4.11　関数のグラフの共有点

座標平面において，2 つの関数のグラフの両方に属す点を，それらのグラフの共有点という.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $y=x^2$ のグラフと x の関数 $y=x+2$ のグラフとの共有点を求める.

$\boxed{例}$ 変数 x の関数 $y=x^2$ のグラフと x の関数 $y=x+2$ のグラフとの共有点を求める．実数 u,v について，**4.4** 節で述べたように，

$$点\ (u,v)\ が\ y=x^2\ のグラフに属す \iff v=u^2\ ,$$

$$点\ (u,v)\ が\ y=x+2\ のグラフに属す \iff v=u+2\ ;$$

$\boxed{例}$ 変数 x の関数 $y = x^2$ のグラフと x の関数 $y = x + 2$ のグラフとの共有点を求める．実数 u, v について，**4.4** 節で述べたように，

$$\text{点 } (u, v) \text{ が } y = x^2 \text{ のグラフに属す} \iff v = u^2\ ,$$

$$\text{点 } (u, v) \text{ が } y = x + 2 \text{ のグラフに属す} \iff v = u + 2\ ;$$

これより，

$$\begin{aligned} & \text{点 } (u, v) \text{ が } y = x^2 \text{ のグラフと } y = x + 2 \text{ のグラフとの共有点である} \\ \iff & \text{点 } (u, v) \text{ が } y = x^2 \text{ のグラフに属しかつ } y = x + 2 \text{ のグラフにも属す} \\ \iff & v = u^2 \text{ かつ } v = u + 2\ . \end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $y=x^2$ のグラフと x の関数 $y=x+2$ のグラフとの共有点を求める．実数 u,v について，**4.4** 節で述べたように，

$$\text{点 } (u,v) \text{ が } y=x^2 \text{ のグラフに属す} \iff v=u^2 \ ,$$

$$\text{点 } (u,v) \text{ が } y=x+2 \text{ のグラフに属す} \iff v=u+2 \ ;$$

これより，

$$\begin{aligned} &\text{点 } (u,v) \text{ が } y=x^2 \text{ のグラフと } y=x+2 \text{ のグラフとの共有点である} \\ \iff &\text{点 } (u,v) \text{ が } y=x^2 \text{ のグラフに属しかつ } y=x+2 \text{ のグラフにも属す} \\ \iff &v=u^2 \text{ かつ } v=u+2 \ . \end{aligned}$$

従って， $y=x^2$ のグラフと $y=x+2$ のグラフとの共有点 (u,v) を求めるには，連立方程式 $v=u^2$ かつ $v=u+2$ を解く．

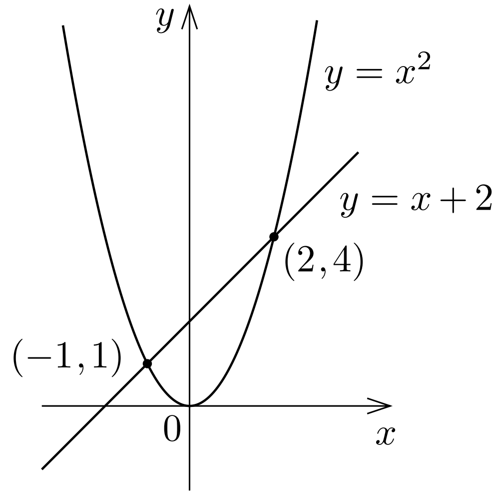
$y = x^2$ のグラフと $y = x + 2$ のグラフとの共有点 (u, v) を求めるには連立方程式 $v = u^2$ かつ $v = u + 2$ を解く.

$y=x^2$ のグラフと $y=x+2$ のグラフとの共有点 (u,v) を求めるには連立方程式 $v=u^2$ かつ $v=u+2$ を解く. この連立方程式より $u^2=u+2$ なので, $u^2-u-2=0$, $u=2$ または $u=-1$.

$y=x^2$ のグラフと $y=x+2$ のグラフとの共有点 (u,v) を求めるには連立方程式 $v=u^2$ かつ $v=u+2$ を解く．この連立方程式より $u^2=u+2$ なので，$u^2-u-2=0$，$u=2$ または $u=-1$．$v=u+2$ なので，$u=2$ のとき $v=4$，$u=-1$ のとき $v=1$．

$y=x^2$ のグラフと $y=x+2$ のグラフとの共有点 (u,v) を求めるには連立方程式 $v=u^2$ かつ $v=u+2$ を解く. この連立方程式より $u^2=u+2$ なので, $u^2-u-2=0$, $u=2$ または $u=-1$. $v=u+2$ なので, $u=2$ のとき $v=4$, $u=-1$ のとき $v=1$. よって, $(u,v)=(2,4)$ または $(u,v)=(-1,1)$.

$y=x^2$ のグラフと $y=x+2$ のグラフとの共有点 (u,v) を求めるには連立方程式 $v=u^2$ かつ $v=u+2$ を解く．この連立方程式より $u^2=u+2$ なので，$u^2-u-2=0$ ，$u=2$ または $u=-1$ ．$v=u+2$ なので，$u=2$ のとき $v=4$ ，$u=-1$ のとき $v=1$ ．よって，$(u,v)=(2,4)$ または $(u,v)=(-1,1)$ ．故に，関数 $y=x^2$ のグラフと関数 $y=x+2$ のグラフとの共有点は $(2,4)$ と $(-1,1)$ とである．



終

一般的に述べる.

一般的に述べる．変数 x の関数 $y=f(x)$ と関数 $y=g(x)$ 及び実数 u,v について，**4.4** 節で述べたように，

$$\text{点 }(u,v)\text{ が }y=f(x)\text{ のグラフに属す}\iff f(u)=v\ ,$$

$$\text{点 }(u,v)\text{ が }y=g(x)\text{ のグラフに属す}\iff g(u)=v\ ;$$

一般的に述べる．変数 x の関数 $y=f(x)$ と関数 $y=g(x)$ 及び実数 u,v について，**4.4** 節で述べたように，

$$\text{点 } (u,v) \text{ が } y=f(x) \text{ のグラフに属す} \iff f(u)=v \ ,$$

$$\text{点 } (u,v) \text{ が } y=g(x) \text{ のグラフに属す} \iff g(u)=v \ ;$$

よって，

$$\text{点 } (u,v) \text{ が } y=f(x) \text{ のグラフと } y=g(x) \text{ のグラフとの共有点である}$$

$$\iff \text{点 } (u,v) \text{ は } y=f(x) \text{ のグラフに属しかつ } y=g(x) \text{ のグラフにも属す}$$

$$\iff v=f(u) \text{ かつ } v=g(u) \ .$$

一般的に述べる．変数 x の関数 $y=f(x)$ と関数 $y=g(x)$ 及び実数 u,v について，**4.4** 節で述べたように，

$$\text{点 } (u,v) \text{ が } y=f(x) \text{ のグラフに属す} \iff f(u)=v \ ,$$

$$\text{点 } (u,v) \text{ が } y=g(x) \text{ のグラフに属す} \iff g(u)=v \ ;$$

よって，

$$\text{点 } (u,v) \text{ が } y=f(x) \text{ のグラフと } y=g(x) \text{ のグラフとの共有点である}$$

$$\iff \text{点 } (u,v) \text{ は } y=f(x) \text{ のグラフに属しかつ } y=g(x) \text{ のグラフにも属す}$$

$$\iff v=f(u) \text{ かつ } v=g(u) \ .$$

このように，関数 $y=f(x)$ のグラフと関数 $y=g(x)$ のグラフとの共有点 (x,y) は，連立方程式 $y=f(x)$ かつ $y=g(x)$ の実数解の順序対である．

$\boxed{例}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=x^2-x-3$ のグラフと x の関数 $y=2x^2-5x$ のグラフとの共有点を求める．

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y = x^2 - x - 3$ のグラフと x の関数 $y = 2x^2 - 5x$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x, y) について，

$y = x^2 - x - 3$ かつ $y = 2x^2 - 5x$ なので，

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y = x^2 - x - 3$ のグラフと x の関数 $y = 2x^2 - 5x$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x, y) について，$y = x^2 - x - 3$ かつ $y = 2x^2 - 5x$ なので，

$$x^2 - x - 3 = 2x^2 - 5x \ ,$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \ ,$$

$$(x-1)(x-3) = 0 \ ,$$

$$x = 1 \ \text{または} \ x = 3 \ .$$

$\boxed{例}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=x^2-x-3$ のグラフと x の関数 $y=2x^2-5x$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x,y) について，$y=x^2-x-3$ かつ $y=2x^2-5x$ なので，

$$x^2-x-3=2x^2-5x\ ,$$

$$x^2-4x+3=0\ ,$$

$$(x-1)(x-3)=0\ ,$$

$$x=1 \text{ または } x=3\ .$$

更に，$y=x^2-x-3$ より，$x=1$ のとき $y=-3$，$x=3$ のとき $y=3$．

例 xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=x^2-x-3$ のグラフと x の関数 $y=2x^2-5x$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x,y) について，$y=x^2-x-3$ かつ $y=2x^2-5x$ なので，

$$x^2-x-3=2x^2-5x\ ,$$

$$x^2-4x+3=0\ ,$$

$$(x-1)(x-3)=0\ ,$$

$$x=1 \text{ または } x=3\ .$$

更に，$y=x^2-x-3$ より，$x=1$ のとき $y=-3$，$x=3$ のとき $y=3$．故に，関数 $y=x^2-x-3$ のグラフと関数 $y=2x^2-5x$ のグラフとの共有点は $(1,-3)$ と $(3,3)$ とである． 終

$\boxed{\text{問}4.11.1}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y = x^2 - 4x + 5$ のグラフと x の関数 $y = 3x^2 + x - 7$ のグラフとの共有点を求めよ．

共有点 (x, y) について，　$=$　　　かつ　$=$　　　なので，

$$= \qquad ,$$

$$= 0\ ,$$

$$(\qquad)(\qquad) = 0\ ,$$

$$x = \qquad \text{または} \qquad .$$

更に，$y =$　　　より，$x =$　　のとき $y =$　　，$x =$　　のとき $y =$　　．故に，共有点は　　　と　　　とである．

問4.11.1 xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=x^2-4x+5$ のグラフと x の関数 $y=3x^2+x-7$ のグラフとの共有点を求めよ．

共有点 (x,y) について， $y=x^2-4x+5$ かつ $y=2x^2+5x-12$ なので，

$$x^2-4x+5=3x^2+x-7 \ ,$$

$$2x^2+5x-12=0 \ ,$$

$$(x+4)(2x-3)=0 \ ,$$

$$x=-4 \ \text{または} \ \frac{3}{2} \ .$$

更に， $y=x^2-4x+5$ より， $x=-4$ のとき $y=37$ ， $x=\dfrac{3}{2}$ のとき $y=\dfrac{5}{4}$ ．故に，共有点は $(-4,37)$ と $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{4}\right)$ とである． 終

関数 $y = f(x)$ のグラフと関数 $y = g(x)$ のグラフとの共有点 (x, y) は，連立方程式 $y = f(x)$ かつ $y = g(x)$ の実数解の順序対である．それ故，この連立方程式の実数解が無いときは，$y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフとの共有点も無い．

$\boxed{例}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y = x^2 - 2x - 5$ のグラフと x の関数 $y = 2x^2 - 5x - 1$ のグラフとの共有点を求める．

例 xy 座標平面において，変数 x の関数 $y = x^2 - 2x - 5$ のグラフと x の関数 $y = 2x^2 - 5x - 1$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x, y) について，$y = x^2 - 2x - 5$ かつ $y = 2x^2 - 5y - 1$ なので，

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=x^2-2x-5$ のグラフと x の関数 $y=2x^2-5x-1$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x,y) について，$y=x^2-2x-5$ かつ $y=2x^2-5y-1$ なので，

$$x^2-2x-5=2x^2-5x-1\ ,$$

$$x^2-3x+4=0\ .$$

例 xy 座標平面において，変数 x の関数 $y = x^2 - 2x - 5$ のグラフと x の関数 $y = 2x^2 - 5x - 1$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x, y) について，$y = x^2 - 2x - 5$ かつ $y = 2x^2 - 5y - 1$ なので，

$$x^2 - 2x - 5 = 2x^2 - 5x - 1 \ ,$$

$$x^2 - 3x + 4 = 0 \ .$$

この x に関する 2 次方程式は，判別式の値が $(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 < 0$ なので，実数解が無い．

例 xy 座標平面において，変数 x の関数 $y = x^2 - 2x - 5$ のグラフと x の関数 $y = 2x^2 - 5x - 1$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x, y) について，$y = x^2 - 2x - 5$ かつ $y = 2x^2 - 5y - 1$ なので，

$$x^2 - 2x - 5 = 2x^2 - 5x - 1\ ,$$

$$x^2 - 3x + 4 = 0\ .$$

この x に関する 2 次方程式は，判別式の値が $(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 < 0$ なので，実数解が無い．従って，関数 $y = x^2 - 2x - 5$ のグラフと関数 $y = 2x^2 - 5x - 1$ のグラフとの共有点は無い．

終

$\boxed{\text{問}4.11.2}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y = x^2 - 2x + 1$ のグラフと x の関数 $y = 3x^2 - 7x + 5$ のグラフとの共有点を求めよ．

共有点 (x, y) について， $=$ かつ $=$ なので，

$$=\qquad ,$$

$$=0\ .$$

この 2 次方程式は，判別式の値が なので， ．

従って，関数 $y = x^2 - 2x + 1$ のグラフと関数 $y = 3x^2 - 7x + 5$ のグラフとの共有点は ．

$\boxed{\text{終}}$

問4.11.2 xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=x^2-2x+1$ のグラフと x の関数 $y=3x^2-7x+5$ のグラフとの共有点を求めよ.

共有点 (x,y) について， $y=x^2-2x+1$ かつ $y=3x^2-7x+5$ なので，

$$x^2-2x+1=3x^2-7x+5 \ ,$$

$$2x^2-5x+4=0 \ .$$

この 2 次方程式は，判別式の値が $5^3-4\cdot 2\cdot 4<0$ なので，実数解が無い.
従って，関数 $y=x^2-2x+1$ のグラフと関数 $y=3x^2-7x+5$ のグラフとの共有点は無い. 終

$\boxed{例}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=\dfrac{2x-6}{3x-1}$ $\left(x \neq \dfrac{1}{3}\right)$ のグラフと x の関数 $y=\dfrac{x+9}{4}$ のグラフとの共有点を求める．

$\boxed{例}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y = \dfrac{2x-6}{3x-1}$ $\left(x \neq \dfrac{1}{3} \right)$ のグラフと x の関数 $y = \dfrac{x+9}{4}$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x, y) について，

$y = \dfrac{2x-6}{3x-1}$ かつ $y = \dfrac{x+9}{4}$ なので，

$\boxed{例}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=\dfrac{2x-6}{3x-1}$ $\left(x \neq \dfrac{1}{3} \right)$ のグラフと x の関数 $y=\dfrac{x+9}{4}$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x, y) について，$y=\dfrac{2x-6}{3x-1}$ かつ $y=\dfrac{x+9}{4}$ なので，

$$\frac{2x-6}{3x-1}=\frac{x+9}{4}\ ,$$

$$4(2x-6)=(x+9)(3x-1)\ ,$$

$$3x^2+18x+15=0\ ,$$

$$x^2+6x+5=0\ ,$$

$$(x+1)(x+5)=0\ .$$

$x=-1$ または $x=-5$.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=\dfrac{2x-6}{3x-1}$ $\left(x \neq \dfrac{1}{3}\right)$ のグラフと x の関数 $y=\dfrac{x+9}{4}$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x,y) について，

$y=\dfrac{2x-6}{3x-1}$ かつ $y=\dfrac{x+9}{4}$ なので，

$$\frac{2x-6}{3x-1}=\frac{x+9}{4}\ ,$$

$$4(2x-6)=(x+9)(3x-1)\ ,$$

$$3x^2+18x+15=0\ ,$$

$$x^2+6x+5=0\ ,$$

$$(x+1)(x+5)=0\ .$$

$$x=-1 \text{ または } x=-5\ .$$

どちらのときも $x \neq \dfrac{1}{3}$ ．

$\boxed{例}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=\dfrac{2x-6}{3x-1}$ $\left(x \neq \dfrac{1}{3}\right)$ のグラフと x の関数 $y=\dfrac{x+9}{4}$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x,y) について，$y=\dfrac{2x-6}{3x-1}$ かつ $y=\dfrac{x+9}{4}$ なので，

$$\frac{2x-6}{3x-1}=\frac{x+9}{4}\ ,$$

$$4(2x-6)=(x+9)(3x-1)\ ,$$

$$3x^2+18x+15=0\ ,$$

$$x^2+6x+5=0\ ,$$

$$(x+1)(x+5)=0\ .$$

$$x=-1 \text{ または } x=-5\ .$$

どちらのときも $x \neq \dfrac{1}{3}$ ． $y=\dfrac{x+9}{4}$ より， $x=-1$ のとき $y=2$ ． $x=-5$ のとき $y=1$ ．

例 xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=\dfrac{2x-6}{3x-1}$ $\left(x\neq\dfrac{1}{3} \right)$ のグラフと x の関数 $y=\dfrac{x+9}{4}$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x,y) について，$y=\dfrac{2x-6}{3x-1}$ かつ $y=\dfrac{x+9}{4}$ なので，

$$\frac{2x-6}{3x-1}=\frac{x+9}{4}\ ,$$

$$4(2x-6)=(x+9)(3x-1)\ ,$$

$$3x^2+18x+15=0\ ,$$

$$x^2+6x+5=0\ ,$$

$$(x+1)(x+5)=0\ .$$

$$x=-1\ \text{または}\ x=-5\ .$$

どちらのときも $x\neq\dfrac{1}{3}$ ．$y=\dfrac{x+9}{4}$ より，$x=-1$ のとき $y=2$ ．$x=-5$ のとき $y=1$ ．共有点は $(-1,2)$ と $(-5,1)$ とである． 終

問4.11.3 xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=\dfrac{7x+3}{2x-3}$ $\left(x \neq \dfrac{3}{2}\right)$ のグラフと x の関数 $y=\dfrac{x+9}{3}$ のグラフとの共有点を求めよ．

共有点 (x,y) について， $\quad = \quad$ かつ $\quad = \quad$ なので，

$$\quad = \quad ,$$

$$(\quad)=(\quad)(\quad) ,$$

$$=0 ,$$

$$=0 ,$$

$$(\quad)(\quad)=0 ,$$

$$x= \quad \text{または} \quad x= \quad .$$

どちらのときも $x \neq \dfrac{3}{2}$． $x=$ 　のとき $y=$ 　． $x=$ 　のとき $y=$ 　．共有点は 　と 　とである．

$\boxed{\text{問}4.11.3}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=\dfrac{7x+3}{2x-3}$ $\left(x\neq\dfrac{3}{2}\right)$ のグラフと x の関数 $y=\dfrac{x+9}{3}$ のグラフとの共有点を求めよ．

共有点 (x,y) について， $y=\dfrac{7x+3}{2x-3}$ かつ $y=\dfrac{x+9}{3}$ なので，

$$\frac{7x+3}{2x-3}=\frac{x+9}{3}\ ,$$

$$3(7x+3)=(x+9)(2x-3)\ ,$$

$$2x^2-6x-36=0\ ,$$

$$x^2-3x-18=0\ ,$$

$$(x-6)(x+3)=0\ ,$$

$$x=6\ \text{または}\ x=-3\ .$$

どちらのときも $x\neq\dfrac{3}{2}$ ． $x=6$ のとき $y=5$ ． $x=-3$ のとき $y=2$ ．共有点は $(6,5)$ と $(-3,2)$ とである．

$\boxed{\text{終}}$