5.2　2次不等式の証明

変数 x に関する不等式が次の何れかの形に整理できるとき，その不等式を x に関する 2 次不等式という：

$$ax^2+bx+c<0\ ,\quad ax^2+bx+c\leq 0\ ,\quad ax^2+bx+c>0\ ,\quad ax^2+bx+c\geq 0\ ;$$

ここで定数 a,b,c は実数を表し $a\neq 0$ ． 2 次不等式の証明とは目標の 2 次不等式を導くことである.

(定理 1.5.10) 任意の実数 a について $a^2 \geq 0$.

(定理 1.5.7) 任意の実数 a, b, c について, $a \geq b$ ならば $a + c \geq b + c$.

(定理 5.5.1) 任意の実数 a, b, c について, $a \geq b$ かつ $b > c$ ならば, $a > c$.

(定理 1.5.10) 任意の実数 a について $a^2 \geq 0$.

(定理 1.5.7) 任意の実数 a, b, c について, $a \geq b$ ならば $a+c \geq b+c$.

(定理 5.5.1) 任意の実数 a, b, c について, $a \geq b$ かつ $b > c$ ならば, $a > c$.

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す : 任意の実数 x について $x^2 - 6x + 11 > 0$.

(定理 1.5.10) 任意の実数 a について $a^2 \geq 0$.

(定理 1.5.7) 任意の実数 a, b, c について， $a \geq b$ ならば $a+c \geq b+c$.

(定理 5.5.1) 任意の実数 a, b, c について， $a \geq b$ かつ $b > c$ ならば， $a > c$.

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の実数 x について $x^2 - 6x + 11 > 0$ ． この不等式を導くために左辺の 2 次式を平方完成する.

$$x^2 - 6x + 11 = (x^2 - 2 \cdot 3x + 9) - 9 + 11 = (x-3)^2 + 2 \ .$$

(定理 1.5.10) 任意の実数 a について $a^2 \geq 0$.

(定理 1.5.7) 任意の実数 a, b, c について，$a \geq b$ ならば $a+c \geq b+c$.

(定理 5.5.1) 任意の実数 a, b, c について，$a \geq b$ かつ $b > c$ ならば，$a > c$.

例 次のことを示す：任意の実数 x について $x^2 - 6x + 11 > 0$ ．この不等式を導くために左辺の 2 次式を平方完成する.

$$x^2 - 6x + 11 = (x^2 - 2 \cdot 3x + 9) - 9 + 11 = (x-3)^2 + 2 .$$

任意の実数 x について，定理 **1.5.10** により $(x-3)^2 \geq 0$ ，定理 **1.5.7** により

$$(x-3)^2 + 2 \geq 2 ,$$

(定理 **1.5.10**) 任意の実数 a について $a^2 \geq 0$.

(定理 **1.5.7**) 任意の実数 a, b, c について， $a \geq b$ ならば $a+c \geq b+c$.

(定理 **5.5.1**) 任意の実数 a, b, c について， $a \geq b$ かつ $b > c$ ならば， $a > c$.

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の実数 x について $x^2 - 6x + 11 > 0$ ．この不等式を導くために左辺の 2 次式を平方完成する.

$$x^2 - 6x + 11 = (x^2 - 2 \cdot 3x + 9) - 9 + 11 = (x-3)^2 + 2 \ .$$

任意の実数 x について，定理 **1.5.10** により $(x-3)^2 \geq 0$ ，定理 **1.5.7** により

$$(x-3)^2 + 2 \geq 2 \ ,$$

$2 > 0$ なので，定理 **5.1.1** により

$$(x-3)^2 + 2 > 0 \ ,$$

(定理 **1.5.10**) 任意の実数 a について $a^2 \geq 0$.

(定理 **1.5.7**) 任意の実数 a, b, c について， $a \geq b$ ならば $a+c \geq b+c$.

(定理 **5.5.1**) 任意の実数 a, b, c について， $a \geq b$ かつ $b > c$ ならば， $a > c$.

例 次のことを示す：任意の実数 x について $x^2 - 6x + 11 > 0$. この不等式を導くために左辺の 2 次式を平方完成する.

$$x^2 - 6x + 11 = (x^2 - 2 \cdot 3x + 9) - 9 + 11 = (x-3)^2 + 2 \ .$$

任意の実数 x について，定理 **1.5.10** により $(x-3)^2 \geq 0$ ，定理 **1.5.7** により

$$(x-3)^2 + 2 \geq 2 \ ,$$

$2 > 0$ なので，定理 **5.1.1** により

$$(x-3)^2 + 2 > 0 \ ,$$

$(x-3)^2 + 2 = x^2 - 6x + 11$ なので

$$x^2 - 6x + 11 > 0 \ .$$

終

(法則 1.5.3) 任意の実数 a, b, c **について，** $a > b$ **ならば** $a + c > b + c$ **.**

(法則 1.5.3) 任意の実数 a, b, c について，$a > b$ ならば $a+c > b+c$.

実数 a と b とについて，$a - b \geq 0$ ならば，法則 **1.5.3** により $a - b + b \geq 0 + b$ つまり $a \geq b$.

(法則 1.5.3) 任意の実数 a, b, c について， $a > b$ ならば $a + c > b + c$.

実数 a と b とについて， $a - b \geq 0$ ならば，法則 **1.5.3** により $a - b + b \geq 0 + b$ つまり $a \geq b$ ．同様に， $a - b > 0$ ならば $a > b$.

(法則 1.5.3) 任意の実数 a, b, c について，$a > b$ ならば $a + c > b + c$.

実数 a と b とについて，$a - b \geq 0$ ならば，法則 **1.5.3** により $a - b + b \geq 0 + b$ つまり $a \geq b$ ．同様に，$a - b > 0$ ならば $a > b$ ．このように，任意の実数 a と b とについて次のようになる：

$$a - b \geq 0 \text{ ならば，} \quad a \geq b \text{ , } b \leq a \quad ;$$

$$a - b > 0 \text{ ならば，} \quad a > b \text{ , } b < a \quad .$$

(法則 1.5.3) 任意の実数 a, b, c について，$a > b$ ならば $a+c > b+c$.

実数 a と b とについて，$a-b \geq 0$ ならば，法則 **1.5.3** により $a-b+b \geq 0+b$ つまり $a \geq b$ ．同様に，$a-b > 0$ ならば $a > b$ ．このように，任意の実数 a と b とについて次のようになる：

$$a-b \geq 0 \text{ ならば，} \quad a \geq b \text{ ，} b \leq a \quad ;$$

$$a-b > 0 \text{ ならば，} \quad a > b \text{ ，} b < a \quad .$$

このことより次のことが分かる：

不等式 $A \geq B$ ，$B \leq A$ を導くためには不等式 $A-B \geq 0$ を導けばよい；

不等式 $A > B$ ，$B < A$ を導くためには不等式 $A-B > 0$ を導けばよい.

例 次のことを示す：任意の実数 x について $2x^2+14>12x-5$.

$\boxed{例}$ 次のことを示す：任意の実数 x について $2x^2+14>12x-5$ ． 不等式 $2x^2+14>12x-5$ を導くために不等式 $2x^2+14-(12x-5)>0$ を導く；

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の実数 x について $2x^2+14>12x-5$ ．不等式 $2x^2+14>12x-5$ を導くために不等式 $2x^2+14-(12x-5)>0$ を導く；そのために左辺の 2 次式 $2x^2+14-(12x-5)$ を平方完成する.

$\boxed{例}$ 次のことを示す：任意の実数 x について $2x^2+14>12x-5$ ．不等式 $2x^2+14>12x-5$ を導くために不等式 $2x^2+14-(12x-5)>0$ を導く；そのために左辺の 2 次式 $2x^2+14-(12x-5)$ を平方完成する．

$$
\begin{aligned}
2x^2+14-(12x-5) &= 2x^2-12x+19 = 2(x^2-6x)+19 \\
&= 2(x^2-6x+3^2-9)+19 = 2(x-3)^2-18+19 \\
&= 2(x-3)^2+1 \ .
\end{aligned}
$$

この式から始めること．

$\boxed{例}$ 次のことを示す：任意の実数 x について $2x^2+14>12x-5$ ．不等式 $2x^2+14>12x-5$ を導くために不等式 $2x^2+14-(12x-5)>0$ を導く；そのために左辺の 2 次式 $2x^2+14-(12x-5)$ を平方完成する.

$$\begin{aligned} 2x^2+14-(12x-5) &= 2x^2-12x+19 = 2(x^2-6x)+19 \\ &= 2(x^2-6x+3^2-9)+19 = 2(x-3)^2-18+19 \\ &= 2(x-3)^2+1 \ . \end{aligned}$$

任意の実数 x について, $(x-3)^2 \geq 0$ なので $2(x-3)^2 \geq 0$ ，よって $2(x-3)^2+1 \geq 1$ ；更に $1>0$ なので

$$2(x-3)^2+1 > 0 \ ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の実数 x について $2x^2+14>12x-5$ ． 不等式 $2x^2+14>12x-5$ を導くために不等式 $2x^2+14-(12x-5)>0$ を導く；そのために左辺の 2 次式 $2x^2+14-(12x-5)$ を平方完成する．

$$\begin{aligned} 2x^2+14-(12x-5) &= 2x^2-12x+19 = 2(x^2-6x)+19 \\ &= 2(x^2-6x+3^2-9)+19 = 2(x-3)^2-18+19 \\ &= 2(x-3)^2+1 \ . \end{aligned}$$

任意の実数 x について， $(x-3)^2 \geq 0$ なので $2(x-3)^2 \geq 0$ ，よって $2(x-3)^2+1 \geq 1$ ；更に $1>0$ なので

$$2(x-3)^2+1 > 0 \ ,$$

$2(x-3)^2+1 = 2x^2+14-(12x-5)$ なので，

$$2x^2+14-(12x-5) > 0 \ ,$$

$$2x^2+14 > 12x-5 \ .$$

$\boxed{例}$ 次のことを示す：任意の実数 x について $2x^2+14>12x-5$ ． 不等式 $2x^2+14>12x-5$ を導くために不等式 $2x^2+14-(12x-5)>0$ を導く；そのために左辺の 2 次式 $2x^2+14-(12x-5)$ を平方完成する．

$$\begin{aligned} 2x^2+14-(12x-5) &= 2x^2-12x+19 = 2(x^2-6x)+19 \\ &= 2(x^2-6x+3^2-9)+19 = 2(x-3)^2-18+19 \\ &= 2(x-3)^2+1 \ . \end{aligned}$$

任意の実数 x について， $(x-3)^2 \geq 0$ なので $2(x-3)^2 \geq 0$ ， よって $2(x-3)^2+1 \geq 1$ ；更に $1>0$ なので

$$2(x-3)^2+1 > 0 \ ,$$

$2(x-3)^2+1 = 2x^2+14-(12x-5)$ なので，

$$2x^2+14-(12x-5)>0 \ ,$$

$$2x^2+14>12x-5 \ .$$

故に，任意の実数 x について $2x^2+14>12x-5$ ． $\boxed{終}$

$\boxed{問5.2.1}$ 次のことを示せ：任意の実数 x について $5x^2-8x+2>2x^2-5$ ．

$$5x^2-8x+2-(2x^2-5)=$$

$$=\quad\Big(x\qquad\Big)^2+\qquad.$$

任意の実数 x について，$\Big(x\qquad\Big)^2\geq 0$ ，$\Big(x\qquad\Big)^2\geq 0$ なので，

$$\Big(x\qquad\Big)^2+\quad\geq\quad>0\ ,$$

よって $5x^2-8x+2-(2x^2-5)>0$ なので，$5x^2-8x+2>2x^2-5$ ．

$\boxed{\text{問} 5.2.1}$ 次のことを示せ：任意の実数 x について $5x^2-8x+2>2x^2-5$.

$$5x^2-8x+2-(2x^2-5)=3x^2-8x+7=3\left\{x^2-\frac{8}{3}x+\left(\frac{4}{3}\right)^2\right\}-\frac{16}{3}+7$$
$$=3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{5}{3}\ .$$

任意の実数 x について, $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2\geq 0$, $3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2\geq 0$ なので,

$$3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{5}{3}\geq\frac{5}{3}>0\ ,$$

よって $5x^2-8x+2-(2x^2-5)>0$ なので, $5x^2-8x+2>2x^2-5$. $\boxed{\text{終}}$

2 次式の平方完成によって次の定理が導かれる.

定理 5.2　定数 a, b, c は実数で $a \neq 0$ とする.
$a > 0$ かつ $b^2 - 4ac < 0$ ならば, 任意の実数 x について $ax^2 + bx + c > 0$.
$a < 0$ かつ $b^2 - 4ac < 0$ ならば, 任意の実数 x について $ax^2 + bx + c < 0$.

証明　“ $a > 0$ かつ $b^2 - 4ac < 0$ ならば, 任意の実数 x について $ax^2 + bx + c > 0$ ” であることを証明する.

$a > 0$ かつ $b^2 - 4ac < 0$ と仮定する. x の 2 次式 $ax^2 + bx + c$ を平方完成する:

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c &= a\left\{x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c \\
&= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right\} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \ .
\end{aligned}
$$

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} \ .$$

x を任意の実数とする． $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ なので，仮定 $a>0$ より $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ ，よって

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} \geq -\frac{b^2-4ac}{4a} \ .$$

仮定 $a>0$ かつ $b^2-4ac<0$ より $\dfrac{b^2-4ac}{4a}<0$ ，よって $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}>0$ なので，

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} > 0 \ .$$

故に，任意の実数 x について $ax^2+bx+c>0$. (証明終了)

不等式 $A \geq B$ を証明したとき，等号が成り立つ（つまり $A = B$ となる）条件を調べることがある．

$\boxed{例}$ 任意の実数 y について $3y^2-7y+8 \geq 5y-4$ であることを示し，等号が成り立つ（つまり $3y^2-7y+8=5y-4$ となる）条件を調べる．

$\boxed{\text{例}}$ 任意の実数 y について $3y^2-7y+8 \geq 5y-4$ であることを示し，等号が成り立つ（つまり $3y^2-7y+8=5y-4$ となる）条件を調べる．不等式 $3y^2-7y+8 \geq 5y-4$ を導くために不等式 $3y^2-7y+8-(5y-4) \geq 0$ を導く；

$\boxed{\text{例}}$ 任意の実数 y について $3y^2-7y+8 \geq 5y-4$ であることを示し，等号が成り立つ（つまり $3y^2-7y+8=5y-4$ となる）条件を調べる．不等式 $3y^2-7y+8 \geq 5y-4$ を導くために不等式 $3y^2-7y+8-(5y-4) \geq 0$ を導く；そのために左辺の 2 次式 $3y^2-7y+8-(5y-4)$ を平方完成する．

$\boxed{\text{例}}$ 任意の実数 y について $3y^2-7y+8 \geq 5y-4$ であることを示し，等号が成り立つ（つまり $3y^2-7y+8=5y-4$ となる）条件を調べる．不等式 $3y^2-7y+8 \geq 5y-4$ を導くために不等式 $3y^2-7y+8-(5y-4) \geq 0$ を導く；そのために左辺の 2 次式 $3y^2-7y+8-(5y-4)$ を平方完成する．

$$\begin{aligned}3y^2-7y+8-(5y-4) &= 3y^2-12y+12 = 3(y^2-4y)+12 \\ &= 3(y^2-4y+2^2-4)+12 = 3(y-2)^2-12+12 \\ &= 3(y-2)^2 \quad .\end{aligned}$$

$\boxed{例}$ 任意の実数 y について $3y^2-7y+8 \geq 5y-4$ であることを示し，等号が成り立つ（つまり $3y^2-7y+8=5y-4$ となる）条件を調べる．不等式 $3y^2-7y+8 \geq 5y-4$ を導くために不等式 $3y^2-7y+8-(5y-4) \geq 0$ を導く；そのために左辺の 2 次式 $3y^2-7y+8-(5y-4)$ を平方完成する．

$$\begin{aligned} 3y^2-7y+8-(5y-4) &= 3y^2-12y+12 = 3(y^2-4y)+12 \\ &= 3(y^2-4y+2^2-4)+12 = 3(y-2)^2-12+12 \\ &= 3(y-2)^2 \ . \end{aligned}$$

任意の実数 y について， $3(y-2)^2 \geq 0$ なので

$$3y^2-7y+8-(5y-4) \geq 0 \ ,$$

よって $3y^2-7y+8 \geq 5y-4$.

$\boxed{\text{例}}$ 任意の実数 y について $3y^2-7y+8\geq 5y-4$ であることを示し，等号が成り立つ（つまり $3y^2-7y+8=5y-4$ となる）条件を調べる．不等式 $3y^2-7y+8\geq 5y-4$ を導くために不等式 $3y^2-7y+8-(5y-4)\geq 0$ を導く；そのために左辺の 2 次式 $3y^2-7y+8-(5y-4)$ を平方完成する．

$$\begin{aligned}3y^2-7y+8-(5y-4)&=3y^2-12y+12=3(y^2-4y)+12\\&=3(y^2-4y+2^2-4)+12=3(y-2)^2-12+12\\&=3(y-2)^2\ .\end{aligned}$$

任意の実数 y について，$3(y-2)^2\geq 0$ なので

$$3y^2-7y+8-(5y-4)\ \geq\ 0\ ,$$

よって $3y^2-7y+8\geq 5y-4$ ．

　等号が成り立つ条件は，$3y^2-7y+8=5y-4$ ，$3y^2-7y+8-(5y-4)=0$ ，$3(y-2)^2=0$ ，$y-2=0$ ，$y=2$ ．故に $y=2$ のときに限り $3y^2-7y+8=5y-4$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}5.2.2}$ 任意の実数 t について $\frac{3}{4}t^2+t+2 \geq \frac{1}{2}t^2-2t-7$ となることを示し，等号が成り立つ条件を調べよ．

$$-\left(\qquad\qquad \right) =$$

任意の実数 x について，$\qquad \geq 0$ ，$\qquad \geq 0$ なので，

$$-\left(\qquad\qquad \right) \geq 0 \ ,$$

よって $\frac{3}{4}t^2+t+2 \geq \frac{1}{2}t^2-2t-7$ ．

　等号が成り立つ条件は，$\frac{3}{4}t^2+t+2 = \frac{1}{2}t^2-2t-7$ ，$\qquad -\left(\qquad \right) = 0$ ，$\qquad = 0$ ，$\qquad = 0$ ，$t = \qquad$ ．故に $t = \qquad$ のときに限り $\frac{3}{4}t^2+t+2 = \frac{1}{2}t^2-2t-7$ ．

問5.2.2 任意の実数 t について $\dfrac{3}{4}t^2+t+2 \geq \dfrac{1}{2}t^2-2t-7$ となることを示し，等号が成り立つ条件を調べよ.

$$\frac{3}{4}t^2+t+2-\left(\frac{1}{2}t^2-2t-7\right) = \frac{1}{4}t^2+3t+9 = \frac{1}{4}(t^2+12x+6^2)-9+9$$
$$= \frac{1}{4}(t+6)^2 \ .$$

任意の実数 x について，$(t+6)^2 \geq 0$ ，$\dfrac{1}{4}(t+6)^2 \geq 0$ なので，

$$\frac{3}{4}t^2+t+2-\left(\frac{1}{2}t^2-2t-7\right) \geq 0 \ ,$$

よって $\dfrac{3}{4}t^2+t+2 \geq \dfrac{1}{2}t^2-2t-7$.

等号が成り立つ条件は，$\dfrac{3}{4}t^2+t+2 = \dfrac{1}{2}t^2-2t-7$ ，$\qquad -\left(\qquad \right) = 0$ ，$\qquad = 0$ ，$\qquad = 0$ ，$t = \qquad$. 故に $t = \qquad$ のときに限り $\dfrac{3}{4}t^2+t+2 = \dfrac{1}{2}t^2-2t-7$.

$\boxed{問5.2.2}$ 任意の実数 t について $\frac{3}{4}t^2+t+2 \geq \frac{1}{2}t^2-2t-7$ となることを示し，等号が成り立つ条件を調べよ．

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}t^2+t+2-\left(\frac{1}{2}t^2-2t-7\right) &= \frac{1}{4}t^2+3t+9 = \frac{1}{4}(t^2+12x+6^2)-9+9 \\ &= \frac{1}{4}(t+6)^2 \ .\end{aligned}$$

任意の実数 x について， $(t+6)^2 \geq 0$ ， $\frac{1}{4}(t+6)^2 \geq 0$ なので，

$$\frac{3}{4}t^2+t+2-\left(\frac{1}{2}t^2-2t-7\right) \geq 0 \ ,$$

よって $\frac{3}{4}t^2+t+2 \geq \frac{1}{2}t^2-2t-7$ ．

　等号が成り立つ条件は， $\frac{3}{4}t^2+t+2 = \frac{1}{2}t^2-2t-7$ ， $\frac{3}{4}t^2+t+2-\left(\frac{1}{2}t^2-2t-7\right)=0$ ， $\frac{1}{4}(t+6)^2=0$ ， $t+6=0$ ， $t=-6$ ． 故に $t=-6$ のときに限り $\frac{3}{4}t^2+t+2 = \frac{1}{2}t^2-2t-7$ ．

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示せ： $3x^2+5\leq 7x$ である実数 x は無い.

$\boxed{例}$ 次のことを示せ： $3x^2+5 \leq 7x$ である実数 x は無い. “任意の実数 x について $3x^2+5 > 7x$” ならば, “任意の実数 x について $3x^2+5 \not\leq 7x$” なので, “$3x^2+5 \leq 7x$ である実数 x は無い”.

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示せ： $3x^2+5 \leq 7x$ である実数 x は無い．“任意の実数 x について $3x^2+5>7x$ ” ならば，“任意の実数 x について $3x^2+5 \not\leq 7x$ ” なので，“ $3x^2+5 \leq 7x$ である実数 x は無い ” ．

$$
\begin{aligned}
3x^2+5-7x &= 3\left(x^2-\frac{7}{3}x\right)+5 = 3\left\{x^2-2\cdot\frac{7}{6}x+\left(\frac{7}{6}\right)^2\right\}-\frac{49}{12}+5 \\
&= 3\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+\frac{11}{12} \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示せ： $3x^2+5 \leq 7x$ である実数 x は無い．“任意の実数 x について $3x^2+5 > 7x$ ” ならば，“任意の実数 x について $3x^2+5 \not\leq 7x$ ” なので，“ $3x^2+5 \leq 7x$ である実数 x は無い ” ．

$$3x^2+5-7x = 3\left(x^2-\frac{7}{3}x\right)+5 = 3\left\{x^2-2\cdot\frac{7}{6}x+\left(\frac{7}{6}\right)^2\right\}-\frac{49}{12}+5$$

$$= 3\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+\frac{11}{12} \ .$$

任意の実数 x について， $\left(x-\frac{7}{6}\right)^2 \geq 0$ なので， $3\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+\frac{11}{12} \geq \frac{11}{12} > 0$ ， $3x^2+5-7x > 0$ ，よって $3x^2+5 > 7x$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示せ： $3x^2+5 \leq 7x$ である実数 x は無い. “任意の実数 x について $3x^2+5 > 7x$ ” ならば, “任意の実数 x について $3x^2+5 \not\leq 7x$ ” なので, “ $3x^2+5 \leq 7x$ である実数 x は無い ” .

$$3x^2+5-7x = 3\left(x^2-\frac{7}{3}x\right)+5 = 3\left\{x^2-2\cdot\frac{7}{6}x+\left(\frac{7}{6}\right)^2\right\}-\frac{49}{12}+5$$
$$= 3\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+\frac{11}{12} .$$

任意の実数 x について, $\left(x-\frac{7}{6}\right)^2 \geq 0$ なので, $3\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+\frac{11}{12} \geq \frac{11}{12} > 0$, $3x^2+5-7x > 0$, よって $3x^2+5 > 7x$. 故に $3x^2+5 \leq 7x$ である実数 x は無い. $\boxed{\text{終}}$

問5.2.3 次のことを示せ： $3x^2+4 \leq 5x$ である実数 x は無い.

$$3x^2+4-5x=$$

任意の実数 x について，$\left(\qquad \right)^2 \geq 0$ なので，$\geq \quad > 0$，

> 0，よって $3x^2+4 > 5x$．故に $3x^2+4 \geq 5x$ である実数 x は無い. 終

$\boxed{\text{問}5.2.3}$ 次のことを示せ： $3x^2+4 \leq 5x$ である実数 x は無い.

$$
\begin{aligned}
3x^2+4-5x &= 3\left(x^2-\frac{5}{3}x\right)+4 = 3\left\{x^2-2\cdot\frac{5}{6}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2\right\}-\frac{25}{12}+4 \\
&= 3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{11}{12} \ .
\end{aligned}
$$

任意の実数 x について， $\left(x-\frac{5}{6}\right)^2 \geq 0$ なので， $3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{11}{12} \geq \frac{11}{12} > 0$ ， $3x^2+4-5x > 0$ ， よって $3x^2+4 > 5x$ ． 故に $3x^2+4 \geq 5x$ である実数 x は無い. $\boxed{\text{終}}$

2 個の変数が現れる不等式を考える.

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の実数 x と y とについて $2x^2+3y^2>3x+5y-4$.

$\boxed{例}$ 次のことを示す : 任意の実数 x と y とについて $2x^2+3y^2>3x+5y-4$.

$2x^2+3y^2-(3x+5y-4)$ を x および y について平方完成する.

$\boxed{例}$ 次のことを示す：任意の実数 x と y とについて $2x^2+3y^2>3x+5y-4$.

$2x^2+3y^2-(3x+5y-4)$ を x および y について平方完成する.

$$
\begin{aligned}
2x^2+3y^2-(3x+5y-4) &= 2x^2-3x+3y^2-5y+4 \\
&= 2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)+3\left(y^2-\frac{5}{3}y\right)+4 \\
&= 2\left\{x^2-2\cdot\frac{3}{4}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{3^2}{4^2}\right\}+3\left\{y^2-2\cdot\frac{5}{6}y+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{5^2}{6^2}\right\}+4 \\
&= 2\left\{x^2-2\cdot\frac{3}{4}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}-\frac{9}{8}+3\left\{y^2-2\cdot\frac{5}{6}y+\left(\frac{5}{6}\right)^2\right\}-\frac{25}{12}+4 \\
&= 2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+3\left(y-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{19}{24}\ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{例}$ 次のことを示す：任意の実数 x と y とについて $2x^2+3y^2>3x+5y-4$.

$2x^2+3y^2-(3x+5y-4)$ を x および y について平方完成する.

$$\begin{aligned}2x^2+3y^2-(3x+5y-4) &= 2x^2-3x+3y^2-5y+4\\ &= 2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)+3\left(y^2-\frac{5}{3}y\right)+4\\ &= 2\left\{x^2-2\cdot\frac{3}{4}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{3^2}{4^2}\right\}+3\left\{y^2-2\cdot\frac{5}{6}y+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{5^2}{6^2}\right\}+4\\ &= 2\left\{x^2-2\cdot\frac{3}{4}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}-\frac{9}{8}+3\left\{y^2-2\cdot\frac{5}{6}y+\left(\frac{5}{6}\right)^2\right\}-\frac{25}{12}+4\\ &= 2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+3\left(y-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{19}{24}\ .\end{aligned}$$

任意の実数 x と y とについて, $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2\geq 0$ かつ $\left(y-\frac{5}{6}\right)^2\geq 0$ なので,

$$2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+3\left(y-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{19}{24}\geq\frac{19}{24}>0\ ,$$

例 次のことを示す：任意の実数 x と y とについて $2x^2+3y^2>3x+5y-4$.

$2x^2+3y^2-(3x+5y-4)$ を x および y について平方完成する.

$$\begin{aligned} 2x^2+3y^2-(3x+5y-4) &= 2x^2-3x+3y^2-5y+4 \\ &= 2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)+3\left(y^2-\frac{5}{3}y\right)+4 \\ &= 2\left\{x^2-2\cdot\frac{3}{4}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{3^2}{4^2}\right\}+3\left\{y^2-2\cdot\frac{5}{6}y+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{5^2}{6^2}\right\}+4 \\ &= 2\left\{x^2-2\cdot\frac{3}{4}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}-\frac{9}{8}+3\left\{y^2-2\cdot\frac{5}{6}y+\left(\frac{5}{6}\right)^2\right\}-\frac{25}{12}+4 \\ &= 2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+3\left(y-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{19}{24}\ . \end{aligned}$$

任意の実数 x と y とについて, $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2\geq 0$ かつ $\left(y-\frac{5}{6}\right)^2\geq 0$ なので,

$$2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+3\left(y-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{19}{24}\geq\frac{19}{24}>0\ ,$$

よって $2x^2+3y^2-(3x+5y-4)>0$ なので, $2x^2+3y^2>3x+5y-4$. 終

$\boxed{問5.2.4}$ **次のことを示せ：任意の実数 x, y について $3x^2 + 4y^2 > 5x - 3y - 3$ ．**

$$3x^2 + 4y^2 - (5x - 3y - 3) =$$

$$= \left(x \qquad\right)^2 + \left(y \qquad\right)^2 +$$

任意の実数 x, y について，$\left(x \qquad\right)^2 \geq 0$ かつ $\left(y \qquad\right)^2 \geq 0$ なので，

$$\left(x \qquad\right)^2 + \left(y \qquad\right)^2 + \qquad \geq \qquad > 0 \ ,$$

よって $3x^2 + 4y^2 - (5x - 3y - 3) > 0$ なので，$3x^2 + 4y^2 > 5x + 3y - 3$ ．

$\boxed{\text{問}5.2.4}$ 次のことを示せ：任意の実数 x, y について $3x^2+4y^2>5x-3y-3$ ．

$$\begin{aligned}
&3x^2+4y^2-(5x-3y-3)=3x^2-5x+4y^2+3y+3\\
&=3\left(x^2-\frac{5}{3}x\right)+4\left(y^2+\frac{3}{4}y\right)+3\\
&=3\left\{x^2-2\cdot\frac{5}{6}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{5^2}{6^2}\right\}+4\left\{y^2+2\cdot\frac{3}{8}y+\left(\frac{3}{8}\right)^2-\frac{3^2}{8^2}\right\}+3\\
&=3\left\{x^2-2\cdot\frac{5}{6}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2\right\}-\frac{25}{12}+4\left\{y^2+2\cdot\frac{3}{8}y+\left(\frac{3}{8}\right)^2\right\}-\frac{9}{16}+3\\
&=3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+4\left(y+\frac{3}{8}\right)^2+\frac{17}{48}\ .
\end{aligned}$$

任意の実数 x, y について， $\left(x-\frac{5}{6}\right)^2\geq 0$ かつ $\left(y+\frac{3}{8}\right)^2\geq 0$ なので，

$$3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+4\left(y+\frac{3}{8}\right)^2+\frac{17}{48}\geq\frac{17}{48}>0\ ,$$

よって $3x^2+4y^2-(5x-3y-3)>0$ なので， $3x^2+4y^2>5x+3y-3$ ． $\boxed{\text{終}}$