

4. 拡充 1 複素数の平方根

2.6 節で述べたように，数 a に対して， $x^2 = a$ となる数 x を a の平方根という．2.8 節で述べたように，実数の範囲では -1 の平方根は無い．このように，どんな実数にもその平方根があるとはいえない．しかし，複素数の範囲で考えると，任意の複素数に対してその平方根がある．

例 複素数 $5 - 12i$ の平方根を求める.

例 複素数 $5 - 12i$ の平方根を求める. $5 - 12i$ の平方根を $x + iy$ (x, y は実数) とおく :

$$(x + iy)^2 = 5 - 12i .$$

例 複素数 $5 - 12i$ の平方根を求める. $5 - 12i$ の平方根を $x + iy$ (x, y は実数) とおく :

$$(x + iy)^2 = 5 - 12i .$$

$$(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \quad \text{なので}$$

$$x^2 - y^2 + 2ixy = 5 - 12i .$$

例 複素数 $5 - 12i$ の平方根を求める. $5 - 12i$ の平方根を $x + iy$ (x, y は実数) とおく :

$$(x + iy)^2 = 5 - 12i .$$

$(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ なので

$$x^2 - y^2 + 2ixy = 5 - 12i .$$

x と y とは実数なので, $x^2 - y^2$ 及び $2xy$ も実数である.

例 複素数 $5 - 12i$ の平方根を求める. $5 - 12i$ の平方根を $x + iy$ (x, y は実数) とおく :

$$(x + iy)^2 = 5 - 12i .$$

$(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ なので

$$x^2 - y^2 + 2ixy = 5 - 12i .$$

x と y とは実数なので, $x^2 - y^2$ 及び $2xy$ も実数である. 従って定理 1.9.1 より,

$$x^2 - y^2 = 5 \quad \text{かつ} \quad 2xy = -12 .$$

例 複素数 $5 - 12i$ の平方根を求める. $5 - 12i$ の平方根を $x + iy$ (x, y は実数) とおく :

$$(x + iy)^2 = 5 - 12i .$$

$(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ なので

$$x^2 - y^2 + 2ixy = 5 - 12i .$$

x と y とは実数なので, $x^2 - y^2$ 及び $2xy$ も実数である. 従って定理 1.9.1 より,

$$x^2 - y^2 = 5 \quad \text{かつ} \quad 2xy = -12 .$$

この連立方程式を解く.

例 複素数 $5 - 12i$ の平方根を求める. $5 - 12i$ の平方根を $x + iy$ (x, y は実数) とおく :

$$(x + iy)^2 = 5 - 12i .$$

$(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ なので

$$x^2 - y^2 + 2ixy = 5 - 12i .$$

x と y とは実数なので, $x^2 - y^2$ 及び $2xy$ も実数である. 従って定理 1.9.1 より,

$$x^2 - y^2 = 5 \quad \text{かつ} \quad 2xy = -12 .$$

この連立方程式を解く. $x^2 - y^2 = 5$ の両辺に x^2 を掛けて

$$x^4 - x^2y^2 = 5x^2 ,$$

$$x^4 - (xy)^2 = 5x^2 ,$$

例 複素数 $5 - 12i$ の平方根を求める. $5 - 12i$ の平方根を $x + iy$ (x, y は実数) とおく :

$$(x + iy)^2 = 5 - 12i .$$

$$(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \quad \text{なので}$$

$$x^2 - y^2 + 2ixy = 5 - 12i .$$

x と y とは実数なので, $x^2 - y^2$ 及び $2xy$ も実数である. 従って定理 1.9.1 より,

$$x^2 - y^2 = 5 \quad \text{かつ} \quad 2xy = -12 .$$

この連立方程式を解く. $x^2 - y^2 = 5$ の両辺に x^2 を掛けて

$$x^4 - x^2y^2 = 5x^2 ,$$

$$x^4 - (xy)^2 = 5x^2 ,$$

$$xy = -6 \quad \text{なので}$$

$$x^4 - (-6)^2 = 5x^2 ,$$

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0 .$$

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0 \text{ .}$$

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0 .$$

$$x^2 = X \quad \text{とおくと}$$

$$X^2 - 5X - 36 = 0 ,$$

$$(X - 9)(X + 4) = 0 ,$$

$$X = 9 \quad \text{または} \quad X = -4 ,$$

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0 .$$

$$x^2 = X \quad \text{とおくと}$$

$$X^2 - 5X - 36 = 0 ,$$

$$(X - 9)(X + 4) = 0 ,$$

$$X = 9 \quad \text{または} \quad X = -4 ,$$

$$X = x^2 \quad \text{なので,} \quad x^2 = 9 \quad \text{または} \quad x^2 = -4 .$$

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0 .$$

$$x^2 = X \quad \text{とおくと}$$

$$X^2 - 5X - 36 = 0 ,$$

$$(X - 9)(X + 4) = 0 ,$$

$$X = 9 \quad \text{または} \quad X = -4 ,$$

$X = x^2$ なので, $x^2 = 9$ または $x^2 = -4$. x は実数なので $x^2 \geq 0$, 従って $x^2 = 9$.

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0 .$$

$x^2 = X$ とおくと

$$X^2 - 5X - 36 = 0 ,$$

$$(X - 9)(X + 4) = 0 ,$$

$$X = 9 \text{ または } X = -4 ,$$

$X = x^2$ なので, $x^2 = 9$ または $x^2 = -4$. x は実数なので $x^2 \geq 0$, 従って $x^2 = 9$. よって

$$x = \pm 3 .$$

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0 .$$

$$x^2 = X \quad \text{とおくと}$$

$$X^2 - 5X - 36 = 0 ,$$

$$(X - 9)(X + 4) = 0 ,$$

$$X = 9 \quad \text{または} \quad X = -4 ,$$

$X = x^2$ なので, $x^2 = 9$ または $x^2 = -4$. x は実数なので $x^2 \geq 0$, 従って $x^2 = 9$. よって

$$x = \pm 3 .$$

$xy = -6$ なので, $x = 3$ のとき $y = -2$, $x = -3$ のとき $y = 2$.

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0 .$$

$$x^2 = X \quad \text{とおくと}$$

$$X^2 - 5X - 36 = 0 ,$$

$$(X - 9)(X + 4) = 0 ,$$

$$X = 9 \quad \text{または} \quad X = -4 ,$$

$X = x^2$ なので, $x^2 = 9$ または $x^2 = -4$. x は実数なので $x^2 \geq 0$, 従って $x^2 = 9$. よって

$$x = \pm 3 .$$

$xy = -6$ なので, $x = 3$ のとき $y = -2$, $x = -3$ のとき $y = 2$. 従って

$$x + iy = \pm 3 \mp 2i = \pm(3 - 2i) \quad \text{複号同順} .$$

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0 .$$

$$x^2 = X \quad \text{とおくと}$$

$$X^2 - 5X - 36 = 0 ,$$

$$(X - 9)(X + 4) = 0 ,$$

$$X = 9 \quad \text{または} \quad X = -4 ,$$

$X = x^2$ なので, $x^2 = 9$ または $x^2 = -4$. x は実数なので $x^2 \geq 0$, 従って $x^2 = 9$. よって

$$x = \pm 3 .$$

$xy = -6$ なので, $x = 3$ のとき $y = -2$, $x = -3$ のとき $y = 2$. 従って

$$x + iy = \pm 3 \mp 2i = \pm(3 - 2i) \quad \text{複号同順} .$$

故に, 複素数 $5 - 12i$ の平方根は $\pm(3 - 2i)$ である.

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0 .$$

$x^2 = X$ とおくと

$$X^2 - 5X - 36 = 0 ,$$

$$(X - 9)(X + 4) = 0 ,$$

$$X = 9 \text{ または } X = -4 ,$$

$X = x^2$ なので, $x^2 = 9$ または $x^2 = -4$. x は実数なので $x^2 \geq 0$, 従って $x^2 = 9$. よって

$$x = \pm 3 .$$

$xy = -6$ なので, $x = 3$ のとき $y = -2$, $x = -3$ のとき $y = 2$. 従って

$$x + iy = \pm 3 \mp 2i = \pm(3 - 2i) \text{ 複号同順 } .$$

故に, 複素数 $5 - 12i$ の平方根は $\pm(3 - 2i)$ である.

実際に $\pm(3 - 2i)$ を 2 乗すると

$$\{\pm(3 - 2i)\}^2 = (3 - 2i)^2 = 9 - 4 - 12i = 5 - 12i .$$

終

問4.拡充1 複素数 $24+10i$ の平方根を求めよ.

$24+10i$ の平方根を $x+iy$ (x, y は実数) とおく: $(x+iy)^2 = 24+10i$,
 $= 24+10i$. x と y とは実数なので, 及び も
 実数である. 従って $= 24$ かつ $= 10$. $= 24$ の両辺
 に x^2 を掛けて, $= 24x^2$, $()^2 = 24x^2$; $xy =$ なので,
 $=$, $= 0$, $(x^2)(x^2) = 0$, $x^2 =$ また
 は $x^2 =$. x は実数なので $x^2 \geq 0$, 従って $x^2 =$. よって $x =$.
 $xy =$ より, $x =$ のとき $y =$, $x =$ のとき $y =$. 従って
 $x+iy =$ $= \pm()$ (複号同順) .

故に複素数 $24+10i$ の平方根は $\pm()$ である.

問4.拡充1 複素数 $24+10i$ の平方根を求めよ.

$24+10i$ の平方根を $x+iy$ (x, y は実数) とおく: $(x+iy)^2 = 24+10i$,
 $= 24+10i$. x と y とは実数なので, x^2-y^2 及び $2xy$ も
実数である. 従って $x^2-y^2=24$ かつ $2xy=10$. $x^2-y^2=24$ の両辺
に x^2 を掛けて, $x^4-x^2y^2=24x^2$, $x^4-(xy)^2=24x^2$; $xy=5$ なので,
 $x^4-5^2=24x^2$, $x^4-24x^2-25=0$, $(x^2-25)(x^2+1)=0$, $x^2=25$ また
は $x^2=-1$. x は実数なので $x^2 \geq 0$, 従って $x^2=25$. よって $x=\pm 5$.
 $xy=5$ より, $x=5$ のとき $y=1$, $x=-5$ のとき $y=-1$. 従って

$$x+iy = \pm 5 \pm i = \pm(5+i) \quad (\text{複号同順}).$$

故に複素数 $24+10i$ の平方根は $\pm(5+i)$ である.