5.5 不等式の解法

変数 x に関する不等式について，その不等式が成り立つような x の値を解という.

変数 x に関する不等式について，その不等式が成り立つような x の値を解という．**5.1** 節の末尾で述べたように，特に断りがない限り，不等式に表れる変数は実数を表す．それで，“実数を表す変数 x に関する不等式”というべきところを“変数 x に関する不等式”と略す．

変数 x に関する不等式について，その不等式が成り立つような x の値を解という．**5.1** 節の末尾で述べたように，特に断りがない限り，不等式に表れる変数は実数を表す．それで，“実数を表す変数 x に関する不等式” というべきところを “変数 x に関する不等式” と略す．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $x^2 - 3x > 7$ の解とは，$x^2 - 3x > 7$ となる実数 x のことである．

変数 x に関する不等式について，その不等式が成り立つような x の値を解という．**5.1** 節の末尾で述べたように，特に断りがない限り，不等式に表れる変数は実数を表す．それで，“実数を表す変数 x に関する不等式”というべきところを“変数 x に関する不等式”と略す．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $x^2-3x>7$ の解とは，$x^2-3x>7$ となる実数 x のことである．$x=5$ とすると，$x^2-3x=5^2-3\cdot5=10$ なので $x^2-3x>7$ ；よって 5 は不等式 $x^2-3x>7$ の解である．

変数 x に関する不等式について，その不等式が成り立つような x の値を解という．**5.1** 節の末尾で述べたように，特に断りがない限り，不等式に表れる変数は実数を表す．それで，“実数を表す変数 x に関する不等式”というべきところを“変数 x に関する不等式”と略す．

例 変数 x に関する不等式 $x^2-3x>7$ の解とは，$x^2-3x>7$ となる実数 x のことである．$x=5$ とすると，$x^2-3x=5^2-3\cdot5=10$ なので $x^2-3x>7$ ；よって 5 は不等式 $x^2-3x>7$ の解である．$x=4$ とすると，$x^2-3x=4^2-3\cdot4=4$ なので $x^2-3x\not>7$ ；よって 4 は不等式 $x^2-3x>7$ の解ではない． 終

不等式の解の全体をその不等式の解集合という．不等式の解集合を求めることをその不等式を解くという.

不等式の解の全体をその不等式の解集合という．不等式の解集合を求めることをその不等式を解くという．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $x^2-3x>7$ の解集合 S とは，$x^2-3x>7$ となる実数 x のすべての集まりである：

$$S=\{\,x \mid x \text{ は実数で } x^2-3x>7\,\}\ .$$

不等式の解の全体をその不等式の解集合という．不等式の解集合を求めることをその不等式を解くという.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $x^2 - 3x > 7$ の解集合 S とは，$x^2 - 3x > 7$ となる実数 x のすべての集まりである：

$$S = \{\, x \mid x \text{ は実数で } x^2 - 3x > 7 \,\} \,.$$

不等式 $x^2 - 3x > 7$ の解集合 S について，述語 $x^2 - 3x > 7$ と述語 $x \in S$ とが同値である：

$$x \in S \iff x^2 - 3x > 7 \,.$$

不等式の解の全体をその不等式の解集合という．不等式の解集合を求めることをその不等式を解くという．

例 変数 x に関する不等式 $x^2-3x>7$ の解集合 S とは，$x^2-3x>7$ となる実数 x のすべての集まりである：

$$S=\{\,x \mid x \text{ は実数で } x^2-3x>7\,\}\,.$$

不等式 $x^2-3x>7$ の解集合 S について，述語 $x^2-3x>7$ と述語 $x\in S$ とが同値である：

$$x\in S \iff x^2-3x>7\,.$$

x に関する不等式 $x^2-3x>7$ を解くことは，その解集合を求めることであり，不等式 $x^2-3x>7$ と同値でなるべく簡単な述語を求めることである．終

不等式を解くとはその不等式と同値でなるべく簡単な述語を求めることであるから,

不等式を解くために変形しても元の不等式と同値でなければならないことに注意すること.

不等式を解くために次の定理を用いる.

定理 5.5　実数 a, b, c について以下のことが成り立つ：

$$a < b \iff a + c < b + c \ , \qquad a < b \iff a - c < b - c \ ,$$

$$a \leq b \iff a + c \leq b + c \ , \qquad a \leq b \iff a - c \leq b - c \ ;$$

$c > 0$ のとき,

$$a < b \iff ac < bc \ , \qquad a < b \iff \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

$$a \leq b \iff ac \leq bc \ , \qquad a \leq b \iff \frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$$

$c < 0$ のとき,

$$a < b \iff ac > bc \ , \qquad a < b \iff \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \ ,$$

$$a \leq b \iff ac \geq bc \ , \qquad a \leq b \iff \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c} \ .$$

定理 5.5　実数 a, b, c について以下のことが成り立つ：

$$a < b \iff a + c < b + c\ , \qquad a < b \iff a - c < b - c\ ,$$

$$a \leq b \iff a + c \leq b + c\ , \qquad a \leq b \iff a - c \leq b - c\ ;$$

$c > 0$ のとき,

$$a < b \iff ac < bc\ , \qquad a < b \iff \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

$$a \leq b \iff ac \leq bc\ , \qquad a \leq b \iff \frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$$

$c < 0$ のとき,

$$a < b \iff ac > bc\ , \qquad a < b \iff \frac{a}{c} > \frac{b}{c}\ ,$$

$$a \leq b \iff ac \geq bc\ , \qquad a \leq b \iff \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}\ .$$

総て同値関係であることに注意すること.

証明　次のことを示す：$c > 0$ のとき $a < b \iff ac < bc$.

$c > 0$ とする．法則 **1.5.3** により，$a < b$ ならば $ac < bc$ ．また，定理 **1.5.13** により $\frac{1}{c} > 0$ なので，法則 **1.5.3** により，$ac < bc$ ならば $ac\frac{1}{c} < bc\frac{1}{c}$ つまり $a < b$ ．故に，

$$c > 0 \text{ のとき } \quad a < b \iff ac < bc \, .$$

次のことを示す：$c < 0$ のとき $a < b \iff ac > bc$.

$c < 0$ とする．定理 **1.5.6** により，$a < b$ ならば $ac > bc$ ．また，定理 **1.5.13** により $\frac{1}{c} < 0$ なので，定理 **1.5.6** により，$ac > bc$ ならば $ac\frac{1}{c} < bc\frac{1}{c}$ つまり $a < b$ ．故に，

$$c < 0 \text{ のとき } \quad a < b \iff ac > bc \, .$$

(証明終了)

(法則 1.5.3) 任意の実数 a, b, c について，$a < b$ かつ $c > 0$ ならば，$ac < bc$.

(定理 1.5.13) 任意の実数 a について，$a > 0$ ならば $\frac{1}{a} > 0$.

(定理 1.5.6) 任意の実数 a, b, c について，$a < b$ かつ $c < 0$ ならば，$ac > bc$.