5.3 根号・絶対値記号が現れる不等式

(定理 5.1.7) 任意の実数 a, b について, $a^2 \geq b^2$ かつ $a \geq 0$ ならば, $a \geq b$.

$\boxed{\text{例}}$ 3 と $\sqrt{7}$ との大小関係を調べる.

(定理 5.1.7) 任意の実数 a, b について, $a^2 \geq b^2$ かつ $a \geq 0$ ならば, $a \geq b$.

例 3 と $\sqrt{7}$ との大小関係を調べる. $3^2 = 9$, $\sqrt{7}^2 = 7$. $\sqrt{7}^2 < 3^2$ なので, 定理 5.1.7 により, $\sqrt{7} < 3$. 終

$\boxed{問 5.3.1}$ 7 と $4\sqrt{3}$ との大小関係を調べよ.

$7^2 =\quad .\quad \left(4\sqrt{3}\right)^2 = \qquad\qquad .\quad \left(\qquad\right)^2 < \quad ^2$ なので, $\qquad < \quad .$

$\boxed{\text{問}5.3.1}$ 7 と $4\sqrt{3}$ との大小関係を調べよ.

$7^2 = 49$. $\left(4\sqrt{3}\right)^2 = 16 \cdot 3 = 48$. $\left(4\sqrt{3}\right)^2 < 7^2$ なので, $4\sqrt{3} < 7$. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 5.3.2}$ $\dfrac{13}{3}$ と $3\sqrt{2}$ との大小関係を調べよ.

$$\left(\frac{13}{3}\right)^2 = \qquad , \quad (3\sqrt{2})^2 = \qquad . \quad (\qquad)^2 < \left(\qquad\right)^2$$ なので,

$$\qquad < \qquad .$$

$\boxed{問 5.3.2}$ $\dfrac{13}{3}$ と $3\sqrt{2}$ との大小関係を調べよ.

$$\left(\frac{13}{3}\right)^2 = \frac{169}{9}\ ,\quad \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18 = \frac{162}{9}\ .\quad \left(3\sqrt{2}\right)^2 < \left(\frac{13}{3}\right)^2$$ なので,

$3\sqrt{2} < \dfrac{13}{3}$. $\boxed{終}$

定理 5.3.1　0 以上の任意の実数 a, b について，

$$a < b \iff \sqrt{a} < \sqrt{b} \ ,$$

$$a \leq b \iff \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \ .$$

証明　例として “ $a < b \iff \sqrt{a} < \sqrt{b}$ ” を証明する．定理 **1.6.2** により，$\sqrt{a} \geq 0$ ，$\sqrt{b} \geq 0$ ．また，定理 **1.6.3** により，$\sqrt{a}^2 = a$ ，$\sqrt{b}^2 = b$ ．$a < b$ ならば，$\sqrt{a}^2 < \sqrt{b}^2$ ，定理 **5.1.7** により $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ ．逆に，$\sqrt{a} < \sqrt{b}$ ならば，定理 **5.1.6** により $\sqrt{a}^2 < \sqrt{b}^2$ つまり $a < b$ ．　(証明終了)

(定理 1.6.2) $a \geq 0$ である任意の実数 a に対して $\sqrt{a} \geq 0$.

(定理 1.6.3) $a \geq 0$ である任意の実数 a について，$\sqrt{a}^2 = a$.

(定理 5.1.7) 任意の実数 a, b について，$a^2 < b^2$ かつ $b \geq 0$ ならば，$a < b$.

(定理 5.1.6) 任意の実数 a, b について，$0 \leq a < b$ ならば，$a^2 < b^2$.

(定理 1.6.3) $a \leq 0$ である任意の実数 a について $\sqrt{a^2} = -a$.

$\boxed{\text{例}}$ $(\sqrt{7}-3)^2$ を計算する．その結果を用いて $\sqrt{16-6\sqrt{7}}$ を計算する．

(定理 1.6.3) $a \leq 0$ である任意の実数 a について $\sqrt{a^2} = -a$.

$\boxed{\text{例}}$ $(\sqrt{7} - 3)^2$ を計算する．その結果を用いて $\sqrt{16 - 6\sqrt{7}}$ を計算する．

$$(\sqrt{7} - 3)^2 = \sqrt{7}^2 - 2 \cdot 3\sqrt{7} + 3^2 = 7 - 6\sqrt{7} + 9 = 16 - 6\sqrt{7} \ .$$

(定理 1.6.3) $a \leq 0$ である任意の実数 a について $\sqrt{a^2} = -a$.

$\boxed{\text{例}}$ $\left(\sqrt{7}-3\right)^2$ を計算する．その結果を用いて $\sqrt{16-6\sqrt{7}}$ を計算する．

$$\left(\sqrt{7}-3\right)^2 = \sqrt{7}^2 - 2 \cdot 3\sqrt{7} + 3^2 = 7 - 6\sqrt{7} + 9 = 16 - 6\sqrt{7} \ .$$

$7 < 3^2$ なので $\sqrt{7} < \sqrt{3^2} = 3$ ，よって $\sqrt{7} - 3 < 0$ なので，

(定理 1.6.3) $a \leq 0$ である任意の実数 a について $\sqrt{a^2} = -a$.

$\boxed{\text{例}}$ $\left(\sqrt{7}-3\right)^2$ を計算する．その結果を用いて $\sqrt{16-6\sqrt{7}}$ を計算する．

$$\left(\sqrt{7}-3\right)^2 = \sqrt{7}^2 - 2\cdot 3\sqrt{7} + 3^2 = 7 - 6\sqrt{7} + 9 = 16 - 6\sqrt{7} \ .$$

$7 < 3^2$ なので $\sqrt{7} < \sqrt{3^2} = 3$ ，よって $\sqrt{7} - 3 < 0$ なので，

$$\sqrt{16-6\sqrt{7}} = \sqrt{\left(\sqrt{7}-3\right)^2} = -\left(\sqrt{7}-3\right) = 3 - \sqrt{7} \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問5.3.3}$ $\left(2-\sqrt{5}\right)^2$ を計算し，その結果を用いて $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ を計算せよ．

問5.3.3 $(2-\sqrt{5})^2$ を計算し，その結果を用いて $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ を計算せよ．

$$(2-\sqrt{5})^2 = 4-4\sqrt{5}+5 = 9-4\sqrt{5}\ .$$

$2<\sqrt{5}$ なので $2-\sqrt{5}<0$ ，よって

$$\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = -(2-\sqrt{5}) = \sqrt{5}-2\ .$$

終

実数 a について，例えば $a=5$ のとき，$|a|=|5|=5$ なので $|a|=a$ ；
また例えば $a=-3$ のとき，$|a|=|-3|=3$ なので $|a|>a$ ．

実数 a について，例えば $a=5$ のとき， $|a|=|5|=5$ なので $|a|=a$ ；また例えば $a=-3$ のとき， $|a|=|-3|=3$ なので $|a|>a$ ．このように，$|a|=a$ となる場合と $|a|>a$ となる場合とがある；両方の場合を併せると $|a|\geq a$ ．

実数 a について，例えば $a=5$ のとき，$|a|=|5|=5$ なので $|a|=a$ ；また例えば $a=-3$ のとき，$|a|=|-3|=3$ なので $|a|>a$ ．このように，$|a|=a$ となる場合と $|a|>a$ となる場合とがある；両方の場合を併せると $|a|\geq a$ ．

定理 5.3.2　任意の実数 a について $a\leq|a|$ ．

証明　定理 **1.7.5** により $|a|^2=a^2$ なので，定理 **1.5.1** により $|a|^2\geq a^2$ ．定理 **1.7.1** により $|a|\geq 0$ ．定理 **5.1.7** により $|a|\geq a$ ． (証明終了)

(定理 1.7.5) 任意の実数 a について $|a|^2=a^2$ ．

(定理 1.7.1) 任意の実数 a について $|a|\geq 0$ ．

(定理 1.5.1) 任意の実数 a,b について，$a=b$ ならば $a\geq b$ ．

(定理 5.1.7) 任意の実数 a,b について，$a^2\geq b^2$ かつ $a\geq 0$ ならば，$a\geq b$ ．

実数 a と b とについて,

例えば $a=5$, $b=3$ のとき $|a+b|=8=|a|+|b|$,

例えば $a=5$, $b=-3$ のとき $|a+b|=2<|a|+|b|$,

例えば $a=-5$, $b=3$ のとき $|a+b|=2<|a|+|b|$,

例えば $a=-5$, $b=-3$ のとき $|a+b|=8=|a|+|b|$.

実数 a と b とについて,

例えば $a=5$, $b=3$ のとき $|a+b|=8=|a|+|b|$,

例えば $a=5$, $b=-3$ のとき $|a+b|=2<|a|+|b|$,

例えば $a=-5$, $b=3$ のとき $|a+b|=2<|a|+|b|$,

例えば $a=-5$, $b=-3$ のとき $|a+b|=8=|a|+|b|$.

このように, $|a+b|=|a|+|b|$ または $|a+b|<|a|+|b|$ なので,

$|a+b|\leq|a|+|b|$.

実数 a と b とについて,

$$\text{例えば } a=5 \text{ , } b=3 \text{ のとき } |a+b|=8=|a|+|b| \text{ ,}$$

$$\text{例えば } a=5 \text{ , } b=-3 \text{ のとき } |a+b|=2<|a|+|b| \text{ ,}$$

$$\text{例えば } a=-5 \text{ , } b=3 \text{ のとき } |a+b|=2<|a|+|b| \text{ ,}$$

$$\text{例えば } a=-5 \text{ , } b=-3 \text{ のとき } |a+b|=8=|a|+|b| \text{ .}$$

このように, $|a+b|=|a|+|b|$ または $|a+b|<|a|+|b|$ なので,

$|a+b| \leq |a|+|b|$.

定理 5.3.3（三角不等式） 任意の実数 a と b とについて $|a+b| \leq |a|+|b|$.

実数 a と b とについて，三角不等式 $|a+b| \leq |a|+|b|$ を導く.

実数 a と b とについて，三角不等式 $|a+b| \leq |a|+|b|$ を導く．

$$\begin{aligned}
\big(|a|+|b|\big)^2 - |a+b|^2 &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2 \\
&= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) = 2|ab| - 2ab \\
&= 2\big(|ab| - ab\big) \ .
\end{aligned}$$

(定理 1.7.5) 任意の実数 a について $|a|^2 = a^2$ ．

実数 a と b とについて，三角不等式 $|a+b| \leq |a|+|b|$ を導く．

$$\begin{aligned}\bigl(|a|+|b|\bigr)^2 - |a+b|^2 &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2 \\ &= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) = 2|ab| - 2ab \\ &= 2\bigl(|ab| - ab\bigr)\ .\end{aligned}$$

定理 **5.3.2** により $|ab| \geq ab$ なので $|ab| - ab \geq 0$ ，よって $2\bigl(|ab| - ab\bigr) \geq 0$ なので，

$$\bigl(|a|+|b|\bigr)^2 - |a+b|^2 \geq 0\ ,$$

(定理 **5.3.2**) 任意の実数 a について $|a| \geq a$ ．

実数 a と b とについて，三角不等式 $|a+b| \leq |a|+|b|$ を導く．

$$\begin{aligned}\bigl(|a|+|b|\bigr)^2-|a+b|^2 &= |a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2 \\ &= a^2+2|ab|+b^2-(a^2+2ab+b^2) = 2|ab|-2ab \\ &= 2\bigl(|ab|-ab\bigr)\ .\end{aligned}$$

定理 5.3.2 により $|ab| \geq ab$ なので $|ab|-ab \geq 0$ ，よって $2\bigl(|ab|-ab\bigr) \geq 0$ なので，

$$\bigl(|a|+|b|\bigr)^2-|a+b|^2 \geq 0\ ,$$

$$\bigl(|a|+|b|\bigr)^2 \geq |a+b|^2\ .$$

定理 1.7.1 により $|a| \geq 0$ ， $|b| \geq 0$ なので，**定理 1.5.2** により $|a|+|b| \geq 0$ ．

(**定理 1.7.1**) 任意の実数 a について $|a| \geq 0$ ．

(**定理 5.1.2**) 任意の実数 a, b, c, d について，$a \geq b$ かつ $c \geq d$ ならば，
$a+c \geq b+d$ ．

実数 a と b とについて，三角不等式 $|a+b| \leq |a|+|b|$ を導く．

$$
\begin{aligned}
\bigl(|a|+|b|\bigr)^2 - |a+b|^2 &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2 \\
&= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) = 2|ab| - 2ab \\
&= 2\bigl(|ab| - ab\bigr) \ .
\end{aligned}
$$

定理 5.3.2 により $|ab| \geq ab$ なので $|ab| - ab \geq 0$ ，よって $2\bigl(|ab|-ab\bigr) \geq 0$ なので，

$$
\bigl(|a|+|b|\bigr)^2 - |a+b|^2 \geq 0 \ ,
$$

$$
\bigl(|a|+|b|\bigr)^2 \geq |a+b|^2 \ .
$$

定理 1.7.1 により $|a| \geq 0$ ，$|b| \geq 0$ なので，**定理 1.5.2** により $|a|+|b| \geq 0$ ．$\bigl(|a|+|b|\bigr)^2 \geq |a+b|^2$ かつ $|a|+|b| \geq 0$ なので，**定理 5.1.7** により $|a|+|b| \geq |a+b|$ ．

（証明終了）

(定理 5.1.7) 任意の実数 a, b について，$a^2 \geq b^2$ かつ $a \geq 0$ ならば，$a \geq b$ ．

$\boxed{\text{問}5.3.4}$ 三角不等式の証明に倣って次のことを証明せよ：任意の実数 a と b とについて $|a-b| \geq |a|-|b|$.

$$
\begin{aligned}
|a-b|^2-\bigl(|a|-|b|\bigr)^2 &= (a-b)^2-\bigl(|a|^2-2|a|\,|b|+|b|^2\bigr) \\
&= a^2+2ab+b^2-\bigl(a^2-2|ab|+b^2\bigr) = -2ab+2|ab| \\
&= 2\bigl(|ab|-ab\bigr) \ .
\end{aligned}
$$

$|ab| \geq ab$ なので $|ab|-ab \geq 0$ ，よって $2\bigl(|ab|-ab\bigr) \geq 0$ なので，

$$
|a-b|^2-\bigl(|a|-|b|\bigr)^2 \geq 0 \ ,
$$

$$
|a-b|^2 \geq \bigl(|a|-|b|\bigr)^2 \ .
$$

$|a-b| \geq 0$ なので $|a-b| \geq |a|-|b|$. $\boxed{\text{終}}$

例えば，実数 x について， $|x| < 3$ となることは，x の値が -3 より大きく 3 より小さいことつまり $-3 < x < 3$ となることである：

$$|x| < 3 \iff -3 < x < 3 \ .$$

例えば，実数 x について，$|x| < 3$ となることは，x の値が -3 より大きく 3 より小さいことつまり $-3 < x < 3$ となることである：

$$|x| < 3 \iff -3 < x < 3 .$$

また例えば，実数 x について，$|x| > 3$ となることは，x の値が -3 より小さいかまたは 3 より大きいことである：

$$|x| > 3 \iff x < -3 \text{ または } x > 3 .$$

例えば，実数 x について，$|x| < 3$ となることは，x の値が -3 より大きく 3 より小さいことつまり $-3 < x < 3$ となることである：

$$|x| < 3 \iff -3 < x < 3 \ .$$

また例えば，実数 x について，$|x| > 3$ となることは，x の値が -3 より小さいかまたは 3 より大きいことである：

$$|x| > 3 \iff x < -3 \text{ または } x > 3 \ .$$

一般的に次の定理が成り立つ.

定理 5.3.4　任意の実数 a と b とについて，

$$|a| < b \iff -b < a < b \ ,$$

$$|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b \ ,$$

$$|a| > b \iff a > b \text{ または } a < -b \ ,$$

$$|a| \geq b \iff a \geq b \text{ または } a \leq -b \ .$$

次のことを証明する：任意の実数 a, b について，$|a| < b$ ならば $-b < a < b$ ．

実数 a, b について $|a| < b$ と仮定する．定理 **5.3.2** により $a \leq |a|$ ，仮定 $|a| < b$ より，定理 **5.1.1** により $a < b$ ．また，定理 **5.3.2** と定理 **1.7.6** とにより $-a \leq |-a| = |a|$ ，仮定 $|a| < b$ より，定理 **5.1.1** により $-a < b$ ；よって定理 **1.5.5** により $a > -b$ ． $a < b$ かつ $-b < a$ なので，$-b < a < b$ ．

(定理 5.3.2) 任意の実数 a について $a \leq |a|$ ．

(定理 5.1.1) 任意の実数 a, b, c について，$a \leq b$ かつ $b < c$ ならば，$a < c$ ．

(定理 1.7.6) 任意の実数 a について $|-a| = |a|$ ．

(定理 1.5.5) 任意の実数 a, b について，$a < b$ ならば $-a > -b$ ．

次のことを証明する：任意の実数 a, b について，$-b < a < b$ ならば $|a| < b$.

実数 a, b について $-b < a < b$ と仮定する．定理 **1.5.2** により，$a \geq 0$ または $a < 0$ ． $a \geq 0$ のとき，定理 **1.7.2** により $a = |a|$ ，仮定より $a < b$ なので $|a| < b$ ． $a < 0$ のとき，定理 **1.7.2** により $|a| = -a$ ，仮定より $a > -b$ なので定理 **1.5.5** により $-a < b$ ，よって $|a| < b$ ．つまりどちらのときも $|a| < b$.

(定理 1.5.2) 任意の実数 a, b について，$a \geq b$ または $a < b$.

(定理 1.7.2) 任意の実数 a について，$a \geq 0$ のとき $|a| = a$ ，$a < 0$ のとき $|a| = -a$.

(定理 1.5.5) 任意の実数 a, b について，$a < b$ ならば $-a > -b$.

次のことを証明する：任意の実数 a,b について，$|a|>b$ ならば，$a<-b$ または $a>b$ ．

実数 a,b について $|a|>b$ と仮定する．定理 **1.5.2** により，$a\geq 0$ または $a<0$ ．$a\geq 0$ のとき，定理 **1.7.2** により $a=|a|$ なので，仮定 $|a|>b$ より $a>b$ ．$a<0$ のとき，定理 **1.7.2** により $-a=|a|$ なので，仮定 $|a|>b$ より $-a>b$ よって定理 **1.5.5** により $a<-b$ ．よって $a>b$ または $a<-b$ ．

(定理 1.5.2) 任意の実数 a,b について，$a\geq b$ または $a<b$ ．

(定理 1.7.2) 任意の実数 a について，$a\geq 0$ のとき $|a|=a$ ，$a<0$ のとき $|a|=-a$ ．

(定理 1.5.5) 任意の実数 a,b について，$a>b$ ならば $-a<-b$ ．

次のことを証明する：任意の実数 a, b について，$a < -b$ または $a > b$ ならば，$|a| > b$.

実数 a, b について $a > b$ または $a < -b$ と仮定する．$a > b$ のとき，定理 **5.3.2** により $|a| \geq a$ なので，定理 **5.1.1** により $|a| > b$ ．$a < -b$ のとき，定理 **1.5.5** により $-a > b$ ，定理 **1.7.6** と定理 **5.3.2** とにより $|a| = |-a| \geq -a$ なので，定理 **5.1.1** により $|a| > b$ ．よって，$a > b$ のときも $a < -b$ のときも，$|a| > b$.

(定理 5.3.2) 任意の実数 a について $|a| \geq a$.

(定理 5.1.1) 任意の実数 a, b について，$a \geq b$ かつ $b > c$ ならば，$a > c$.

(定理 1.7.6) 任意の実数 a について $|a| = |-a|$.

(定理 1.5.5) 任意の実数 a, b について，$a > b$ ならば $-a < -b$.

0 以上の実数 a と b とに対して，$\dfrac{a+b}{2}$ を a と b との相加平均といい，$\sqrt{ab}$ を a と b との相乗平均という.

0 以上の実数 a と b とに対して，$\dfrac{a+b}{2}$ を a と b との相加平均といい，$\sqrt{ab}$ を a と b との相乗平均という.

相加平均と相乗平均の大小関係について次の定理が成り立つ.

定理 5.3.6 $a \geq 0$ かつ $b \geq 0$ である任意の実数 a と b とについて
$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$; 等号が成り立つのは $a = b$ のときに限る.

実数 a, b について $a \geq 0$ ， $b \geq 0$ とする．不等式 $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ を導く．

定理 **1.5.8** により $ab \geq 0$ ，よって定理 **1.6.3** により $\sqrt{ab}^{\,2} = ab$ なので，

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \sqrt{ab}^{\,2} = \frac{a^2+2ab+b^2}{4} - ab = \frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{4} = \frac{a^2-2ab+b^2}{4}$$
$$= \frac{1}{4}(a-b)^2 \ .$$

(定理 1.5.8) 任意の実数 a, b について， $a \geq 0$ かつ $b \geq 0$ ならば， $ab \geq 0$.

(定理 1.6.3) $a > 0$ である任意の実数 a について $\sqrt{a}^{\,2} = a$.

実数 a, b について $a \geq 0$, $b \geq 0$ とする．不等式 $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ を導く．

定理 **1.5.8** により $ab \geq 0$ ，よって定理 **1.6.3** により $\sqrt{ab}^2 = ab$ なので，

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \sqrt{ab}^2 = \frac{a^2+2ab+b^2}{4} - ab = \frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{4} = \frac{a^2-2ab+b^2}{4}$$
$$= \frac{1}{4}(a-b)^2 \ .$$

定理 **1.5.10** により $(a-b)^2 \geq 0$ ，定理 **1.5.7** により $\dfrac{1}{4}(a-b)^2 \geq 0$ ，

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \sqrt{ab}^2 \geq 0 \ , \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq \sqrt{ab}^2 \ .$$

(定理 1.5.10) 任意の実数 a について $a^2 \geq 0$ ．

(定理 1.5.7) 任意の実数 a, b, c について， $a \geq b$ かつ $c \geq 0$ ならば， $ac \geq bc$ ．

実数 a, b について $a \geq 0$, $b \geq 0$ とする．不等式 $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ を導く．

定理 **1.5.8** により $ab \geq 0$ ，よって定理 **1.6.3** により $\sqrt{ab}^2 = ab$ なので，

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \sqrt{ab}^2 = \frac{a^2+2ab+b^2}{4} - ab = \frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{4} = \frac{a^2-2ab+b^2}{4}$$

$$= \frac{1}{4}(a-b)^2 \ .$$

定理 **1.5.10** により $(a-b)^2 \geq 0$ ，定理 **1.5.7** により $\dfrac{1}{4}(a-b)^2 \geq 0$ ，

$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - \sqrt{ab}^2 \geq 0$ ， $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \geq \sqrt{ab}^2$ ．定理 **5.1.2** と定理 **1.5.7** とにより

$\dfrac{a+b}{2} \geq 0$ ．

(定理 5.1.2) 任意の実数 a, b, c, d について， $a \geq b$ かつ $c \geq d$ ならば，

$a + c \geq b + d$ ．

(定理 1.5.7) 任意の実数 a, b, c について， $a \geq b$ かつ $c \geq 0$ ならば， $ac \geq bc$ ．

実数 a, b について $a \geq 0$, $b \geq 0$ とする．不等式 $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ を導く．

定理 1.5.8 により $ab \geq 0$ ，よって**定理 1.6.3** により $\sqrt{ab}^2 = ab$ なので，

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \sqrt{ab}^2 = \frac{a^2+2ab+b^2}{4} - ab = \frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{4} = \frac{a^2-2ab+b^2}{4}$$
$$= \frac{1}{4}(a-b)^2 \ .$$

定理 1.5.10 により $(a-b)^2 \geq 0$ ，**定理 1.5.7** により $\dfrac{1}{4}(a-b)^2 \geq 0$ ，

$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - \sqrt{ab}^2 \geq 0$ ， $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \geq \sqrt{ab}^2$ ．**定理 5.1.2** と**定理 1.5.7** とにより

$\dfrac{a+b}{2} \geq 0$ ．**定理 5.1.7** により $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ．

(定理 5.1.7) 任意の実数 a, b について，$a^2 \geq b^2$ かつ $a > 0$ ならば，$a \geq b$ ．

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\sqrt{ab}^2=\frac{1}{4}(a-b)^2$$ より，$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$ のとき，$\frac{1}{4}(a-b)^2=0$ ，

よって $a=b$ ． 逆に $a=b$ のとき，$\frac{a+b}{2}=\frac{a+a}{2}=a$ ， $a\geq 0$ なの

で $\sqrt{ab}=\sqrt{a^2}=a$ ， よって $\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$ ． 故に，$a=b$ のときに限り

$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 任意の正の実数 x について $\dfrac{x}{5}+\dfrac{45}{x}\geq 6$ となることを示し，等号が成り立つ条件を調べる．相加平均と相乗平均との大小関係を用いる．

$\boxed{\text{例}}$ 任意の正の実数 x について $\frac{x}{5}+\frac{45}{x} \geq 6$ となることを示し，等号が成り立つ条件を調べる．相加平均と相乗平均との大小関係を用いる． $x>0$ なので， $\frac{x}{5} \geq 0$ かつ $\frac{45}{x} \geq 0$ ．相加平均と相乗平均との大小関係より

$$\frac{\frac{x}{5}+\frac{45}{x}}{2} \geq \sqrt{\frac{x}{5} \cdot \frac{45}{x}} = \sqrt{9} = 3 \ .$$

$\boxed{例}$ 任意の正の実数 x について $\frac{x}{5}+\frac{45}{x}\geq 6$ となることを示し，等号が成り立つ条件を調べる．相加平均と相乗平均との大小関係を用いる． $x>0$ なので， $\frac{x}{5}\geq 0$ かつ $\frac{45}{x}\geq 0$ ．相加平均と相乗平均との大小関係より

$$\frac{\frac{x}{5}+\frac{45}{x}}{2}\geq\sqrt{\frac{x}{5}\cdot\frac{45}{x}}=\sqrt{9}=3\ .$$

よって $\frac{x}{5}+\frac{45}{x}\geq 6$ ．

例 任意の正の実数 x について $\frac{x}{5}+\frac{45}{x} \geq 6$ となることを示し，等号が成り立つ条件を調べる．相加平均と相乗平均との大小関係を用いる．$x>0$ なので，$\frac{x}{5} \geq 0$ かつ $\frac{45}{x} \geq 0$ ．相加平均と相乗平均との大小関係より

$$\frac{\frac{x}{5}+\frac{45}{x}}{2} \geq \sqrt{\frac{x}{5} \cdot \frac{45}{x}}=\sqrt{9}=3 \ .$$

よって $\frac{x}{5}+\frac{45}{x} \geq 6$ ．等号が成り立つ条件は，$\frac{x}{5}=\frac{45}{x}$ ，つまり
$x=\sqrt{5 \cdot 45}=\sqrt{5^2 \cdot 3^2}=15$ ． 終

$\boxed{問5.3.5}$ 任意の正の実数 x について $\frac{x}{45}+\frac{20}{x}\geq\frac{4}{3}$ となることを示し，等号が成り立つ条件を調べよ.

$x>0$ なので, $\frac{x}{45}\geq 0$ かつ $\frac{20}{x}\geq 0$. 相加平均と相乗平均との大小関係より

$$\frac{\frac{x}{45}+\frac{20}{x}}{2}\geq$$

よって $\frac{x}{45}+\frac{20}{x}\geq$. 等号が成り立つ条件は, $=$, つまり

$x=$.

$\boxed{問5.3.5}$ 任意の正の実数 x について $\dfrac{x}{45}+\dfrac{20}{x}\geq\dfrac{4}{3}$ となることを示し，等号が成り立つ条件を調べよ.

$x>0$ なので， $\dfrac{x}{45}\geq 0$ かつ $\dfrac{20}{x}\geq 0$ ．相加平均と相乗平均との大小関係より

$$\frac{\dfrac{x}{45}+\dfrac{20}{x}}{2}\geq\sqrt{\frac{x}{45}\cdot\frac{20}{x}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}\ .$$

よって $\dfrac{x}{45}+\dfrac{20}{x}\geq\dfrac{4}{3}$ ．等号が成り立つ条件は， $\dfrac{x}{45}=\dfrac{20}{x}$ ，つまり $x=\sqrt{45\cdot 20}=30$ ． $\boxed{終}$