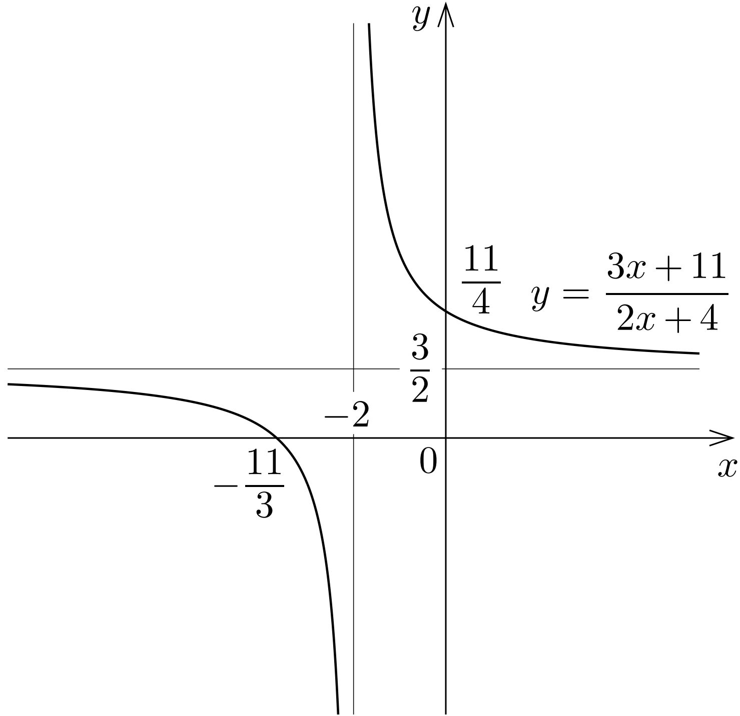
$x=-\dfrac{11}{3}$ ；このとき分母は 0 に

ならない．グラフと x 軸との共

有点は $\left(-\dfrac{11}{3},0\right)$ である．

関数 $y=\dfrac{3x+11}{2x+4}$ について，
グラフは直線 $x=-2$ と直線
$y=\dfrac{3}{2}$ とを漸近線とする双曲
線である． $y=0$ とすると，
$\dfrac{3x+11}{2x+4}=0$ ， $3x+11=0$ ，
$x=-\dfrac{11}{3}$ ；このとき分母は 0 に
ならない．グラフと x 軸との共
有点は $\left(-\dfrac{11}{3},0\right)$ である． $x=0$
とすると $y=\dfrac{11}{4}$ なので，グラ
フと y 軸との共有点は $\left(0,\dfrac{11}{4}\right)$
である．

関数　$y=\dfrac{3x+11}{2x+4}$　について，グラフは直線　$x=-2$　と直線　$y=\dfrac{3}{2}$　とを漸近線とする双曲線である．　$y=0$　とすると，$\dfrac{3x+11}{2x+4}=0$ ，　$3x+11=0$ ，$x=-\dfrac{11}{3}$　；このとき分母は 0 にならない．グラフと x 軸との共有点は $\left(-\dfrac{11}{3},0\right)$ である．　$x=0$ とすると　$y=\dfrac{11}{4}$　なので，グラフと y 軸との共有点は $\left(0,\dfrac{11}{4}\right)$ である．



終

問4.10.4 xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=\dfrac{5x+22}{2x+6}$ のグラフの漸近線を求めてグラフの概形を描け.

関数 $y=\dfrac{5x+22}{2x+6}$ について，

$$y=\frac{5x+22}{2x+6}=\frac{(2x+6)+\qquad}{2x+6}=\qquad+\frac{\qquad}{2(x+3)}=\qquad+\frac{\qquad}{x+3}\ .$$

グラフは直線 $x=-3$ と $y=\dfrac{5}{2}$ とを漸近線とする双曲線である.

$\boxed{\text{問}4.10.4}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y = \dfrac{5x+22}{2x+6}$ のグラフの漸近線を求めてグラフの概形を描け.

関数 $y = \dfrac{5x+22}{2x+6}$ について，

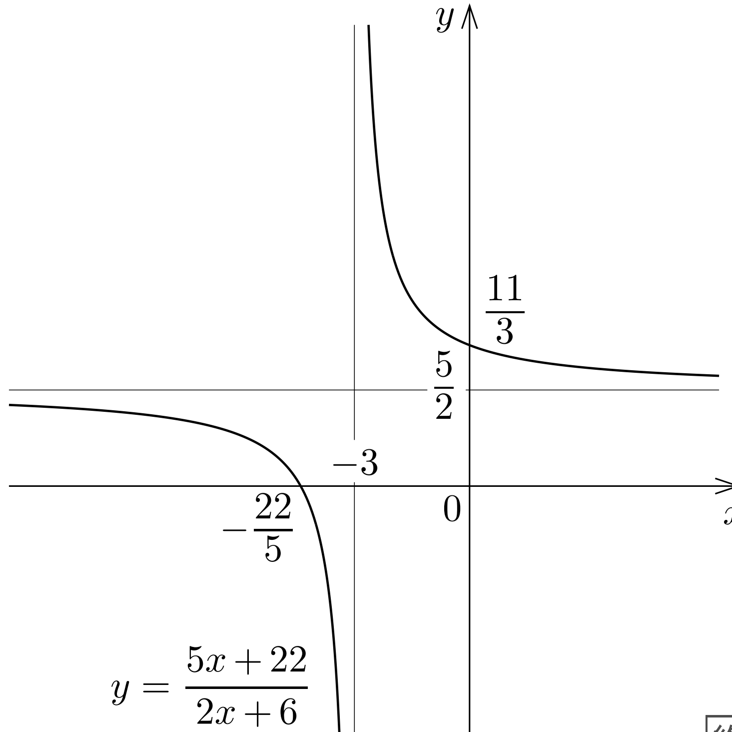
$$y = \frac{5x+22}{2x+6} = \frac{\frac{5}{2}(2x+6)+7}{2x+6} = \frac{5}{2} + \frac{7}{2(x+3)} = \frac{5}{2} + \frac{\frac{7}{2}}{x+3} \ .$$

グラフは直線 $x = -3$ と $y = \dfrac{5}{2}$ とを漸近線とする双曲線である.

$y=0$ とすると， $\dfrac{5x+22}{2x+6}=0$ ，

よって $x=-\dfrac{22}{5}$ ；このとき分母は 0 にならない．グラフと x 軸との共有点は $\left(-\dfrac{22}{5},0\right)$ である．

$x=0$ とすると $y=\dfrac{11}{3}$ ．グラフと y 軸との共有点は $\left(0,\dfrac{11}{3}\right)$ である．



終