5.6　1次不等式の解法

実数を表す変数 x に関する不等式が次の何れかの形に整理できるとき，その方程式を x に関する 1 次不等式という：

$$ax + b < 0 \ , \qquad ax + b \leq 0 \ , \qquad ax + b > 0 \ , \qquad ax + b \geq 0 \ ;$$

ここで a, b は実数を表す定数で $a \neq 0$ ． 1 次不等式は前節の定理 **5.5** を用いて解ける.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する 1 次不等式 $5x - 7 < 2x + 5$ を解く.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する 1 次不等式 $5x-7<2x+5$ を解く.

$$
\begin{aligned}
& 5x-7<2x+5 && \text{(両辺から } 2x \text{ を引く)} \\
\Longleftrightarrow\ & 5x-7-2x<2x+5-2x \Longleftrightarrow 3x-7<5 && \text{(両辺に } 7 \text{ を加える)} \\
\Longleftrightarrow\ & 3x-7+7<5+7 \Longleftrightarrow 3x<12 && \text{(両辺に } \tfrac{1}{3} \text{ を掛ける)} \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{3x}{3}<\frac{12}{3} \Longleftrightarrow x<4\ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する1次不等式 $5x-7<2x+5$ を解く.

$$
\begin{aligned}
& 5x-7<2x+5 && \text{(両辺から } 2x \text{ を引く)}\\
\iff\ & 5x-7-2x<2x+5-2x \iff 3x-7<5 && \text{(両辺に } 7 \text{ を加える)}\\
\iff\ & 3x-7+7<5+7 \iff 3x<12 && \text{(両辺に } \tfrac{1}{3} \text{ を掛ける)}\\
\iff\ & \frac{3x}{3}<\frac{12}{3} \iff x<4\ .
\end{aligned}
$$

このように，不等式

$5x-7<2x+5$ と不等式 $x<4$

とは同値である.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する1次不等式 $5x-7<2x+5$ を解く.

$$
\begin{aligned}
& 5x-7<2x+5 && \text{(両辺から } 2x \text{ を引く)} \\
\Longleftrightarrow\ & 5x-7-2x<2x+5-2x \Longleftrightarrow 3x-7<5 && \text{(両辺に } 7 \text{ を加える)} \\
\Longleftrightarrow\ & 3x-7+7<5+7 \Longleftrightarrow 3x<12 && \text{(両辺に } \tfrac{1}{3} \text{ を掛ける)} \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{3x}{3}<\frac{12}{3} \Longleftrightarrow x<4\ .
\end{aligned}
$$

このように，不等式

$5x-7<2x+5$ と不等式 $x<4$

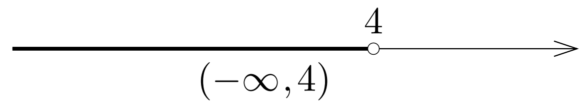
とは同値である．よって，与えら

れた不等式を解くと $x<4$.

例 変数 x に関する 1 次不等式 $5x-7<2x+5$ を解く.

$$
\begin{aligned}
& 5x-7<2x+5 && \text{(両辺から } 2x \text{ を引く)}\\
\iff\ & 5x-7-2x<2x+5-2x \iff 3x-7<5 && \text{(両辺に } 7 \text{ を加える)}\\
\iff\ & 3x-7+7<5+7 \iff 3x<12 && \text{(両辺に } \tfrac{1}{3} \text{ を掛ける)}\\
\iff\ & \frac{3x}{3}<\frac{12}{3} \iff x<4\ .
\end{aligned}
$$

このように，不等式 $5x-7<2x+5$ と不等式 $x<4$ とは同値である．よって，与えられた不等式を解くと $x<4$ ．解集合は区間 $(-\infty,4)$ である.



不等式 $5x-7<2x+5$ の解集合

終

定理 **5.5** として述べたように，実数 c について $c<0$ のとき，実数 a,b について，

$$a < b \iff ac > bc\ , \qquad a < b \iff \frac{a}{c} > \frac{b}{c}\ .$$

定理 **5.5** として述べたように，実数 c について $c<0$ のとき，実数 a,b について，

$$a < b \iff ac > bc \ , \qquad a < b \iff \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \ .$$

つまり次のことに注意すること：不等式について，

両辺に負の数を掛けるとか両辺を負の数で割ると不等号の向きが逆になる．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $4-\dfrac{8}{3}x<9-2x$ を解いて解集合を述べる.

例 変数 x に関する不等式 $4-\frac{8}{3}x<9-2x$ を解いて解集合を述べる. 不等式 $4-\frac{8}{3}x<9-2x$ の両辺に $2x$ を足すと $4-\frac{8}{3}x+2x<9-2x+2x$ つまり

$$4-\frac{2}{3}x < 9\ ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $4-\frac{8}{3}x<9-2x$ を解いて解集合を述べる. 不等式 $4-\frac{8}{3}x<9-2x$ の両辺に $2x$ を足すと $4-\frac{8}{3}x+2x<9-2x+2x$ つまり

$$4-\frac{2}{3}x<9\ ,$$

両辺から 4 を引くと $4-\frac{2}{3}x-4<9-4$ つまり

$$-\frac{2}{3}x<5\ ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $4-\dfrac{8}{3}x<9-2x$ を解いて解集合を述べる．不等式 $4-\dfrac{8}{3}x<9-2x$ の両辺に $2x$ を足すと $4-\dfrac{8}{3}x+2x<9-2x+2x$ つまり

$$4-\frac{2}{3}x<9\ ,$$

両辺から 4 を引くと $4-\dfrac{2}{3}x-4<9-4$ つまり

$$-\frac{2}{3}x<5\ ,$$

両辺に $-\dfrac{3}{2}$ を掛けると不等号の向きが

逆になり $-\dfrac{3}{2}\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)x>-\dfrac{3}{2}\cdot 5$ つまり

$$x>-\frac{15}{2}\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $4-\dfrac{8}{3}x<9-2x$ を解いて解集合を述べる．不等式 $4-\dfrac{8}{3}x<9-2x$ の両辺に $2x$ を足すと $4-\dfrac{8}{3}x+2x<9-2x+2x$ つまり

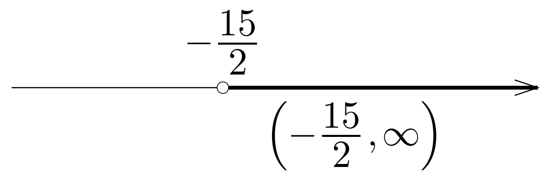
$$4-\frac{2}{3}x<9\ ,$$

両辺から 4 を引くと $4-\dfrac{2}{3}x-4<9-4$ つまり

$$-\frac{2}{3}x<5\ ,$$

両辺に $-\dfrac{3}{2}$ を掛けると不等号の向きが逆になり $-\dfrac{3}{2}\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)x>-\dfrac{3}{2}\cdot 5$ つまり

$$x>-\frac{15}{2}\ .$$



不等式 $4-\dfrac{8}{3}x<9-2x$ の解集合

与えられた不等式を解くと $x>-\dfrac{15}{2}$ ．

解集合は区間 $\left(-\dfrac{15}{2},\infty\right)$ である．

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 5.6.1}$ 変数 x に関する不等式 $\dfrac{x}{3} - 7 > 2x - 5$ を解いて解集合を述べよ.

不等式 $\dfrac{x}{3} - 7 > 2x - 5$ より,

$x >$, $x <$. 解集合は区間

である.

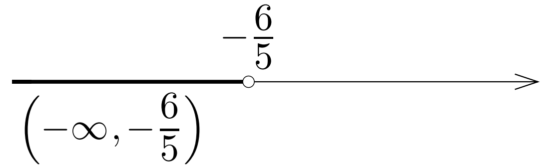
$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}5.6.1}$ 変数 x に関する不等式 $\dfrac{x}{3}-7>2x-5$ を解いて解集合を述べよ.

不等式 $\dfrac{x}{3}-7>2x-5$ より,

$-\dfrac{5}{3}x>2$, $x<-\dfrac{6}{5}$. 解集合は区間

$\left(-\infty,-\dfrac{6}{5}\right)$ である.



不等式 $\dfrac{x}{3}-7>2x-5$ の解集合

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{例}$ 変数 y に関する不等式 $\dfrac{3y-5}{4} \geq \dfrac{7y+5}{6}$ を解いて解集合を述べる.

例 変数 y に関する不等式 $\dfrac{3y-5}{4} \geq \dfrac{7y+5}{6}$ を解いて解集合を述べる. 不等式 $\dfrac{3y-5}{4} \geq \dfrac{7y+5}{6}$ の両辺に分母の 4 と 6 との最小公倍数 12 を掛けて整理する.

$\boxed{例}$ 変数 y に関する不等式 $\dfrac{3y-5}{4} \geq \dfrac{7y+5}{6}$ を解いて解集合を述べる. 不等式 $\dfrac{3y-5}{4} \geq \dfrac{7y+5}{6}$ の両辺に分母の 4 と 6 との最小公倍数 12 を掛けて整理する.

$$12 \cdot \frac{3y-5}{4} \geq 12 \cdot \frac{7y+5}{6} \ ,$$

$$3(3y-5) \geq 2(7y+5) \ ,$$

$$9y-15 \geq 14y+10 \ ,$$

$$9y-15-14y+15 \geq 14y+10-14y+15 \ ,$$

$$-5y \geq 25 \ ,$$

$$y \leq 5 \ .$$

例 変数 y に関する不等式 $\dfrac{3y-5}{4} \geq \dfrac{7y+5}{6}$ を解いて解集合を述べる. 不等式 $\dfrac{3y-5}{4} \geq \dfrac{7y+5}{6}$ の両辺に分母の 4 と 6 との最小公倍数 12 を掛けて整理する.

$$12 \cdot \frac{3y-5}{4} \geq 12 \cdot \frac{7y+5}{6} \ ,$$

$$3(3y-5) \geq 2(7y+5) \ ,$$

$$9y-15 \geq 14y+10 \ ,$$

$$9y-15-14y+15 \geq 14y+10-14y+15 \ ,$$

$$-5y \geq 25 \ ,$$

$$y \leq 5 \ .$$

与えられた不等式を解くと $y \leq -5$. 終

$\boxed{例}$ 変数 y に関する不等式 $\dfrac{3y-5}{4} \geq \dfrac{7y+5}{6}$ を解いて解集合を述べる．不等式 $\dfrac{3y-5}{4} \geq \dfrac{7y+5}{6}$ の両辺に分母の 4 と 6 との最小公倍数 12 を掛けて整理する．

$$12 \cdot \frac{3y-5}{4} \geq 12 \cdot \frac{7y+5}{6} \ ,$$

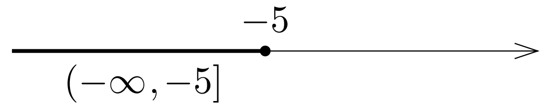
$$3(3y-5) \geq 2(7y+5) \ ,$$

$$9y - 15 \geq 14y + 10 \ ,$$

$$9y - 15 - 14y + 15 \geq 14y + 10 - 14y + 15 \ ,$$

$$-5y \geq 25 \ ,$$

$$y \leq 5 \ .$$



不等式 $\dfrac{3y-5}{4} \geq \dfrac{7y+5}{6}$ の解集合

与えられた不等式を解くと $y \leq -5$ ．解集合は区間 $(-\infty, -5]$ である． $\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}\,5.6.2}$ 変数 y に関する不等式 $\dfrac{4y+7}{3} \geq 2y$ を解いて解集合を述べよ.

不等式 $\dfrac{4y+7}{3} \geq 2y$ より,

$$\quad \geq \quad , \qquad y \geq \quad , \quad y \qquad .$$

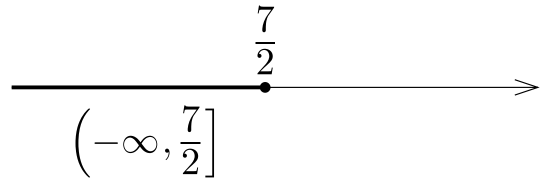
解集合は区間 　　　　　　 である.

$\boxed{\text{問}5.6.2}$ 変数 y に関する不等式 $\dfrac{4y+7}{3} \geq 2y$ を解いて解集合を述べよ.

不等式 $\dfrac{4y+7}{3} \geq 2y$ より,

$4y+7 \geq 6y$, $-2y \geq -7$, $y \leq \dfrac{7}{2}$.

解集合は区間 $\left(-\infty, \dfrac{7}{2}\right]$ である.



不等式 $\dfrac{4y+7}{3} \geq 2y$ の解集合

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}5.6.3}$ 変数 y に関する不等式 $\dfrac{5y-7}{6} > \dfrac{3y+1}{8}$ を解いて解集合を述べよ.

不等式 $\dfrac{5y-7}{6} > \dfrac{3y+1}{8}$ より,

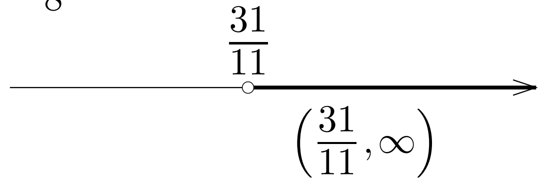
$>$, $y >$,

y . 解集合は区間 で

ある.

$\boxed{\text{問}\,5.6.3}$ 変数 y に関する不等式 $\dfrac{5y-7}{6} > \dfrac{3y+1}{8}$ を解いて解集合を述べよ.

不等式 $\dfrac{5y-7}{6} > \dfrac{3y+1}{8}$ より,
$20y-28 > 9y+3$, $11y > 31$,
$y > \dfrac{31}{11}$. 解集合は区間 $\left(\dfrac{31}{11}, \infty\right)$ である.



不等式 $\dfrac{5y-7}{6} > \dfrac{3y+1}{8}$ の解集合

$\boxed{\text{終}}$