5.1　不等式の性質

実数の大小関係に関関する次の法則が成り立つ..

法則 5.1.1　任意の実数 a, b, c について，$a < b$ かつ $b < c$ ならば，$a < c$.

定理 5.1.1　任意の実数 a, b, c について以下のことが成り立つ：

$$a < b \text{ かつ } b \leq c \text{ ならば，} \quad a < c \quad ;$$
$$a \leq b \text{ かつ } b < c \text{ ならば，} \quad a < c \quad ;$$
$$a \leq b \text{ かつ } b \leq c \text{ ならば，} \quad a \leq c \quad .$$

証明　例として“ $a < b$ かつ $b \leq c$ ならば $a < c$ ”を証明する．

　実数 a, b, c について $a < b$ かつ $b \leq c$ と仮定する． $b \leq c$ なので，法則 **1.5.1** により， $b < c$ または $b = c$ ． $a < b$ なので， $b < c$ のとき法則 **5.1.1** により $a < c$ ．また， $a < b$ なので， $b = c$ のとき $a < c$ ．このように， $b < c$ のときも $b = c$ のときも $a < c$ ．（証明終了）

(法則 1.5.1) 任意の実数 a, b について， $a \leq b \iff a < b$ または $a = b$ ．

(法則 5.1.1) 任意の実数 a, b, c について， $a < b$ かつ $b < c$ ならば， $a < c$ ．

定理 5.1.2　任意の実数 a, b, c, d について,

$$a < b \text{ かつ } c < d \quad \text{ならば} \quad a+c < b+d \ ,$$
$$a \leq b \text{ かつ } c \leq d \quad \text{ならば} \quad a+c \leq b+d \ .$$

証明　例として“ $a < b$ かつ $c < d$ ならば $a+c < b+d$ ”を証明する.
$a < b$ かつ $c < d$ と仮定する．$a < b$ なので，法則 **1.5.3** により

$$a+c < b+c \ .$$

また，$c < d$ なので，法則 **1.5.3** により $c+b < d+b$ ，つまり

$$b+c < b+d \ .$$

このように，$a+c < b+c$ かつ $b+c < b+d$ なので，法則 **5.1.1** により
$a+c < b+d$.　(証明終了)

(法則 1.5.3) 任意の実数 a, b, c について，$a < b$ ならば $a+c < b+c$.
(法則 5.1.1) 任意の実数 a, b, c について，$a < b$ かつ $b < c$ ならば，$a < c$.

実数 a, b, c に対して，“ $a < b$ かつ $b < c$ ” ということを $a < b < c$ というように，“ $a \leq b$ かつ $b \leq c$ ” ということを $a \leq b \leq c$ というように書き表す.

定理 5.1.3　任意の実数 a, b, c, d について,

$$0 \leq a < b \text{ かつ } 0 \leq c < d \quad \text{ならば} \quad ac < bd \ ,$$

$$0 \leq a \leq b \text{ かつ } 0 \leq c \leq d \quad \text{ならば} \quad ac \leq bd \ .$$

証明　例として “ $0 \leq a \leq b$ かつ $0 \leq c \leq d$ ならば $ac \leq bd$ ” を証明する. $0 \leq a \leq b$ かつ $0 \leq c \leq d$ と仮定する. $a \leq b$ かつ $c \geq 0$ なので, 定理 **1.5.7** により $ac \leq bc$. また, $c \leq d$ かつ $b \geq 0$ なので, 定理 **1.5.7** により $cb \leq db$. このように, $ac \leq bc$ かつ $bc \leq bd$ なので, 定理 **5.1.1** により $ac \leq bd$.　(証明終了)

(定理 1.5.7) 任意の実数 a, b, c について, $a \leq b$ かつ $c \geq 0$ ならば, $ac \leq bc$.

(定理 5.1.1) 任意の実数 a, b, c について, $a \leq b$ かつ $b \leq c$ ならば, $a \leq c$.

定理 5.1.4　任意の実数 a と b とについて,

$$0 \leq a < b \text{ ならば } a^2 < b^2 \ ,$$

$$0 \leq a \leq b \text{ ならば } a^2 \leq b^2 \ .$$

証明　例として $0 \leq a < b$ ならば $a^2 < b^2$ を証明する.

　定理 5.1.3 により, 任意の実数 a と b とについて,

$$0 \leq a < b \text{ かつ } 0 \leq a < b \text{ ならば, } aa < bb \ ;$$

つまり, $0 \leq a < b$ ならば $a^2 < b^2$.　(証明終了)

(定理 5.1.3) 任意の実数 a, b について, $0 \leq a < b$ かつ $0 \leq c < d$ ならば, $ac < bd$.

実数 a と b とについて，$a^2 < b^2$ であるなら $a < b$ であるとは限らない；例えば，$a = 2$ ，$b = -3$ とすると，$a^2 < b^2$ であるが $a \not< b$ である．

実数 a と b とについて，$a^2 < b^2$ であるなら $a < b$ であるとは限らない；例えば，$a = 2$ ，$b = -3$ とすると，$a^2 < b^2$ であるが $a \not< b$ である．しかし，$b \geq 0$ であれば，$a^2 < b^2$ であるなら $a < b$ である．

実数 a と b とについて，$a^2 < b^2$ であるなら $a < b$ であるとは限らない；例えば，$a = 2$，$b = -3$ とすると，$a^2 < b^2$ であるが $a \not< b$ である．しかし，$b \geq 0$ であれば，$a^2 < b^2$ であるなら $a < b$ である．

定理 5.1.5 任意の実数 a と b とについて以下のことが成り立つ：

$$a^2 < b^2 \text{ かつ } b \geq 0 \text{ ならば，} a < b \text{；}$$

$$a^2 \leq b^2 \text{ かつ } b \geq 0 \text{ ならば，} a \leq b \text{．}$$

定理 5.1.5　任意の実数 a と b とについて以下のことが成り立つ：

$$a^2 < b^2 \text{ かつ } b \geq 0 \text{ ならば，} \quad a < b \ ;$$

$$a^2 \leq b^2 \text{ かつ } b \geq 0 \text{ ならば，} \quad a \leq b \ .$$

証明　“ $a^2 \leq b^2$ かつ $b \geq 0$ ならば，$a \leq b$ ” を証明する．

　$b \geq 0$ と仮定する．$a > b$ ならば，仮定 $0 \leq b$ より $0 \leq b < a$ なので，**定理 5.1.4** により $b^2 < a^2$ ；つまり，$a > b$ ならば $a^2 > b^2$ ．対偶をとると，

$$a^2 \not> b^2 \text{ ならば } a \not> b \ .$$

法則 1.5.2 により，

$$a^2 \not> b^2 \iff a^2 \leq b^2 \ , \qquad a \not> b \iff a \leq b \ ,$$

従って，$a^2 \leq b^2$ ならば $a \leq b$ ．

　つまり，$b \geq 0$ とすると，$a^2 \leq b^2$ ならば $a \leq b$ ．故に，$a^2 \leq b^2$ かつ $b \geq 0$ ならば，$a \leq b$ ．　(証明終了)

(定理 5.1.4) 任意の実数 a, b について，$0 \leq a < b$ ならば $a^2 < b^2$ ．

(法則 1.5.2) 任意の実数 a, b について，$a \not> b \iff a \leq b$ ．

例えば，3 と 5 とについて $3<5$ であるが，それらの逆数 $\dfrac{1}{3}$ と $\dfrac{1}{5}$ とについては $\dfrac{1}{3}>\dfrac{1}{5}$ である．

例えば，3 と 5 とについて $3 < 5$ であるが，それらの逆数 $\dfrac{1}{3}$ と $\dfrac{1}{5}$ とについては $\dfrac{1}{3} > \dfrac{1}{5}$ である．一般的に次の定理が成り立つ．

定理 5.1.6　任意の実数 a と b とについて，

$$0 < a < b \text{ ならば } \frac{1}{a} > \frac{1}{b} ,$$

$$0 < a \leq b \text{ ならば } \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} .$$

定理 5.1.6　任意の実数 a と b とについて,

$$0 < a < b \text{ ならば } \frac{1}{a} > \frac{1}{b} ,$$

$$0 < a \leq b \text{ ならば } \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} .$$

証明　例として“ $0 < a < b$ ならば $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ”を証明する. $0 < a < b$ と仮定する. $a > 0$, 法則 **5.1.1** により $b > 0$, 定理 **1.5.8** により $ab > 0$, 従って定理 **1.5.13** により $\frac{1}{ab} > 0$. $a < b$ かつ $\frac{1}{ab} > 0$ なので, 法則 **1.5.3** により $a\frac{1}{ab} < b\frac{1}{ab}$, つまり $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.　(証明終了)

(法則 5.1.1) 任意の実数 a, b, c について, $a < b$ かつ $b < c$ ならば, $a < c$.

(定理 1.5.8) 任意の実数 a, b について, $a > 0$ かつ $b > 0$ ならば, $ab > 0$.

(定理 1.5.13) 任意の実数 a について, $a > 0$ ならば $\frac{1}{a} > 0$.

(法則 1.5.3) 任意の実数 a, b, c について, $a < b$ かつ $c > 0$ ならば, $ac < bc$.

変数 x に関する不等式とは，x の値に関する条件を表す不等式のことである．**1.9** 節で述べたように虚数には大小関係がないので，特に断りがない限り，不等式に表れる変数は実数を表す．それで，“ 実数を表す変数 x に関する不等式 ” というべきところを多くは “ 変数 x に関する不等式 ” と略す．