5.8 2次不等式の解法

実数を表す定数 a, b, c（但し $a \neq 0$ ）に対して，実数を表す変数 x に関する 2 次不等式

$$ax^2+bx+c<0\ ,\quad ax^2+bx+c\leq 0\ ,\quad ax^2+bx+c>0\ ,\quad ax^2+bx+c\geq 0$$

を解くためには，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 b^2-4ac について，

$b^2-4ac \geq 0$ のときは 左辺 ax^2+bx+c を因数分解して，

$b^2-4ac < 0$ のときは 左辺 ax^2+bx+c を平方完成する．

最初に 2 次不等式の左辺の 2 次式 ax^2+bx+c について $b^2-4ac>0$ のときを扱う．このとき，定理 **3.5** により，2 次式 ax^2+bx+c は係数が実数の範囲で 1 次式の積に因数分解できる．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する以下の 2 次不等式を解く：

$$x^2 - 5x + 4 < 0 \ , \quad x^2 - 5x + 4 \leq 0 \ , \quad x^2 - 5x + 4 > 0 \ , \quad x^2 - 5x + 4 \geq 0 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する以下の 2 次不等式を解く：

$$x^2-5x+4<0\ ,\quad x^2-5x+4\leq 0\ ,\quad x^2-5x+4>0\ ,\quad x^2-5x+4\geq 0\ .$$

左辺の 2 次式を因数分解すると $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$ ．x に関する以下の 2 次不等式を解けばよい：

$$(x-1)(x-4)<0\,,\ (x-1)(x-4)\leq 0\,,\ (x-1)(x-4)>0\,,\ (x-1)(x-4)\geq 0\,.$$

$\boxed{例}$ 変数 x に関する以下の 2 次不等式を解く：

$$x^2-5x+4<0\ ,\quad x^2-5x+4\leq 0\ ,\quad x^2-5x+4>0\ ,\quad x^2-5x+4\geq 0\ .$$

左辺の 2 次式を因数分解すると $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$ ． x に関する以下の 2 次不等式を解けばよい：

$$(x-1)(x-4)<0\,,\ (x-1)(x-4)\leq 0\,,\ (x-1)(x-4)>0\,,\ (x-1)(x-4)\geq 0\,.$$

左辺の 2 次式の因数 $x-1$ ，$x-4$ の値の符号は次のようになる：

$x<1$ のとき $x-1<0$ ， $x=1$ のとき $x-1=0$ ， $x>1$ のとき $x-1>0$ ；

$x<4$ のとき $x-4<0$ ， $x=4$ のとき $x-4=0$ ， $x>4$ のとき $x-4>0$ ．

例 変数 x に関する以下の 2 次不等式を解く：

$$x^2-5x+4<0\ ,\quad x^2-5x+4\leq 0\ ,\quad x^2-5x+4>0\ ,\quad x^2-5x+4\geq 0\ .$$

左辺の 2 次式を因数分解すると $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$ ． x に関する以下の 2 次不等式を解けばよい：

$$(x-1)(x-4)<0\,,\ (x-1)(x-4)\leq 0\,,\ (x-1)(x-4)>0\,,\ (x-1)(x-4)\geq 0\,.$$

左辺の 2 次式の因数 $x-1$, $x-4$ の値の符号は次のようになる：

$x<1$ のとき $x-1<0$ ， $x=1$ のとき $x-1=0$ ， $x>1$ のとき $x-1>0$ ；

$x<4$ のとき $x-4<0$ ， $x=4$ のとき $x-4=0$ ， $x>4$ のとき $x-4>0$ ．

不等式の左辺 $(x-1)(x-4)$ の値の符号は次のようになる：

$x<1$ のとき, $x-1<0$ かつ $x-4<0$ なので $(x-1)(x-4)>0$ ；

$x=1$ のとき, $x-1=0$ なので $(x-1)(x-4)=0$ ；

$1<x<4$ のとき, $x-1>0$ かつ $x-4<0$ なので $(x-1)(x-4)<0$ ；

$x=4$ のとき, $x-4=0$ なので $(x-1)(x-4)=0$ ；

$x>4$ のとき, $x-1>0$ かつ $x-4>0$ なので $(x-1)(x-4)>0$ ．

$x < 1$ のとき, $x-1<0$ かつ $x-4<0$ なので $(x-1)(x-4)>0$;

$x = 1$ のとき, $x-1=0$ なので $(x-1)(x-4)=0$;

$1 < x < 4$ のとき, $x-1>0$ かつ $x-4<0$ なので $(x-1)(x-4)<0$;

$x = 4$ のとき, $x-4=0$ なので $(x-1)(x-4)=0$;

$x > 4$ のとき, $x-1>0$ かつ $x-4>0$ なので $(x-1)(x-4)>0$.

$x<1$ のとき, $x-1<0$ かつ $x-4<0$ なので $(x-1)(x-4)>0$;

$x=1$ のとき, $x-1=0$ なので $(x-1)(x-4)=0$;

$1<x<4$ のとき, $x-1>0$ かつ $x-4<0$ なので $(x-1)(x-4)<0$;

$x=4$ のとき, $x-4=0$ なので $(x-1)(x-4)=0$;

$x>4$ のとき, $x-1>0$ かつ $x-4>0$ なので $(x-1)(x-4)>0$.

これらのことを次のような表で表す.

x の値	$x<1$	$x=1$	$1<x<4$	$x=4$	$4<x$
$x-1$ の値の符号	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$ の値の符号	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-1)(x-4)$ の値の符号	$+$	0	$-$	0	$+$

x の値	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 4$	$x = 4$	$4 < x$
$x-1$ の値の符号 $x-4$ の値の符号	$-$ $-$	0 $-$	$+$ $-$	$+$ 0	$+$ $+$
$(x-1)(x-4)$ の値の符号	$+$	0	$-$	0	$+$

x の値	$x<1$	$x=1$	$1<x<4$	$x=4$	$4<x$
$x-1$ の値の符号	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$ の値の符号	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-1)(x-4)$ の値の符号	$+$	0	$-$	0	$+$

この表から次のことが分かる：

$(x-1)(x-4)<0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4)$ の符号は $-$ $\Leftrightarrow 1<x<4$;

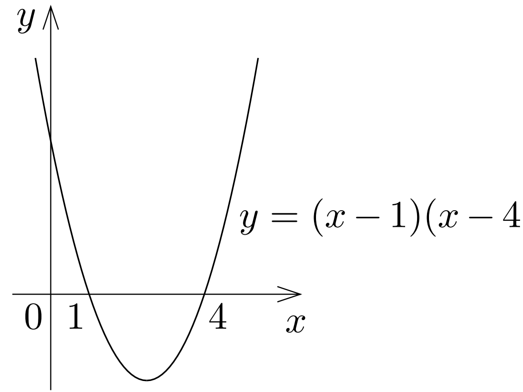
$(x-1)(x-4)\leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4)$ の符号は $-$ か 0 $\Leftrightarrow 1\leq x\leq 4$;

$(x-1)(x-4)>0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4)$ の符号は $+$ $\Leftrightarrow x<1$ または $x>4$;

$(x-1)(x-4)\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4)$ の符号は $+$ か 0 $\Leftrightarrow x\leq 1$ または $x\geq 4$.

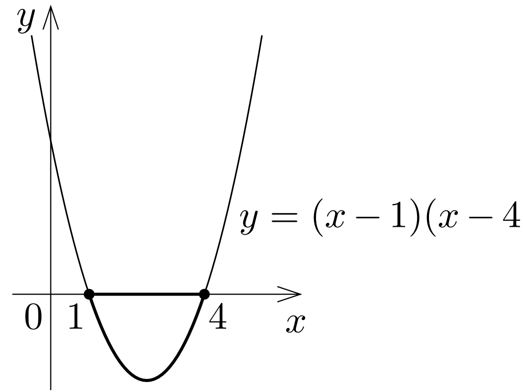
これらのことは x の関数 $y=(x-1)(x-4)$ のグラフを考えても分かる.

xy 座標平面において，関数 $y=(x-1)(x-4)$ のグラフと x 軸との共有点は $(1,0)$ と $(4,0)$ とである．また，$y=(x-1)(x-4)$ のグラフは下に凸の放物線である．

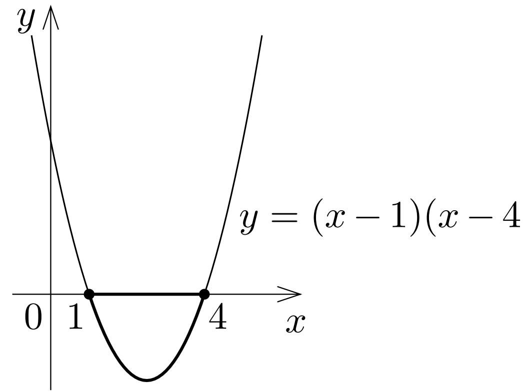


xy 座標平面において，関数 $y=(x-1)(x-4)$ のグラフと x 軸との共有点は $(1,0)$ と $(4,0)$ とである．また，$y=(x-1)(x-4)$ のグラフは下に凸の放物線である．$y=(x-1)(x-4)$ について，

$$(x-1)(x-4) \leq 0 \iff y \leq 0 .$$



xy 座標平面において，関数 $y=(x-1)(x-4)$ のグラフと x 軸との共有点は $(1,0)$ と $(4,0)$ とである．また，$y=(x-1)(x-4)$ のグラフは下に凸の放物線である．



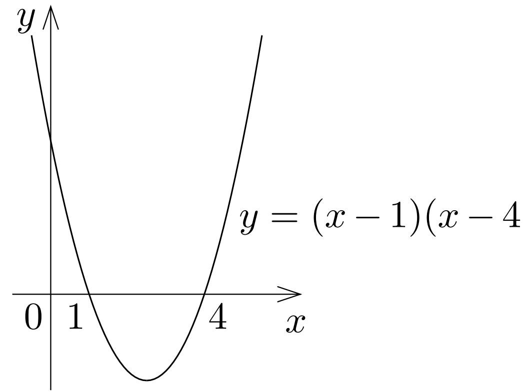
$y=(x-1)(x-4)$ について，

$$(x-1)(x-4) \leq 0 \iff y \leq 0 .$$

$y=(x-1)(x-4)$ のグラフにおいて，x 座標について $(x-1)(x-4) \leq 0$ となる部分は y 座標が 0 以下の部分である；この部分の x 座標の範囲は $1 \leq x \leq 4$ なので，

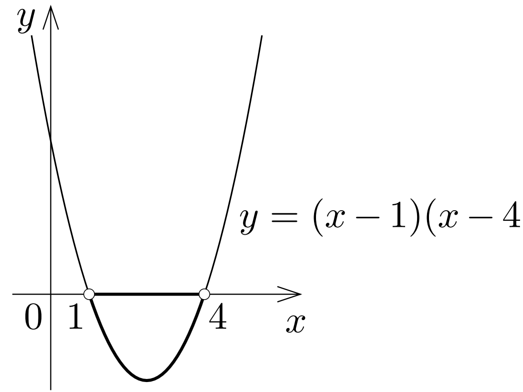
$$y=(x-1)(x-4) \leq 0 \iff 1 \leq x \leq 4 .$$

xy 座標平面において，関数 $y=(x-1)(x-4)$ のグラフと x 軸との共有点は $(1,0)$ と $(4,0)$ とである．また，$y=(x-1)(x-4)$ のグラフは下に凸の放物線である．

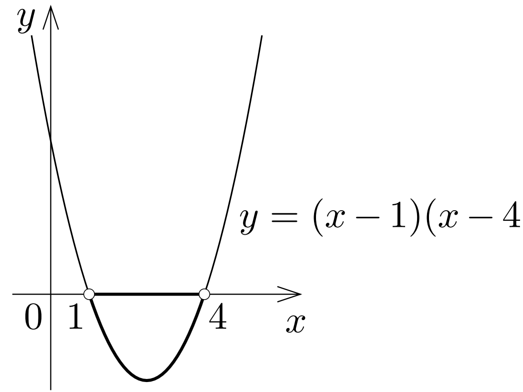


xy 座標平面において，関数 $y=(x-1)(x-4)$ のグラフと x 軸との共有点は $(1,0)$ と $(4,0)$ とである．また， $y=(x-1)(x-4)$ のグラフは下に凸の放物線である．
$y=(x-1)(x-4)$ について，

$$(x-1)(x-4)<0 \iff y<0 .$$



xy 座標平面において，関数 $y=(x-1)(x-4)$ のグラフと x 軸との共有点は $(1,0)$ と $(4,0)$ とである．また，$y=(x-1)(x-4)$ のグラフは下に凸の放物線である．



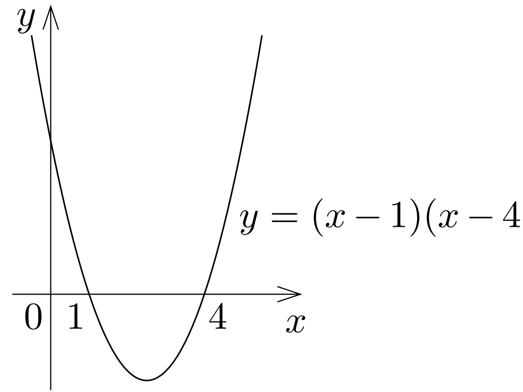
$y=(x-1)(x-4)$ について，

$$(x-1)(x-4) < 0 \iff y < 0 .$$

$y=(x-1)(x-4)$ のグラフにおいて，x 座標について $(x-1)(x-4)<0$ となる部分は y 座標が 0 より小さい部分である；この部分の x 座標の範囲は $1<x<4$ なので，

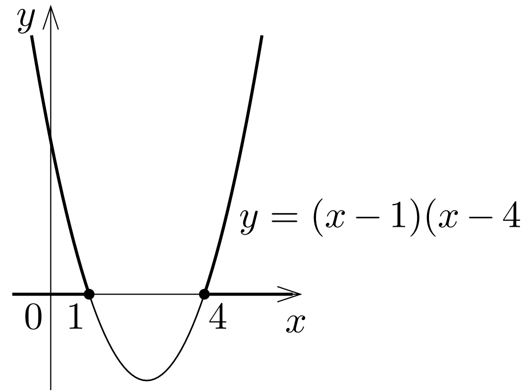
$$y=(x-1)(x-4) < 0 \iff 1 < x < 4 .$$

xy 座標平面において，関数 $y=(x-1)(x-4)$ のグラフと x 軸との共有点は $(1,0)$ と $(4,0)$ とである．また，$y=(x-1)(x-4)$ のグラフは下に凸の放物線である．

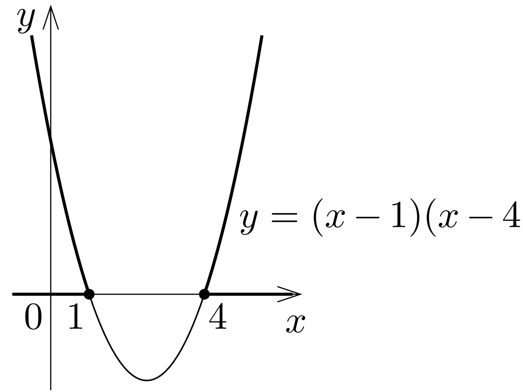


xy 座標平面において，関数 $y=(x-1)(x-4)$ のグラフと x 軸との共有点は $(1,0)$ と $(4,0)$ とである．また，$y=(x-1)(x-4)$ のグラフは下に凸の放物線である．$y=(x-1)(x-4)$ について，

$$(x-1)(x-4) \geq 0 \iff y \geq 0 \ .$$



xy 座標平面において，関数 $y=(x-1)(x-4)$ のグラフと x 軸との共有点は $(1,0)$ と $(4,0)$ とである．また，$y=(x-1)(x-4)$ のグラフは下に凸の放物線である．



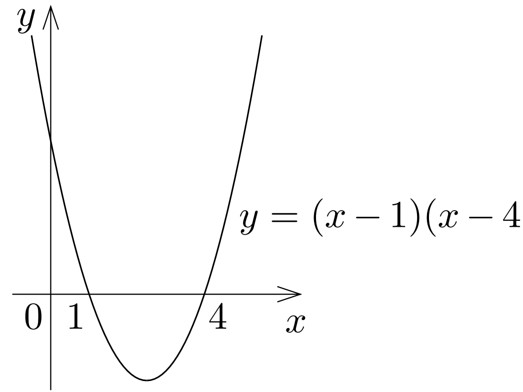
$y=(x-1)(x-4)$ について，

$$(x-1)(x-4) \geq 0 \iff y \geq 0\ .$$

$y=(x-1)(x-4)$ のグラフにおいて，x 座標について $(x-1)(x-4) \geq 0$ となる部分は y 座標が 0 以上の部分である；この部分の x 座標の範囲は $x \leq 1$ と $x \geq 4$ なので，

$$y=(x-1)(x-4) \geq 0 \iff x \leq 1 \text{ または } x \leq 4\ .$$

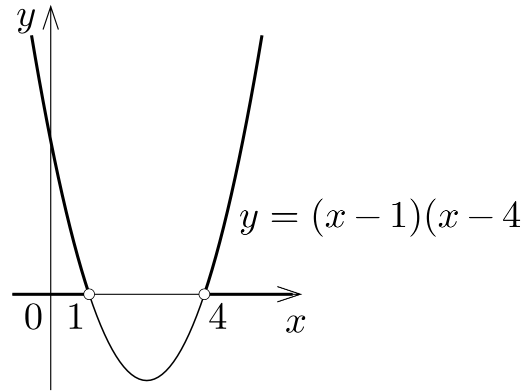
xy 座標平面において，関数 $y=(x-1)(x-4)$ のグラフと x 軸との共有点は $(1,0)$ と $(4,0)$ とである．また，$y=(x-1)(x-4)$ のグラフは下に凸の放物線である．



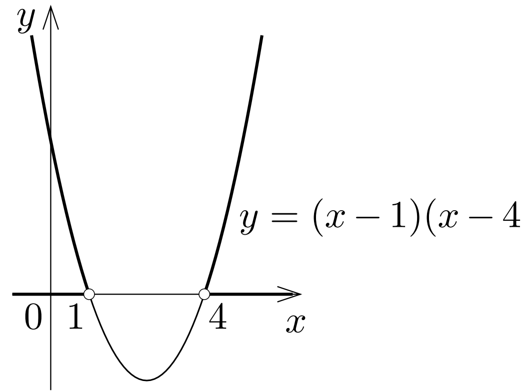
xy 座標平面において，関数 $y=(x-1)(x-4)$ のグラフと x 軸との共有点は $(1,0)$ と $(4,0)$ とである．また，$y=(x-1)(x-4)$ のグラフは下に凸の放物線である．

$y=(x-1)(x-4)$ について，

$$(x-1)(x-4)>0 \iff y>0 .$$



xy 座標平面において，関数 $y=(x-1)(x-4)$ のグラフと x 軸との共有点は $(1,0)$ と $(4,0)$ とである．また，$y=(x-1)(x-4)$ のグラフは下に凸の放物線である．



$y=(x-1)(x-4)$ について，

$$(x-1)(x-4)>0 \iff y>0 .$$

$y=(x-1)(x-4)$ のグラフにおいて，x 座標について $(x-1)(x-4)>0$ となる部分は y 座標が 0 より大きい部分である；この部分の x 座標の範囲は $x<1$ と $x>4$ なので，

$$y=(x-1)(x-4)>0 \iff x<1 \text{ または } x>4 .$$

このようにして以下のことが分かる：

不等式 $(x-1)(x-4)<0$ を解くと $1<x<4$,

不等式 $(x-1)(x-4)\leq 0$ を解くと $1\leq x\leq 4$,

不等式 $(x-1)(x-4)>0$ を解くと $x<1$ または $x>4$,

不等式 $(x-1)(x-4)\geq 0$ を解くと $x\leq 1$ または $x\geq 4$.

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $6-2x^2 \leq x$ を解く.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $6-2x^2 \leq x$ を解く. 不等式 $6-2x^2 \leq x$ より

$-2x^2-x+6 \leq 0$.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $6-2x^2 \leq x$ を解く．不等式 $6-2x^2 \leq x$ より $-2x^2-x+6 \leq 0$ ． x^2 の係数を正にする方が考え易いので，両辺に -1 を掛けて

$$2x^2+x-6 \geq 0 \ .$$

2 次方程式 $2x^2+x-6=0$ の判別式の値が正なので，2 次式を因数分解するタイプである．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $6-2x^2 \leq x$ を解く．不等式 $6-2x^2 \leq x$ より $-2x^2-x+6 \leq 0$ ． x^2 の係数を正にする方が考え易いので，両辺に -1 を掛けて

$$2x^2+x-6 \geq 0 \ .$$

左辺を因数分解すると $2x^2+x-6=(x+2)(2x-3)$ なので

$$(x+2)(2x-3) \geq 0 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $6-2x^2 \leq x$ を解く．不等式 $6-2x^2 \leq x$ より $-2x^2-x+6 \leq 0$ ． x^2 の係数を正にする方が考え易いので，両辺に -1 を掛けて

$$2x^2+x-6 \geq 0 \ .$$

左辺を因数分解すると $2x^2+x-6=(x+2)(2x-3)$ なので

$$(x+2)(2x-3) \geq 0 \ .$$

符号を調べるためには x の係数が 1 の方が分かりやすいので，左辺の因数 $2x-3$ と右辺とを 2 で割る：

$$(x+2)\left(\frac{2x-3}{2}\right) \geq \frac{0}{2} \ ,$$

$$(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right) \geq 0 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $6-2x^2 \leq x$ を解く．不等式 $6-2x^2 \leq x$ より $-2x^2-x+6 \leq 0$ ． x^2 の係数を正にする方が考え易いので，両辺に -1 を掛けて

$$2x^2+x-6 \geq 0 \ .$$

左辺を因数分解すると $2x^2+x-6=(x+2)(2x-3)$ なので

$$(x+2)(2x-3) \geq 0 \ .$$

符号を調べるためには x の係数が 1 の方が分かりやすいので，左辺の因数 $2x-3$ と右辺とを 2 で割る：

$$(x+2)\left(\frac{2x-3}{2}\right) \geq \frac{0}{2} \ ,$$

$$(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right) \geq 0 \ .$$

x の値について場合分けして，左辺の 2 次式の値の符号を調べる．

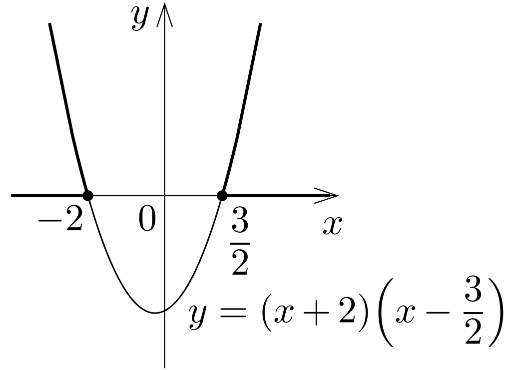
x の値	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < \dfrac{3}{2}$	$x = \dfrac{3}{2}$	$\dfrac{3}{2} < x$
$x+2$ の値の符号	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\dfrac{3}{2}$ の値の符号	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$ の値の符号	$+$	0	$-$	0	$+$

x の値	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < \frac{3}{2}$	$x = \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} < x$
$x+2$ の値の符号 $x-\frac{3}{2}$ の値の符号	$-$ $-$	0 $-$	$+$ $-$	$+$ 0	$+$ $+$
$(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$ の値の符号	$+$	0	$-$	0	$+$

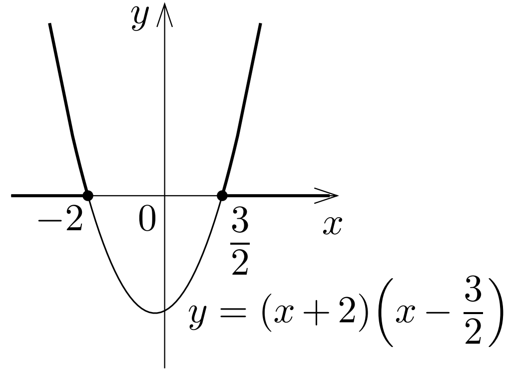
この表を次のように略す.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$x+2$ $x-\frac{3}{2}$	$-$ $-$	0 $-$	$+$ $-$	$+$ 0	$+$ $+$
$(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\frac{3}{2}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$



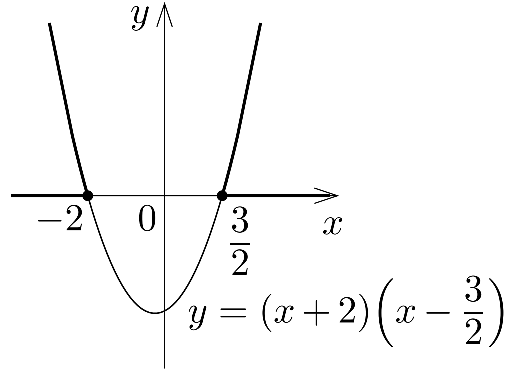
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\frac{3}{2}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$



この表より,

$$(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right) \geq 0 \iff x \leq -2 \text{ または } x \geq \frac{3}{2} .$$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\frac{3}{2}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$



この表より,

$$(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right) \geq 0 \iff x \leq -2 \text{ または } x \geq \frac{3}{2} .$$

故に，与えられた不等式を解くと， $x \leq -2$ または $x \geq \frac{3}{2}$. 終

$\boxed{\text{問}5.8.1}$ 変数 x に関する以不等式 $3x^2+7x>6$ を解け.

不等式 $3x^2+7x>6$ より,

$$> 0 \ ,$$

$$(\qquad)(\qquad) > 0 \ ,$$

$$(x \qquad)\left(x \qquad\right) > 0 \ ,$$

よって，与えられた不等式を解くと,

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
x x					
$(x \qquad)\left(x \qquad\right)$					

$\boxed{問5.8.1}$ 変数 x に関する以不等式 $3x^2+7x>6$ を解け.

不等式 $3x^2+7x>6$ より,

$$3x^2+7x-6>0\ ,$$

$$(x+3)(3x-2)>0\ ,$$

$$(x+3)\left(x-\frac{2}{3}\right)>0\ ,$$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\frac{2}{3}$	$-$	0	$-$	0	$+$
$(x+3)\left(x-\frac{2}{3}\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$

故に,与えられた不等式を解くと,

$x<-3$ または $x>\dfrac{2}{3}$.

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}5.8.2}$ 変数 y に関する不等式 $y+12 \geq 6y^2$ を解け.

不等式 $y+12 \geq 6y^2$ より,

$$\leq 0 \ ,$$

$$(\qquad)(\qquad) \leq 0 \ ,$$

$$\Big(y \qquad\Big)\Big(y \qquad\Big) \leq 0 \ ,$$

よって,与えられた不等式を解くと,

y	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
y					
y					
$\Big(y \qquad\Big)\Big(y \qquad\Big)$					

$\boxed{\text{問}5.8.2}$ 変数 y に関する以不等式 $y+12 \geq 6y^2$ を解け.

不等式 $y+12 \geq 6y^2$ より,

$$6y^2 - y - 12 \leq 0 \ ,$$

$$(3y+4)(2y-3) \leq 0 \ ,$$

$$\left(y+\frac{4}{3}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right) \leq 0 \ ,$$

y	$\cdots$	$-\frac{4}{3}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$y+\frac{4}{3}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$y-\frac{3}{2}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\left(y+\frac{4}{3}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)$	$-$	0	$-$	0	$+$

故に, 与えられた不等式を解くと,

$-\frac{4}{3} \leq y \leq \frac{3}{2}$.

$\boxed{\text{終}}$

2 次式の因数分解の公式（**3.5** 節）を思い起こすこと：複素数 a, b, c（ $a \neq 0$ ）について，x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 個の解を α, β とおくと，x の 2 次式 $ax^2 + bx + c$ は次のように因数分解できる：

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta) \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 k に関する不等式 $k(6-k) > 7$ を解く.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 k に関する不等式 $k(6-k)>7$ を解く．不等式 $k(6-k)>7$ より，$6k-k^2>7$ なので

$$k^2-6k+7<0\ .$$

2 次方程式 $k^2-6k+7=0$ の判別式の値が正なので，2 次式を因数分解するタイプである．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 k に関する不等式 $k(6-k) > 7$ を解く．不等式 $k(6-k) > 7$ より，$6k - k^2 > 7$ なので

$$k^2 - 6k + 7 < 0 \ .$$

k に関する 2 次方程式 $k^2 - 6k + 7 = 0$ の解は $3 \pm \sqrt{2}$ なので，2 次式の因数分解の公式（**3.5** 節）により

$$k^2 - 6 + 7 = \left(k - 3 + \sqrt{2}\right)\left(k - 3 - \sqrt{2}\right) \ .$$

$\boxed{例}$ 変数 k に関する不等式 $k(6-k)>7$ を解く．不等式 $k(6-k)>7$ より，$6k-k^2>7$ なので

$$k^2-6k+7<0\ .$$

k に関する 2 次方程式 $k^2-6k+7=0$ の解は $3\pm\sqrt{2}$ なので，2 次式の因数分解の公式（**3.5** 節）により

$$k^2-6+7=\left(k-3+\sqrt{2}\right)\left(k-3-\sqrt{2}\right)\ .$$

この k の 2 次式の値の符号を調べる．

k	$\cdots$	$3-\sqrt{2}$	$\cdots$	$3+\sqrt{2}$	$\cdots$
$k-3+\sqrt{2}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$k-3-\sqrt{2}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\left(k-3+\sqrt{2}\right)\left(k-3-\sqrt{2}\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$

k	$\cdots$	$3-\sqrt{2}$	$\cdots$	$3+\sqrt{2}$	$\cdots$
$k-3+\sqrt{2}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$k-3-\sqrt{2}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\left(k-3+\sqrt{2}\right)\left(k-3-\sqrt{2}\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$

k	$\cdots$	$3-\sqrt{2}$	$\cdots$	$3+\sqrt{2}$	$\cdots$
$k-3+\sqrt{2}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$k-3-\sqrt{2}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\left(k-3+\sqrt{2}\right)\left(k-3-\sqrt{2}\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$

この表より

$$\begin{aligned} k^2-6k+7<0 &\iff \left(k-3+\sqrt{2}\right)\left(k-3-\sqrt{2}\right)<0 \\ &\iff 3-\sqrt{2}<k<3+\sqrt{2}\ . \end{aligned}$$

k	$\cdots$	$3-\sqrt{2}$	$\cdots$	$3+\sqrt{2}$	$\cdots$
$k-3+\sqrt{2}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$k-3-\sqrt{2}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\left(k-3+\sqrt{2}\right)\left(k-3-\sqrt{2}\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$

この表より

$$\begin{aligned} k^2-6k+7<0 &\iff \left(k-3+\sqrt{2}\right)\left(k-3-\sqrt{2}\right)<0 \\ &\iff 3-\sqrt{2}<k<3+\sqrt{2}\ . \end{aligned}$$

故に，与えられた不等式を解くと $3-\sqrt{2}<k<3+\sqrt{2}$. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問5.8.3}$ 変数 a に関する不等式 $a^2+4 \geq 6a$ を解け.

　不等式 $a^2+4 \geq 6a$ より

$$\qquad\qquad \geq 0 \ .$$

方程式 $\qquad\qquad = 0$ の解は $\qquad\qquad$ なので,

$$(a \qquad\qquad)(a \qquad\qquad) \geq 0 \ .$$

a	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
a a					
$(a \qquad\qquad)(a \qquad\qquad)$					

与えられた不等式を解くと,

$\boxed{\text{問}5.8.3}$ 変数 a に関する不等式 $a^2+4 \geq 6a$ を解け.

　不等式 $a^2+4 \geq 6a$ より

$$a^2-6a+4 \geq 0 \ .$$

方程式 $a^2-6a+4=0$ の解は $3\pm\sqrt{5}$ なので,

$$\left(a-3+\sqrt{2}\right)\left(a-3-\sqrt{5}\right) \geq 0 \ .$$

k	$\cdots$	$3-\sqrt{5}$	$\cdots$	$3+\sqrt{5}$	$\cdots$
$a-3+\sqrt{5}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$a-3-\sqrt{5}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\left(a-3+\sqrt{5}\right)\left(a-3-\sqrt{5}\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$

故に，与えられた不等式を解くと, $a \leq 3-\sqrt{5}$ または $a \geq 3+\sqrt{5}$. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問5.8.4}$ 変数 t に関する不等式 $2t(t+2) < 1$ を解け.

不等式 $2t(t+2) < 1$ より $\qquad\qquad < 0$, $t^2 \qquad\qquad < 0$, 方程式

$t^2 \qquad\qquad = 0$ の解は $\qquad\qquad$ なので,

$$\left(t \qquad\qquad\right)\left(t \qquad\qquad\right) < 0 .$$

t	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
t t					
$\left(t \qquad\qquad\right)\left(t \qquad\qquad\right)$					

与えられた不等式を解くと,

$\boxed{問5.8.4}$ 変数 t に関する不等式 $2t(t+2)<1$ を解け.

不等式 $2t(t+2)<1$ より $2t^2+4t-1<0$, $t^2+2t-\frac{1}{2}<0$, 方程式 $t^2+2t-\frac{1}{2}=0$ の解は $-1\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ なので,

$$\left(t+1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(t+1-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)<0 .$$

t	$\cdots$	$-1-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$	$-1+\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$
$t+1+\frac{\sqrt{6}}{2}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$t+1-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\left(t+1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(t+1-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$

故に, 与えられた不等式を解くと, $-1-\frac{\sqrt{6}}{2}<t<-1+\frac{\sqrt{6}}{2}$. $\boxed{終}$

次に 2 次不等式の左辺の 2 次式 ax^2+bx+c について $b^2-4ac=0$ のときを扱う．このとき，定理 **3.4** により，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ には実数の重解 α があり，2 次式 ax^2+bx+c は $a(x-\alpha)^2$ の形に因数分解できる．

例 変数 x に関する以下の 2 次不等式を解く：

$$x^2-6x+9 \geq 0\ ,\quad x^2-6x+9 < 0\ ,\quad x^2-6x+9 > 0\ ,\quad x^2-6x+9 \leq 0\ .$$

例 変数 x に関する以下の 2 次不等式を解く：

$$x^2-6x+9 \geq 0\ ,\quad x^2-6x+9 < 0\ ,\quad x^2-6x+9 > 0\ ,\quad x^2-6x+9 \leq 0\ .$$

左辺の 2 次式 x^2-6x+9 を因数分解すると

$$x^2-6x+9 = (x-3)^2\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する以下の 2 次不等式を解く：

$$x^2-6x+9 \geq 0 \ , \quad x^2-6x+9 < 0 \ , \quad x^2-6x+9 > 0 \ , \quad x^2-6x+9 \leq 0 \ .$$

左辺の 2 次式 x^2-6x+9 を因数分解すると

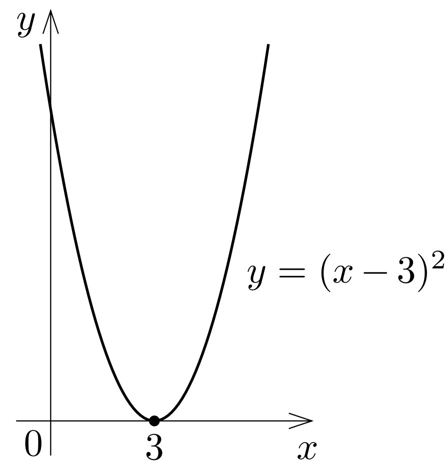
$$x^2-6x+9 = (x-3)^2 \ .$$

x に関する以下の 2 次不等式を解けばよい：

$$(x-3)^2 \geq 0 \ , \quad (x-3)^2 < 0 \ , \quad (x-3)^2 > 0 \ , \quad (x-3)^2 \leq 0 \ .$$

x に関する以下の 2 次不等式を解けばよい：

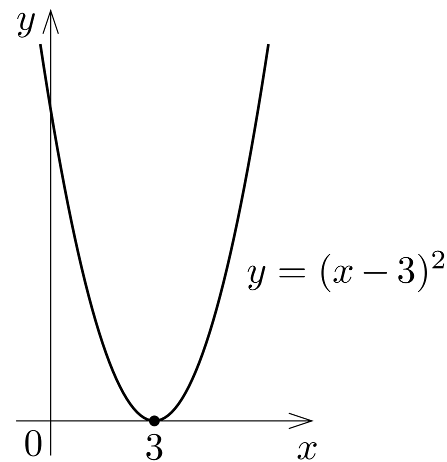
$$(x-3)^2 \geq 0 \ , \quad (x-3)^2 < 0 \ , \quad (x-3)^2 > 0 \ , \quad (x-3)^2 \leq 0 \ .$$



x に関する以下の 2 次不等式を解けばよい：

$$(x-3)^2 \geq 0 \ , \quad (x-3)^2 < 0 \ , \quad (x-3)^2 > 0 \ , \quad (x-3)^2 \leq 0 \ .$$

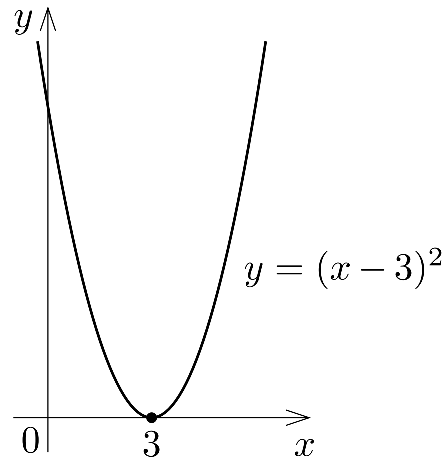
x がどんな実数でも $(x-3)^2 \geq 0$ なので，総ての実数が不等式 $(x-3)^2 \geq 0$ の解ある.



x に関する以下の 2 次不等式を解けばよい：

$$(x-3)^2 \geq 0 \ , \quad (x-3)^2 < 0 \ , \quad (x-3)^2 > 0 \ , \quad (x-3)^2 \leq 0 \ .$$

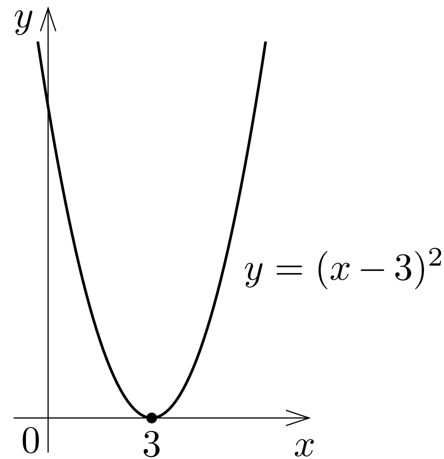
x がどんな実数でも $(x-3)^2 \geq 0$ なので，総ての実数が不等式 $(x-3)^2 \geq 0$ の解ある． x がどんな実数でも $(x-3)^2 \geq 0$ なので， $(x-3)^2 < 0$ である実数 x は無い；つまり，不等式 $(x-3)^2 < 0$ の解は無い．



x に関する以下の 2 次不等式を解けばよい：

$$(x-3)^2 \geq 0 \;, \quad (x-3)^2 < 0 \;, \quad (x-3)^2 > 0 \;, \quad (x-3)^2 \leq 0 \;.$$

x がどんな実数でも $(x-3)^2 \geq 0$ なので，総ての実数が不等式 $(x-3)^2 \geq 0$ の解ある．x がどんな実数でも $(x-3)^2 \geq 0$ なので，$(x-3)^2 < 0$ である実数 x は無い；つまり，不等式 $(x-3)^2 < 0$ の解は無い．定理 **1.5.11** “任意の実数 a について，$a^2 \leq 0 \iff a = 0$ ，$a^2 > 0 \iff a \neq 0$.” により，



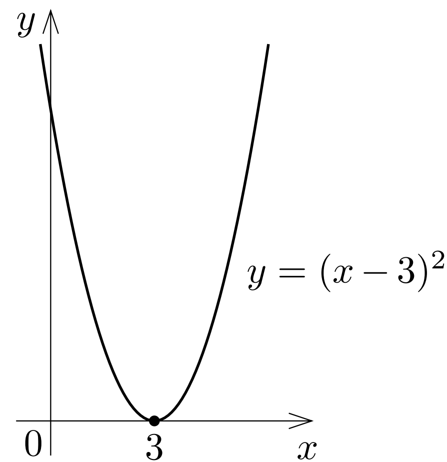
x に関する以下の 2 次不等式を解けばよい：

$$(x-3)^2 \geq 0 \ , \quad (x-3)^2 < 0 \ , \quad (x-3)^2 > 0 \ , \quad (x-3)^2 \leq 0 \ .$$

x がどんな実数でも $(x-3)^2 \geq 0$ なので，総ての実数が不等式 $(x-3)^2 \geq 0$ の解ある．x がどんな実数でも $(x-3)^2 \geq 0$ なので，$(x-3)^2 < 0$ である実数 x は無い；つまり，不等式 $(x-3)^2 < 0$ の解は無い．定理 **1.5.11**“任意の実数 a について，$a^2 \leq 0 \iff a = 0$ ，$a^2 > 0 \iff a \neq 0$ ．”により，

$$(x-3)^2 \leq 0 \iff x-3=0 \iff x=3 \ ,$$

$$(x-3)^2 > 0 \iff x-3 \neq 0 \iff x \neq 3 \ .$$



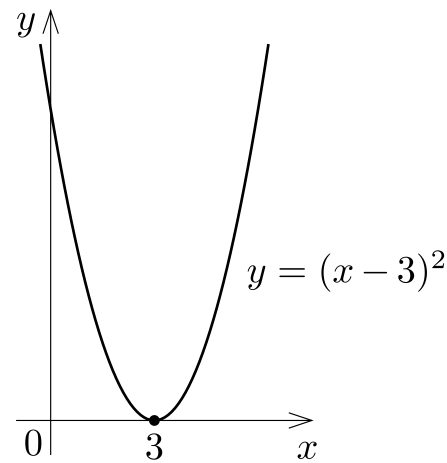
x に関する以下の 2 次不等式を解けばよい：

$$(x-3)^2 \geq 0 \ , \quad (x-3)^2 < 0 \ , \quad (x-3)^2 > 0 \ , \quad (x-3)^2 \leq 0 \ .$$

x がどんな実数でも $(x-3)^2 \geq 0$ なので，総ての実数が不等式 $(x-3)^2 \geq 0$ の解ある． x がどんな実数でも $(x-3)^2 \geq 0$ なので， $(x-3)^2 < 0$ である実数 x は無い；つまり，不等式 $(x-3)^2 < 0$ の解は無い．定理 **1.5.11** “任意の実数 a について，
$a^2 \leq 0 \iff a = 0$ ， $a^2 > 0 \iff a \neq 0$ ．”
により，

$$(x-3)^2 \leq 0 \iff x-3=0 \iff x=3 \ ,$$

$$(x-3)^2 > 0 \iff x-3 \neq 0 \iff x \neq 3 \ .$$



故に，不等式 $(x-3)^2 \leq 0$ を解くと $x=3$ ，不等式 $(x-3)^2 > 0$ を解くと $x \neq 3$ ．

終

例 変数 a に関する不等式 $a - \dfrac{a^2}{3} \geq \dfrac{3}{4}$ を解く.

$\boxed{例}$ 変数 a に関する不等式 $a-\dfrac{a^2}{3} \geq \dfrac{3}{4}$ を解く．不等式 $a-\dfrac{a^2}{3} \geq \dfrac{3}{4}$ より

$$-\frac{a^2}{3}+a-\frac{3}{4} \geq 0 \ .$$

2 次方程式 $-\dfrac{a^2}{3}+a-\dfrac{3}{4}=0$ の判別式の値が 0 なので，2 次式を因数分解するタイプである．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 a に関する不等式 $a-\dfrac{a^2}{3} \geq \dfrac{3}{4}$ を解く. 不等式 $a-\dfrac{a^2}{3} \geq \dfrac{3}{4}$ より

$$-\frac{a^2}{3}+a-\frac{3}{4} \geq 0 \ .$$

両辺に -3 を掛けて

$$a^2-3a+\frac{9}{4} \leq 0 \ .$$

$\boxed{例}$ 変数 a に関する不等式 $a-\dfrac{a^2}{3}\geq\dfrac{3}{4}$ を解く．不等式 $a-\dfrac{a^2}{3}\geq\dfrac{3}{4}$ より

$$-\frac{a^2}{3}+a-\frac{3}{4}\geq 0\ .$$

両辺に -3 を掛けて

$$a^2-3a+\frac{9}{4}\leq 0\ .$$

この不等式の左辺は $a^2-3a+\dfrac{9}{4}=\left(a-\dfrac{3}{2}\right)^2$ なので，

$$\left(a-\frac{3}{2}\right)^2\leq 0\ .$$

$\boxed{例}$ 変数 a に関する不等式 $a-\dfrac{a^2}{3}\geq\dfrac{3}{4}$ を解く. 不等式 $a-\dfrac{a^2}{3}\geq\dfrac{3}{4}$ より

$$-\frac{a^2}{3}+a-\frac{3}{4}\geq 0\ .$$

両辺に -3 を掛けて

$$a^2-3a+\frac{9}{4}\leq 0\ .$$

この不等式の左辺は $a^2-3a+\dfrac{9}{4}=\left(a-\dfrac{3}{2}\right)^2$ なので,

$$\left(a-\frac{3}{2}\right)^2\leq 0\ .$$

よって $a-\dfrac{3}{2}=0$ なので $a=\dfrac{3}{2}$.

例 変数 a に関する不等式 $a-\frac{a^2}{3}\geq\frac{3}{4}$ を解く．不等式 $a-\frac{a^2}{3}\geq\frac{3}{4}$ より

$$-\frac{a^2}{3}+a-\frac{3}{4}\geq 0\ .$$

両辺に -3 を掛けて

$$a^2-3a+\frac{9}{4}\leq 0\ .$$

この不等式の左辺は $a^2-3a+\frac{9}{4}=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2$ なので，

$$\left(a-\frac{3}{2}\right)^2\leq 0\ .$$

よって $a-\frac{3}{2}=0$ なので $a=\frac{3}{2}$ ．故に，与えられた不等式を解くと $a=\frac{3}{2}$ ．

終

$\boxed{問 5.8.5}$ 変数 k に関する不等式 $-3k^2-2k \geq \dfrac{1}{3}$ を解け.

不等式 $-3k^2-2k \geq \dfrac{1}{3}$ より,

問5.8.6 変数 k に関する不等式 $-3k^2-2k \geq \dfrac{1}{3}$ を解け.

不等式 $-3k^2-2k \geq \dfrac{1}{3}$ より,

$$k^2+\frac{2}{3}k+\frac{1}{9} \leq 0 \ ,$$

$$\left(k+\frac{1}{3}\right)^2 \leq 0 \ ,$$

$$k+\frac{1}{3} = 0 \ ,$$

$$k = -\frac{1}{3} \ .$$

終

$\boxed{例}$ 変数 t に関する不等式 $2t - \dfrac{3}{2}t^2 < \dfrac{2}{3}$ を解く.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 t に関する不等式 $2t-\dfrac{3}{2}t^2<\dfrac{2}{3}$ を解く．不等式 $2t-\dfrac{3}{2}t^2<\dfrac{2}{3}$ より

$$-\frac{3}{2}t^2+2t-\frac{2}{3}<0\ .$$

2 次方程式 $-\dfrac{3}{2}t^2+2t-\dfrac{2}{3}=0$ の判別式の値が 0 なので，2 次式を因数分解するタイプである．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 t に関する不等式 $2t - \dfrac{3}{2}t^2 < \dfrac{2}{3}$ を解く．不等式 $2t - \dfrac{3}{2}t^2 < \dfrac{2}{3}$ より

$$-\frac{3}{2}t^2 + 2t - \frac{2}{3} < 0 \ .$$

両辺に $-\dfrac{2}{3}$ を掛けて

$$t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{4}{9} > 0 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 t に関する不等式 $2t - \frac{3}{2}t^2 < \frac{2}{3}$ を解く．不等式 $2t - \frac{3}{2}t^2 < \frac{2}{3}$ より

$$-\frac{3}{2}t^2 + 2t - \frac{2}{3} < 0 \ .$$

両辺に $-\frac{2}{3}$ を掛けて

$$t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{4}{9} > 0 \ .$$

この不等式の左辺は $t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{4}{9} = \left(t - \frac{2}{3}\right)^2$ なので，

$$\left(t - \frac{2}{3}\right)^2 > 0 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 t に関する不等式 $2t - \frac{3}{2}t^2 < \frac{2}{3}$ を解く．不等式 $2t - \frac{3}{2}t^2 < \frac{2}{3}$ より

$$-\frac{3}{2}t^2 + 2t - \frac{2}{3} < 0 \ .$$

両辺に $-\frac{2}{3}$ を掛けて

$$t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{4}{9} > 0 \ .$$

この不等式の左辺は $t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{4}{9} = \left(t - \frac{2}{3}\right)^2$ なので，

$$\left(t - \frac{2}{3}\right)^2 > 0 \ .$$

よって $t - \frac{2}{3} \neq 0$ なので $t \neq \frac{2}{3}$ ．

例 変数 t に関する不等式 $2t-\frac{3}{2}t^2<\frac{2}{3}$ を解く．不等式 $2t-\frac{3}{2}t^2<\frac{2}{3}$ より

$$-\frac{3}{2}t^2+2t-\frac{2}{3}<0\ .$$

両辺に $-\frac{2}{3}$ を掛けて

$$t^2-\frac{4}{3}t+\frac{4}{9}>0\ .$$

この不等式の左辺は $t^2-\frac{4}{3}t+\frac{4}{9}=\left(t-\frac{2}{3}\right)^2$ なので，

$$\left(t-\frac{2}{3}\right)^2>0\ .$$

よって $t-\frac{2}{3}\neq 0$ なので $t\neq\frac{2}{3}$ ．故に，与えられた不等式を解くと $t\neq\frac{2}{3}$ ．

終

$\boxed{\text{問} 5.8.7}$ 変数 y に関する不等式 $y - \frac{3}{5}y^2 < \frac{5}{12}$ を解け.

不等式 $y - \frac{3}{5}y^2 < \frac{5}{12}$ より,

$\boxed{\text{問}5.8.8}$ 変数 y に関する不等式 $y-\dfrac{3}{5}y^2<\dfrac{5}{12}$ を解け.

不等式 $y-\dfrac{3}{5}y^2<\dfrac{5}{12}$ より,

$$-\frac{3}{5}y^2+y-\frac{5}{12}<0\ .$$

$$y^2-\frac{5}{3}y+\frac{25}{36}>0\ ,$$

$$\left(y-\frac{5}{6}\right)^2>0\ ,$$

$$y-\frac{5}{6}\neq 0\ ,$$

$$y\neq\frac{5}{6}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

最後に 2 次不等式の左辺の 2 次式 ax^2+bx+c について $b^2-4ac<0$ のときを扱う.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する以下の 2 次不等式を解く：

$$2x^2 - 8x + 9 < 0\ ,\quad 2x^2 - 8x + 9 \leq 0\ ,\quad 2x^2 - 8x + 9 > 0\ ,\quad 2x^2 - 8x + 9 \geq 0\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する以下の 2 次不等式を解く：

$$2x^2 - 8x + 9 < 0\ , \quad 2x^2 - 8x + 9 \leq 0\ , \quad 2x^2 - 8x + 9 > 0\ , \quad 2x^2 - 8x + 9 \geq 0\ .$$

左辺の 2 次式の x^2 の係数を 1 にするために両辺を 2 で割る：

$$x^2 - 4x + \frac{9}{2} < 0\ , \quad x^2 - 4x + \frac{9}{2} \leq 0\ , \quad x^2 - 4x + \frac{9}{2} > 0\ , \quad x^2 - 4x + \frac{9}{2} \geq 0\ .$$

例 変数 x に関する以下の 2 次不等式を解く：

$$2x^2-8x+9<0\ ,\quad 2x^2-8x+9\leq 0\ ,\quad 2x^2-8x+9>0\ ,\quad 2x^2-8x+9\geq 0\ .$$

左辺の 2 次式の x^2 の係数を 1 にするために両辺を 2 で割る：

$$x^2-4x+\frac{9}{2}<0\ ,\quad x^2-4x+\frac{9}{2}\leq 0\ ,\quad x^2-4x+\frac{9}{2}>0\ ,\quad x^2-4x+\frac{9}{2}\geq 0\ .$$

左辺の 2 次式 $2x^2-4x+\dfrac{9}{2}$ を平方完成する：

$$x^2-4x+\frac{9}{2}=x^2-4x+4-4+\frac{9}{2}=(x-2)^2+\frac{1}{2}\ .$$

例 変数 x に関する以下の 2 次不等式を解く：

$$2x^2-8x+9<0\ ,\quad 2x^2-8x+9\leq 0\ ,\quad 2x^2-8x+9>0\ ,\quad 2x^2-8x+9\geq 0\ .$$

左辺の 2 次式の x^2 の係数を 1 にするために両辺を 2 で割る：

$$x^2-4x+\frac{9}{2}<0\ ,\quad x^2-4x+\frac{9}{2}\leq 0\ ,\quad x^2-4x+\frac{9}{2}>0\ ,\quad x^2-4x+\frac{9}{2}\geq 0\ .$$

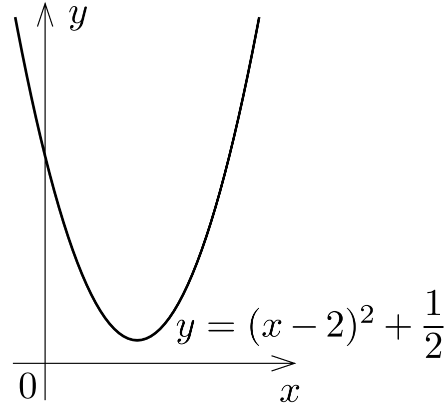
左辺の 2 次式 $2x^2-4x+\frac{9}{2}$ を平方完成する：

$$x^2-4x+\frac{9}{2}=x^2-4x+4-4+\frac{9}{2}=(x-2)^2+\frac{1}{2}\ .$$

x に関する以下の 2 次不等式を解けばよい：

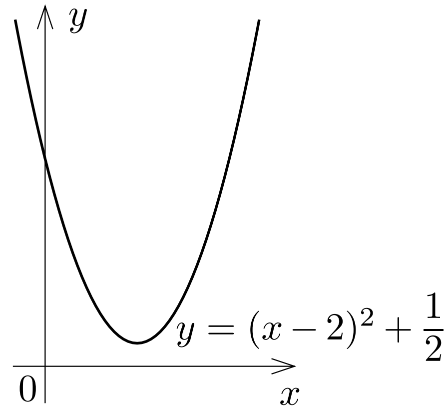
$$(x-2)^2+\frac{1}{2}<0\ ,\quad (x-2)^2+\frac{1}{2}\leq 0\ ,\quad (x-2)^2+\frac{1}{2}>0\ ,\quad (x-2)^2+\frac{1}{2}\geq 0\ .$$

2 次不等式 $(x-2)^2+\dfrac{1}{2}<0$ ，$(x-2)^2+\dfrac{1}{2}\leq 0$ ，$(x-2)^2+\dfrac{1}{2}>0$ ，$(x-2)^2+\dfrac{1}{2}\geq 0$ を解けばよい.



2 次不等式 $(x-2)^2+\dfrac{1}{2}<0$ ， $(x-2)^2+\dfrac{1}{2}\leq 0$ ，
$(x-2)^2+\dfrac{1}{2}>0$ ， $(x-2)^2+\dfrac{1}{2}\geq 0$ を解けばよい.
任意の実数 x について， $(x-2)^2\geq 0$ なので，

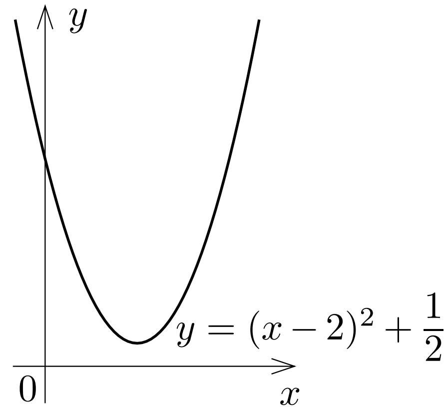
$$(x-2)^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}>0\ .$$



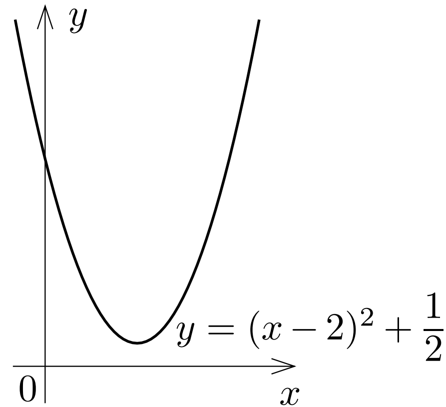
2 次不等式 $(x-2)^2+\frac{1}{2}<0$ ， $(x-2)^2+\frac{1}{2}\leq 0$ ， $(x-2)^2+\frac{1}{2}>0$ ， $(x-2)^2+\frac{1}{2}\geq 0$ を解けばよい.
任意の実数 x について， $(x-2)^2\geq 0$ なので，

$$(x-2)^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}>0 .$$

よって総ての実数が不等式 $(x-2)^2+\frac{1}{2}>0$ の解である.



2 次不等式 $(x-2)^2+\dfrac{1}{2}<0$ ， $(x-2)^2+\dfrac{1}{2}\leq 0$ ，$(x-2)^2+\dfrac{1}{2}>0$ ，$(x-2)^2+\dfrac{1}{2}\geq 0$ を解けばよい.



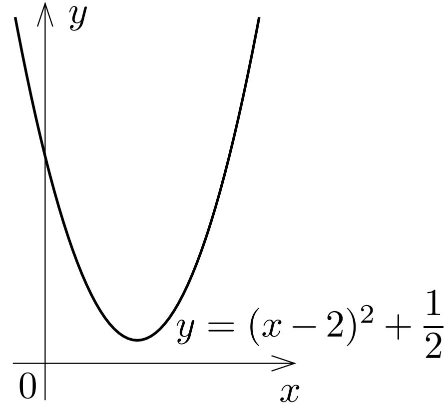
任意の実数 x について， $(x-2)^2\geq 0$ なので，

$$(x-2)^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}>0 .$$

よって総ての実数が不等式 $(x-2)^2+\dfrac{1}{2}>0$ の解である． 任意の実数 x について， $(x-2)^2+\dfrac{1}{2}>0$ なので $(x-2)^2+\dfrac{1}{2}\geq 0$ ；よって総ての実数が不等式 $(x-2)^2+\dfrac{1}{2}\geq 0$ の解である.

2 次不等式 $(x-2)^2+\frac{1}{2}<0$ ， $(x-2)^2+\frac{1}{2}\leq 0$ ，
$(x-2)^2+\frac{1}{2}>0$ ， $(x-2)^2+\frac{1}{2}\geq 0$ を解けばよい.
任意の実数 x について， $(x-2)^2\geq 0$ なので，

$$(x-2)^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}>0 .$$

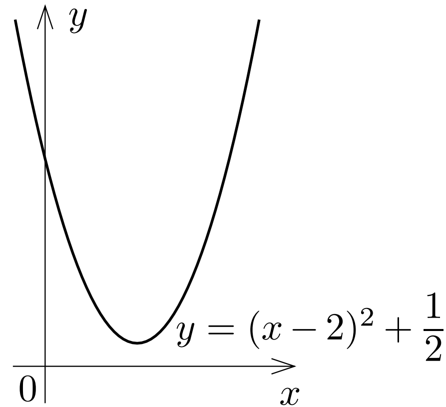


よって総ての実数が不等式 $(x-2)^2+\frac{1}{2}>0$ の解である. 任意の実数 x について， $(x-2)^2+\frac{1}{2}>0$ なので $(x-2)^2+\frac{1}{2}\geq 0$; よって総ての実数が不等式 $(x-2)^2+\frac{1}{2}\geq 0$ の解である. 任意の実数 x について $(x-2)^2+\frac{1}{2}>0$ なので， $(x-2)^2+\frac{1}{2}\leq 0$ である実数 x は無い ; つまり不等式 $(x-2)^2+\frac{1}{2}\leq 0$ の解無い.

2 次不等式 $(x-2)^2+\frac{1}{2}<0$ ，$(x-2)^2+\frac{1}{2}\leq 0$ ，$(x-2)^2+\frac{1}{2}>0$ ，$(x-2)^2+\frac{1}{2}\geq 0$ を解けばよい.

任意の実数 x について，$(x-2)^2\geq 0$ なので，

$$(x-2)^2+\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} > 0 .$$



よって総ての実数が不等式 $(x-2)^2+\frac{1}{2}>0$ の解である．任意の実数 x について，$(x-2)^2+\frac{1}{2}>0$ なので $(x-2)^2+\frac{1}{2}\geq 0$ ；よって総ての実数が不等式 $(x-2)^2+\frac{1}{2}\geq 0$ の解である．任意の実数 x について $(x-2)^2+\frac{1}{2}>0$ なので，$(x-2)^2+\frac{1}{2}\leq 0$ である実数 x は無い；つまり不等式 $(x-2)^2+\frac{1}{2}\leq 0$ の解無い．任意の実数 x について $(x-2)^2+\frac{1}{2}\geq 0$ なので，$(x-2)^2+\frac{1}{2}<0$ である実数 x は無い；つまり不等式 $(x-2)^2+\frac{1}{2}<0$ の解は無い.

終

$\boxed{\text{例}}$ 変数 u に関する不等式 $2u^2 > 6u - 5$ を解く.

$\boxed{例}$ 変数 u に関する不等式 $2u^2 > 6u - 5$ を解く．不等式 $2u^2 > 6u - 5$ より，

$$2u^2 - 6u + 5 > 0 \ ,$$

2 次方程式 $2u^2 - 6u + 5 = 0$ の判別式の値が負なので，2 次式を平方完成するタイプである．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 u に関する不等式 $2u^2 > 6u - 5$ を解く. 不等式 $2u^2 > 6u - 5$ より,

$$2u^2 - 6u + 5 > 0 \ ,$$

$$u^2 - 3u + \frac{5}{2} > 0 \ .$$

$\boxed{例}$ 変数 u に関する不等式 $2u^2 > 6u - 5$ を解く. 不等式 $2u^2 > 6u - 5$ より,

$$2u^2 - 6u + 5 > 0 \ ,$$

$$u^2 - 3u + \frac{5}{2} > 0 \ .$$

左辺の 2 次式を平方完成すると

$$u^2 - 3u + \frac{5}{2} = u^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} u + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{5}{2} = \left(u - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \ ,$$

$\boxed{例}$ 変数 u に関する不等式 $2u^2 > 6u - 5$ を解く．不等式 $2u^2 > 6u - 5$ より，

$$2u^2 - 6u + 5 > 0 \ ,$$

$$u^2 - 3u + \frac{5}{2} > 0 \ .$$

左辺の 2 次式を平方完成すると

$$u^2 - 3u + \frac{5}{2} = u^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} u + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{5}{2} = \left(u - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \ ,$$

よって

$$\left(u - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} > 0 \ .$$

$\boxed{例}$ 変数 u に関する不等式 $2u^2 > 6u - 5$ を解く．不等式 $2u^2 > 6u - 5$ より，

$$2u^2 - 6u + 5 > 0 \ ,$$

$$u^2 - 3u + \frac{5}{2} > 0 \ .$$

左辺の 2 次式を平方完成すると

$$u^2 - 3u + \frac{5}{2} = u^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} u + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{5}{2} = \left(u - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \ ,$$

よって

$$\left(u - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} > 0 \ .$$

任意の実数 u について $\left(u - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} > 0$ ．

例 変数 u に関する不等式 $2u^2 > 6u - 5$ を解く. 不等式 $2u^2 > 6u - 5$ より,

$$2u^2 - 6u + 5 > 0 ,$$

$$u^2 - 3u + \frac{5}{2} > 0 .$$

左辺の 2 次式を平方完成すると

$$u^2 - 3u + \frac{5}{2} = u^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}u + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{5}{2} = \left(u - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} ,$$

よって

$$\left(u - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} > 0 .$$

任意の実数 u について $\left(u - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} > 0$. 故に総ての実数が与えられた不等式の解である. 終

$\boxed{\text{例}}$ 変数 t に関する不等式 $3t^2 \leq -5t - 4$ を解く.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 t に関する不等式 $3t^2 \leq -5t-4$ を解く．不等式 $3t^2 \leq -5t-4$ より，

$$3t^2+5t+4 \leq 0 \ ,$$

2 次方程式 $3t^2+5t+4=0$ の判別式の値が負なので，2 次式を平方完成するタイプである．

例 変数 t に関する不等式 $3t^2 \leq -5t - 4$ を解く．不等式 $3t^2 \leq -5t-4$ より，

$$3t^2 + 5t + 4 \ \leq \ 0 \ ,$$

$$t^2 + \frac{5}{3}t + \frac{4}{3} \ \leq \ 0 \ .$$

$\boxed{例}$ 変数 t に関する不等式 $3t^2 \leq -5t-4$ を解く. 不等式 $3t^2 \leq -5t-4$ より,

$$3t^2+5t+4 \leq 0 ,$$

$$t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{3} \leq 0 .$$

左辺の 2 次式を平方完成すると

$$t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{3} = t^2+2\cdot\frac{5}{6}t+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}+\frac{4}{3} = \left(t+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{36} ,$$

$\boxed{例}$ 変数 t に関する不等式 $3t^2 \leq -5t-4$ を解く．不等式 $3t^2 \leq -5t-4$ より，

$$3t^2+5t+4 \leq 0 \ ,$$

$$t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{3} \leq 0 \ .$$

左辺の 2 次式を平方完成すると

$$t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{3} = t^2+2\cdot\frac{5}{6}t+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}+\frac{4}{3} = \left(t+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{36} \ ,$$

よって

$$\left(t+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{36} \leq 0 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 t に関する不等式 $3t^2 \leq -5t-4$ を解く．不等式 $3t^2 \leq -5t-4$ より，

$$3t^2+5t+4 \leq 0 \ ,$$

$$t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{3} \leq 0 \ .$$

左辺の 2 次式を平方完成すると

$$t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{3} = t^2+2\cdot\frac{5}{6}t+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}+\frac{4}{3} = \left(t+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{36} \ ,$$

よって

$$\left(t+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{36} \leq 0 \ .$$

任意の実数 t について $\left(t+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{36} \geq \frac{23}{36} > 0$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 t に関する不等式 $3t^2 \leq -5t-4$ を解く. 不等式 $3t^2 \leq -5t-4$ より,

$$3t^2+5t+4 \leq 0 \ ,$$

$$t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{3} \leq 0 \ .$$

左辺の 2 次式を平方完成すると

$$t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{3} = t^2+2\cdot\frac{5}{6}t+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}+\frac{4}{3} = \left(t+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{36} \ ,$$

よって

$$\left(t+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{36} \leq 0 \ .$$

任意の実数 t について $\left(t+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{36} \geq \frac{23}{36} > 0$. よって $\left(t+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{36} \leq 0$ である実数 t は無い.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 t に関する不等式 $3t^2 \leq -5t-4$ を解く．不等式 $3t^2 \leq -5t-4$ より，

$$3t^2+5t+4 \leq 0 \ ,$$

$$t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{3} \leq 0 \ .$$

左辺の 2 次式を平方完成すると

$$t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{3} = t^2+2\cdot\frac{5}{6}t+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}+\frac{4}{3} = \left(t+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{36} \ ,$$

よって

$$\left(t+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{36} \leq 0 \ .$$

任意の実数 t について $\left(t+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{36} \geq \frac{23}{36} > 0$ ．よって $\left(t+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{36} \leq 0$ である実数 t は無い．故に与えられた不等式の解は無い． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}5.8.9}$ 変数 x に関する不等式 $\dfrac{2x^2+1}{5} > \dfrac{x}{2}$ を解け.

不等式 $\dfrac{2x^2+1}{5} > \dfrac{x}{2}$ より,

$$\qquad > \qquad ,$$

$$x^2 \qquad\qquad 0 .$$

この不等式の左辺は

$$x^2 \qquad\qquad = x^2 \qquad\qquad = \left(x \qquad \right)^2 \qquad .$$

よって

$$\left(x \qquad \right)^2 \qquad\qquad 0 .$$

任意の実数 x について, $\left(x \qquad \right)^2 \qquad\qquad 0$. 故に

$\boxed{問5.8.9}$ 変数 x に関する不等式 $\dfrac{2x^2+1}{5} > \dfrac{x}{2}$ を解け.

不等式 $\dfrac{2x^2+1}{5} > \dfrac{x}{2}$ より,

$$2x^2+1 > \frac{5}{2}x \ ,$$

$$x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2} > 0 \ .$$

この不等式の左辺は

$$x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2} = x^2 - 2\cdot\frac{5}{8} + \left(\frac{5}{8}\right)^2 - \frac{25}{64} + \frac{1}{2} = \left(x - \frac{5}{8}\right)^2 + \frac{7}{64} \ .$$

よって

$$\left(x - \frac{5}{8}\right)^2 + \frac{7}{64} > 0 \ .$$

任意の実数 x について, $\left(x - \frac{5}{8}\right)^2 + \frac{7}{64} > 0$. 故に総ての実数が与えられた不等式の解である.

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}5.8.10}$ 変数 x に関する不等式 $2(x+1)^2 \le x$ を解け.

不等式 $2(x+1)^2 \le x$ より,

$$\qquad \le \qquad ,$$

$$x^2 \qquad .$$

この不等式の左辺は

$$x^2 \qquad = x^2 \qquad = \left(x \qquad \right)^2 \qquad ,$$

よって

$$\left(x \qquad \right)^2 \qquad 0 \ .$$

任意の実数 x について $\left(x \qquad \right)^2 \qquad 0$, よって $\left(x \qquad \right)^2$

故に

$\boxed{\text{問}5.8.10}$ 変数 x に関する不等式 $2(x+1)^2 \leq x$ を解け.

不等式 $2(x+1)^2 \leq x$ より,

$$2x^2+4x+2 \leq x \ ,$$

$$x^2+\frac{3}{2}x+1 \leq 0 \ .$$

この不等式の左辺は

$$x^2+\frac{3}{2}x+1 = x^2+2\cdot\frac{3}{4}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+1 = \left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{16} \ ,$$

よって

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{16} \leq 0 \ .$$

任意の実数 x について $\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{16} > 0$, よって $\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{16} \leq 0$ である実数 x は無い. 故に与えられた不等式の解は無い. $\boxed{\text{終}}$

定数 a, b, c は実数で $a > 0$ とする. 変数 x に関する 2 次不等式

$$ax^2 + bx + c < 0 \ , \quad ax^2 + bx + c \leq 0 \ , \quad ax^2 + bx + c > 0 \ , \quad ax^2 + bx + c \geq 0$$

の解法をまとめる.

$b^2-4ac>0$ とする．定理 **3.4** により 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ には異なる 2 個の実数解 α,β とがある．2 次式の因数分解の公式（**3.5** 節）により

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta) \ .$$

この因数分解された 2 次式 $a(x-\alpha)(x-\beta)$ の値の符号を調べる． $\alpha<\beta$ とする． $a>0$ とした．

x の値	$x<\alpha$	$x=\alpha$	$\alpha<x<\beta$	$x=\beta$	$\beta<x$
$x-\alpha$ の値の符号	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\beta$ の値の符号	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$a(x-\alpha)(x-\beta)$ の値の符号	$+$	0	$-$	0	$+$

この表から次のことが分かる：実数 a,α,β について， $a>0$ ， $\alpha<\beta$ のとき，

x に関する不等式 $a(x-\alpha)(x-\beta)<0$ を解くと $\alpha<x<\beta$ ，

x に関する不等式 $a(x-\alpha)(x-\beta)\leq 0$ を解くと $\alpha\leq x\leq\beta$ ，

x に関する不等式 $a(x-\alpha)(x-\beta)>0$ を解くと $x<\alpha$ または $x>\beta$ ，

x に関する不等式 $a(x-\alpha)(x-\beta)\geq 0$ を解くと $x\leq\alpha$ または $x\geq\beta$ ．

$b^2-4ac=0$ とする．定理 **3.4** により x に関する 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解 α は実数の重解である．2 次式の因数分解の公式（**3.5** 節）により

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2 \ .$$

$a>0$ なので，総ての実数 x について $a(x-\alpha)^2 \geq 0$ ；従って更に，$a(x-\alpha)^2<0$ である実数 x は無い．よって，

総ての実数が x に関する不等式 $a(x-\alpha)^2 \geq 0$ の解である；

x に関する不等式 $a(x-\alpha)^2<0$ の解は無い．

また，$a>0$ なので，

$$a(x-\alpha)^2 \leq 0 \iff (x-\alpha)^2 \leq 0 \iff x-\alpha = 0 \iff x=\alpha \ ,$$

$$a(x-\alpha)^2 > 0 \iff (x-\alpha)^2 > 0 \iff x-\alpha \neq 0 \iff x\neq\alpha \ ;$$

故に，

x に関する不等式 $a(x-\alpha)^2 \leq 0$ を解くと $x=\alpha$ ，

x に関する不等式 $a(x-\alpha)^2 > 0$ を解くと $x\neq\alpha$ ．

$b^2 - 4ac < 0$ とする．加えて $a > 0$ とする．定理 **5.2** により，

任意の実数 x について　$ax^2 + bx + c > 0$ ，

任意の実数 x について　$ax^2 + bx + c \geq 0$ ；

従ってまた，

$ax^2 + bx + c \leq 0$ となる実数 x は無い，

$ax^2 + bx + c < 0$ となる実数 x は無い．

故に，

総ての実数が x に関する不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ の解である；

総ての実数が x に関する不等式 $ax^2 + bx + c \geq 0$ の解である；

x に関する不等式 $ax^2 + bx + c \leq 0$ の解は無い；

x に関する不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ の解は無い．