5.4 区間

直感的にいうと，区間とは隙間がない実数の集合のことである．その正確な定義は次のようになる．

定義　実数の集合 I が区間であるとは次の条件を満たすことである：任意の実数 x, y, z について，$x \in I$ かつ $z \in I$ かつ $x < y < z$ ならば，$y \in I$ ．

実数 a, b に対して，$a \leq x \leq b$ である実数 x の全体 $\{\, x \mid x$ は実数で $a \leq x \leq b \,\}$ は区間である；この区間を $[a, b]$ と表記する：

$$[a, b] = \{\, x \mid x \text{ は実数で } a \leq x \leq b \,\}\ .$$

実数 x について，

$$x \text{ が区間 } [a, b] \text{ に属す} \iff x \in [a, b] \iff a \leq x \leq b\ .$$

$a > b$ のとき，$a \leq x \leq b$ である実数 x は無いので，区間 $[a, b]$ は空集合 $\emptyset$ である．

実数 a,b に対して，$a \leq x \leq b$ である実数 x の全体 $\{\, x \mid x$ は実数で $a \leq x \leq b \,\}$ は区間である；この区間を $[a,b]$ と表記する：

$$[a,b] = \{\, x \mid x \text{ は実数で } a \leq x \leq b \,\}\ .$$

実数 x について，

$$x \text{ が区間 } [a,b] \text{ に属す} \iff x \in [a,b] \iff a \leq x \leq b\ .$$

例 区間 $[2,5]$ は，$2 \leq x \leq 5$ である実数 x の全体 $\{\, x \mid x$ は実数で $2 \leq x \leq 5 \,\}$ である：

$$[2,5] = \{\, x \mid x \text{ は実数で } 2 \leq x \leq 5 \,\}\ .$$

つまり，実数 x について，

$$x \text{ が区間 } [2,5] \text{ に属す} \iff x \in [2,5] \iff 2 \leq x \leq 5\ .$$

終

実数 a,b に対して，$a < x < b$ となる実数 x の全体 $\{\, x \mid x$ は実数で $a < x < b \,\}$ は区間である；この区間を (a,b) と表記する：

$$(a,b) = \{\, x \mid x \text{ は実数で } a < x < b \,\} .$$

実数 x について，

$$x \text{ が区間 } (a,b) \text{ に属す} \iff x \in (a,b) \iff a < x < b .$$

$a \geq b$ のとき，$a < x < b$ である実数 x は無いので，区間 (a,b) は空集合 $\emptyset$ である．

　実数 a,b に対して，$a<x<b$ となる実数 x の全体 $\{\,x\mid x$ は実数で $a<x<b\,\}$ は区間である；この区間を (a,b) と表記する：

$$(a,b)=\{\,x\mid x \text{ は実数で } a<x<b\,\}\ .$$

実数 x について，

$$x \text{ が区間 } (a,b) \text{ に属す} \iff x\in(a,b) \iff a<x<b\ .$$

例 区間 $(3,7)$ は，$3<x<7$ である実数 x の全体 $\{\,x\mid x$ は実数で $3<x<7\,\}$ である；

$$(3,5)=\{\,x\mid x \text{ は実数で } 3<x<7\,\}\ .$$

つまり，実数 x について，

$$x \text{ が区間 } (3,7) \text{ に属す} \iff x\in(3,7) \iff 3<x<7\ .$$

終

区間を表す記法 (a,b) は座標平面の点の座標を表す記法 (x,y) と同じであるが，意味は全く異なる．

実数 a,b に対して，区間 $[a,b]$ には a と b との両方とも属すが．区間 (a,b) には a と b との両方とも属さない．

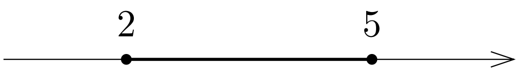
実数 a と b とについて $a<b$ とする．数直線において，区間 $[a,b]$ 及び区間 (a,b) を次のように図示する．

区間 $[a,b]$

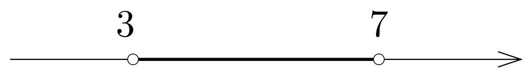
区間 (a,b)

中黒の点 $\bullet$ はその点を含めることを意味し，中抜きの点 $\circ$ はその点を含めないことを意味する．

例 数直線において，区間 $[2,5]$ 及び区間 $(3,7)$ を次のように図示する．



区間 $[2,5]$



区間 $(3,7)$

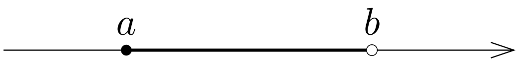
終

次のような区間もある：実数 a と b とに対して,

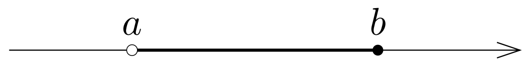
$$[a,b) = \{\ x \mid x \text{ は実数で } a \leq x < b\ \}\ ,$$

$$(a,b] = \{\ x \mid x \text{ は実数で } a < x \leq b\ \}\ .$$

区間 $[a,b)$ には，a は属すが b は属さない．区間 $(a,b]$ には，a は属さないが b は属す.



区間 $[a,b)$



区間 $(a,b]$

区間 I について，I に属す実数を I の点ということがある．例えば，区間 $[2,5]$ の点 x とは，区間 $[2,5]$ に属す実数 x のこと，つまり $-2 \leq x \leq 5$ となる実数 x のことである．

解析学では，議論の便宜のために，2 個の仮想的な数 $+\infty$ と $-\infty$ とを用いる．$+\infty$ は正の無限大とよばれ，$-\infty$ は負の無限大とよばれる．$+\infty$ も $-\infty$ も実数ではない．大小関係について，$+\infty$ はどんな実数よりも大きく，$-\infty$ はどんな実数よりも小さいものと約束する．つまり，

$$\text{任意の実数 } x \text{ について} \quad -\infty < x < +\infty \ .$$

正の無限大 $+\infty$ を ∞ と略記する．

実数 a に対して,

$$a \text{ 以下の実数の全体 } \{\, x \mid x \text{ は実数で } x \leq a \,\},$$

$$a \text{ より大きい実数の全体 } \{\, x \mid x \text{ は実数で } x > a \,\}$$

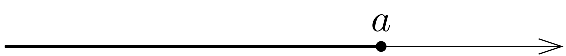
等も区間である. このような区間を, $\infty, -\infty$ を用いて以下のように表記する:

$$(-\infty, a] = \{\, x \mid x \text{ は実数で } -\infty < x \leq a \,\} = \{\, x \mid x \text{ は実数で } x \leq a \,\},$$

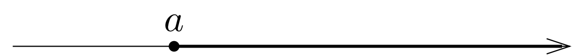
$$[a, \infty) = \{\, x \mid x \text{ は実数で } a \leq x < \infty \,\} = \{\, x \mid x \text{ は実数で} x \geq a \,\},$$

$$(-\infty, a) = \{\, x \mid x \text{ は実数で } -\infty < x < a \,\} = \{\, x \mid x \text{ は実数で } x < a \,\},$$

$$(a, \infty) = \{\, x \mid x \text{ は実数で } a < x < \infty \,\} = \{\, x \mid x \text{ は実数で } x > a \,\}.$$



区間 $(-\infty, a]$



区間 $[a, \infty)$

区間 $(-\infty, a)$

区間 (a, ∞)

区間とは実数の集合である．∞ と $-\infty$ とは実数ではないので，区間に属さない．

例えば，区間 $[0, \infty)$ は 0 以上の実数全体であり，区間 $(0, \infty)$ は正の実数全体である．

更に，実数全体 $\mathbf{R}$ も一つの区間である．