

5.10 簡単な有理関数のグラフ

分母分子が整式である分数式と等しくなる式を有理式といった.

分母分子が整式である分数式と等しくなる式を有理式といった．変数 x の関数 y が有理関数であるとは， $y = f(x)$ である式 $f(x)$ が x の有理式になることである．

分母分子が整式である分数式と等しくなる式を有理式といった．変数 x の関数 y が有理関数であるとは， $y = f(x)$ である式 $f(x)$ が x の有理式になることである．例えば，変数 x と y について，

$$y = 3 + \frac{7}{2x+5} \quad , \quad y = \frac{8x+5}{x^2-3x+6} \quad , \quad y = 2x-5 + \frac{6}{3x-1}$$

などであるとき，右辺は x の有理式なので，変数 y は変数 x の有理関数である．

分母分子が整式である分数式と等しくなる式を有理式といった．変数 x の関数 y が有理関数であるとは， $y = f(x)$ である式 $f(x)$ が x の有理式になることである．例えば，変数 x と y について，

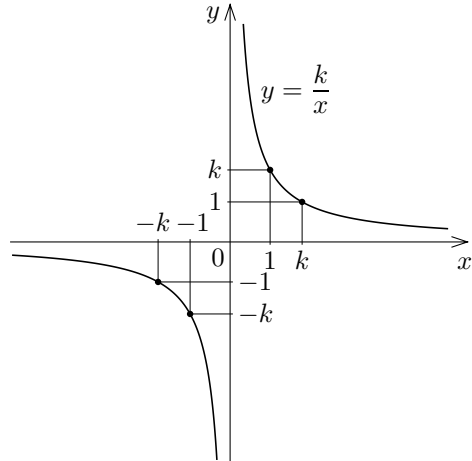
$$y = 3 + \frac{7}{2x+5} \quad , \quad y = \frac{8x+5}{x^2-3x+6} \quad , \quad y = 2x-5 + \frac{6}{3x-1}$$

などであるとき，右辺は x の有理式なので，変数 y は変数 x の有理関数である．整式は有理式なので，有理整関数は有理関数である．

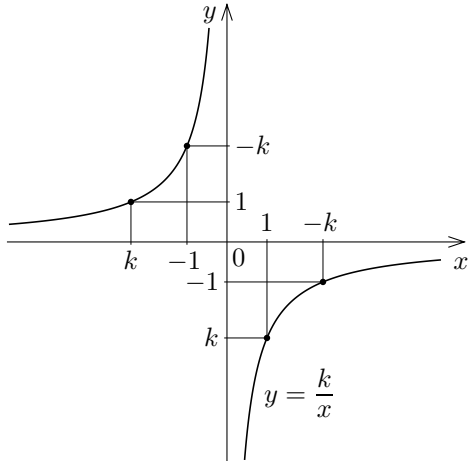
まず, 0 でない定数 k に対して, 変数 x の関数 $y = \frac{k}{x}$ を考える. この関数は反比例といわれる. 次のことに注意すること: $x = 0$ のとき $y = \frac{k}{x}$ の値は無い.

まず, 0 でない定数 k に対して, 変数 x の関数 $y = \frac{k}{x}$ を考える. この関数は反比例といわれる. 次のことに注意すること: $x = 0$ のとき $y = \frac{k}{x}$ の値は無い.

xy 座標平面において, $y = \frac{k}{x}$ のグラフを描く.



$k > 0$ のときの $y = \frac{k}{x}$ のグラフ



$k < 0$ のときの $y = \frac{k}{x}$ のグラフ

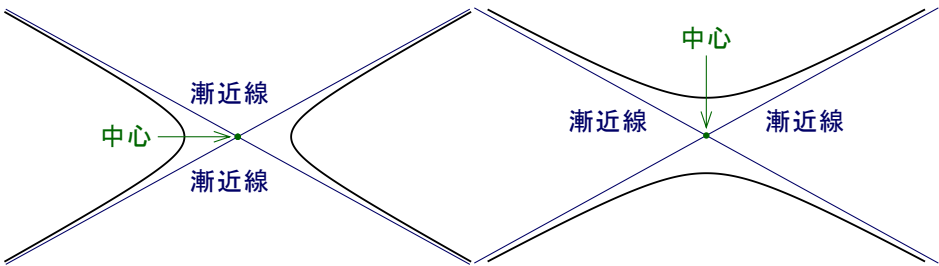
次のことが成り立つ： xy 座標平面において，関数 $y = \frac{k}{x}$ のグラフは，

- (1) 原点に関して対称であり，
- (2) 直線 $y = x$ 及び直線 $y = -x$ に関して対称であり，
- (3) x 軸及び y 軸に限りなく近付いていく．

xy 座標平面における関数 $y = \frac{k}{x}$ のグラフは双曲線とよばれる曲線である.

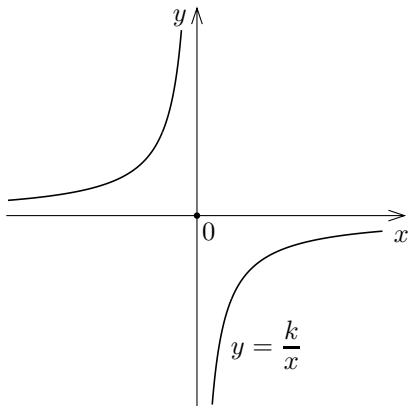
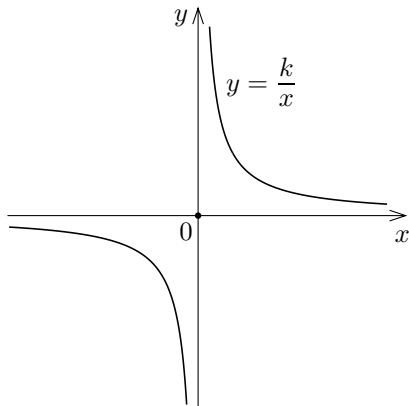
xy 座標平面における関数 $y = \frac{k}{x}$ のグラフは双曲線とよばれる曲線である.

xy 座標平面における関数 $y = \frac{k}{x}$ のグラフは双曲線とよばれる曲線である。一般に、双曲線は離れた 2 本の曲線より成り、どちらの曲線も伸ばしていくと直線に限りなく近付いていく。このような直線をその双曲線の漸近線という。1 組の双曲線に対してその漸近線は 2 本ある。双曲線の 2 本の漸近線の共有点を中心という。

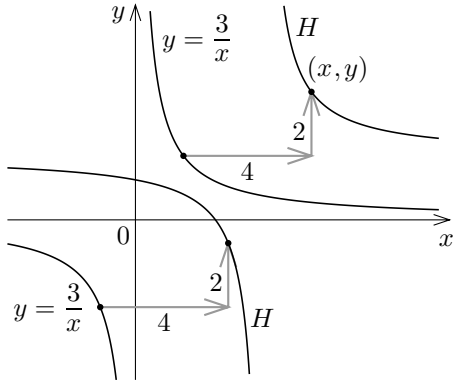


双曲線とその漸近線と中心

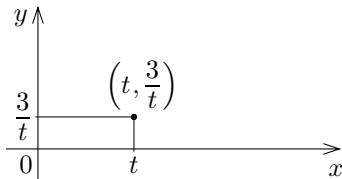
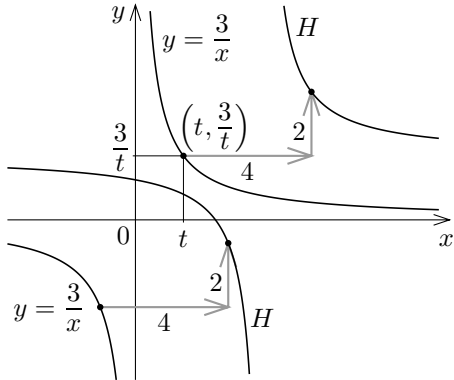
xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = \frac{k}{x}$ のグラフの漸近線は x 軸及び y 軸、つまり直線 $y = 0$ 及び直線 $x = 0$ である。関数 $y = \frac{k}{x}$ のグラフの中心は原点 $(0,0)$ である。



例 xy 座標平面において変数 x の関数 $y = \frac{3}{x}$ のグラフを x の軸の向きに 4 だけ y 座標の向きに 2 だけ平行移動させた双曲線を H とおく.

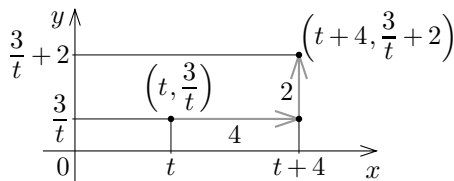
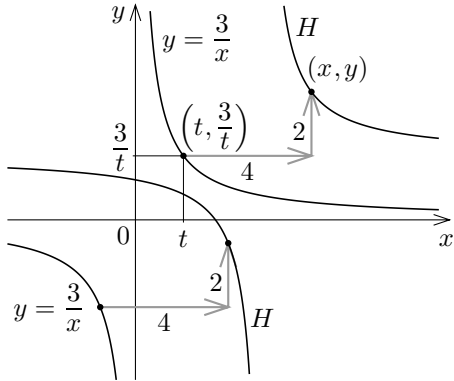


例 xy 座標平面において変数 x の関数 $y = \frac{3}{x}$ のグラフを x の軸の向きに 4 だけ y 座標の向きに 2 だけ平行移動させた双曲線を H とおく. 関数 $y = \frac{3}{x}$ のグラフの点は, x 座標を t とおくと, y 座標は $\frac{3}{t}$ なので $(t, \frac{3}{t})$ である.



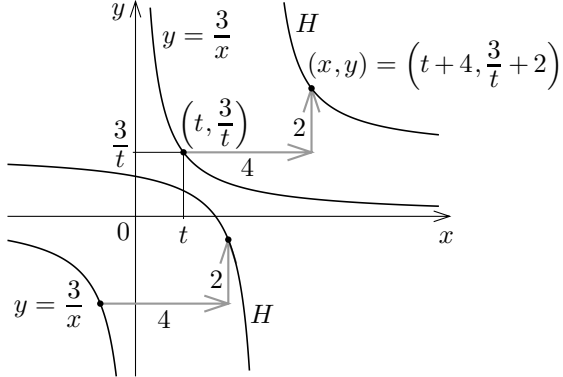
例 xy 座標平面において変数 x の関数 $y = \frac{3}{x}$ のグラフを x の軸の向きに 4 だけ y 座標の向きに 2 だけ平行移動させた双曲線を H とおく. 関数 $y = \frac{3}{x}$ のグラフの点は, x 座標を t とおくと, y 座標は $\frac{3}{t}$ なので $(t, \frac{3}{t})$ である. H の各点 (x, y) は, 元の関数 $y = \frac{3}{x}$ のグラフのある点 $(t, \frac{3}{t})$ を x の軸の向きに 4 だけ y 座標の向きに 2 だけ移動させた点 $(t+4, \frac{3}{t} + 2)$ である;

$$(x, y) = (t+4, \frac{3}{t} + 2).$$



$y = \frac{3}{x}$ のグラフを x の軸の
 向きに 4 だけ y 座標の向きに
 2 だけ平行移動させた双曲線を
 H の各点 (x, y) について、あ
 る実数 t をとると

$$(x, y) = \left(t + 4, \frac{3}{t} + 2\right) .$$

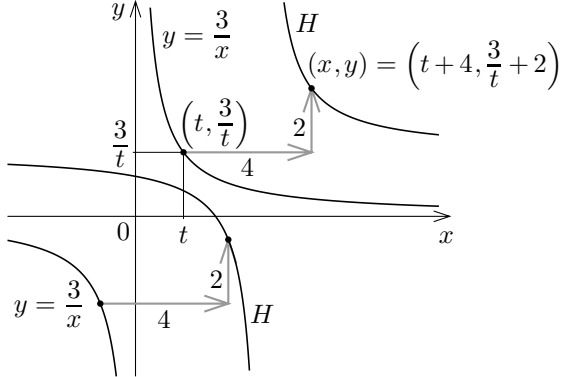


$y = \frac{3}{x}$ のグラフを x の軸の
向きに 4 だけ y 座標の向きに
2 だけ平行移動させた双曲線を
 H の各点 (x, y) について、あ
る実数 t をとると

$$(x, y) = \left(t + 4, \frac{3}{t} + 2\right) .$$

よって

$$x = t + 4 \quad \text{かつ} \quad y = \frac{3}{t} + 2 .$$



$y = \frac{3}{x}$ のグラフを x の軸の
向きに 4 だけ y 座標の向きに
2 だけ平行移動させた双曲線を
 H の各点 (x, y) について、あ
る実数 t をとると

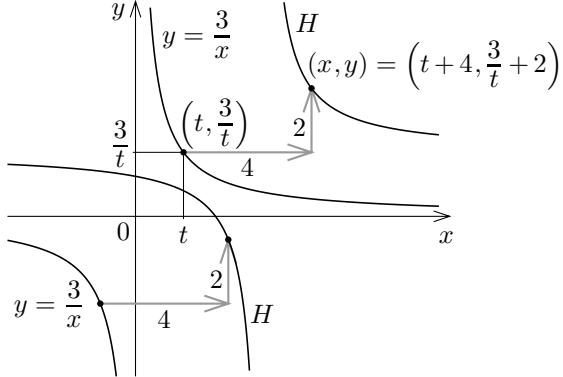
$$(x, y) = \left(t + 4, \frac{3}{t} + 2\right).$$

よって

$$x = t + 4 \quad \text{かつ} \quad y = \frac{3}{t} + 2.$$

等式 $x = t + 4$ より $t = x - 4$, これを等式 $y = \frac{3}{t} + 2$ に代入すると

$$y = \frac{3}{x - 4} + 2.$$

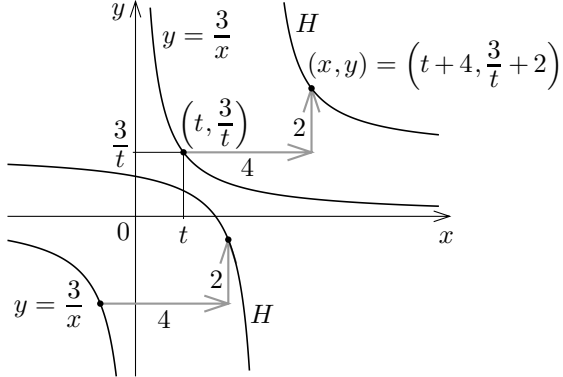


$y = \frac{3}{x}$ のグラフを x の軸の
向きに 4 だけ y 座標の向きに
2 だけ平行移動させた双曲線を
 H の各点 (x, y) について、あ
る実数 t をとると

$$(x, y) = \left(t + 4, \frac{3}{t} + 2\right).$$

よって

$$x = t + 4 \quad \text{かつ} \quad y = \frac{3}{t} + 2.$$



等式 $x = t + 4$ より $t = x - 4$, これを等式 $y = \frac{3}{t} + 2$ に代入すると

$y = \frac{3}{x-4} + 2$. 関数 $y = \frac{3}{x}$ のグラフを x の軸の向きに 4 だけ y 座標の向き

に 2 だけ平行移動させた双曲線 H は関数 $y = \frac{3}{x-4} + 2$ のグラフである. 終

例 xy 座標平面において変数 x の関数 $y = \frac{5}{x}$ のグラフを x の軸の向きに 2 だけ y 軸の向きに 3 だけ平行移動させた双曲線 H をグラフとする関数を表す方程式を導く.

例 xy 座標平面において変数 x の関数 $y = \frac{5}{x}$ のグラフを x の軸の向きに 2 だけ y 軸の向きに 3 だけ平行移動させた双曲線 H をグラフとする関数を表す方程式を導く. H の各点 (x, y) は, 関数 $y = \frac{5}{x}$ のグラフの点 $\left(t, \frac{5}{t}\right)$ (t はある実数) を x の軸の向きに 2 だけ y 軸の向きに 3 だけ平行移動させた点 $\left(t+2, \frac{5}{t}+3\right)$ なので, $(x, y) = \left(t+2, \frac{5}{t}+3\right)$.

例 xy 座標平面において変数 x の関数 $y = \frac{5}{x}$ のグラフを x の軸の向きに 2 だけ y 軸の向きに 3 だけ平行移動させた双曲線 H をグラフとする関数を表す方程式を導く. H の各点 (x, y) は, 関数 $y = \frac{5}{x}$ のグラフの点 $\left(t, \frac{5}{t}\right)$ (t はある実数) を x の軸の向きに 2 だけ y 軸の向きに 3 だけ平行移動させた点 $\left(t+2, \frac{5}{t}+3\right)$ なので, $(x, y) = \left(t+2, \frac{5}{t}+3\right)$. よって

$$x = t+2 \quad \text{かつ} \quad y = \frac{5}{t}+3 .$$

例 xy 座標平面において変数 x の関数 $y = \frac{5}{x}$ のグラフを x の軸の向きに 2 だけ y 軸の向きに 3 だけ平行移動させた双曲線 H をグラフとする関数を表す方程式を導く. H の各点 (x, y) は, 関数 $y = \frac{5}{x}$ のグラフの点 $\left(t, \frac{5}{t}\right)$ (t はある実数) を x の軸の向きに 2 だけ y 軸の向きに 3 だけ平行移動させた点 $\left(t+2, \frac{5}{t}+3\right)$ なので, $(x, y) = \left(t+2, \frac{5}{t}+3\right)$. よって

$$x = t + 2 \quad \text{かつ} \quad y = \frac{5}{t} + 3 .$$

$$x = t + 2 \quad \text{より} \quad t = x - 2 \quad \text{なので,} \quad y = \frac{5}{t} + 3 = \frac{5}{x-2} + 3 .$$

例 xy 座標平面において変数 x の関数 $y = \frac{5}{x}$ のグラフを x の軸の向きに 2 だけ y 軸の向きに 3 だけ平行移動させた双曲線 H をグラフとする関数を表す方程式を導く. H の各点 (x, y) は, 関数 $y = \frac{5}{x}$ のグラフの点 $\left(t, \frac{5}{t}\right)$ (t はある実数) を x の軸の向きに 2 だけ y 軸の向きに 3 だけ平行移動させた点 $\left(t+2, \frac{5}{t}+3\right)$ なので, $(x, y) = \left(t+2, \frac{5}{t}+3\right)$. よって

$$x = t + 2 \quad \text{かつ} \quad y = \frac{5}{t} + 3.$$

$x = t + 2$ より $t = x - 2$ なので, $y = \frac{5}{t} + 3 = \frac{5}{x-2} + 3$. 故に H をグラフとする関数は $y = 3 + \frac{5}{x-2}$ である. **終**

問5.10.1 xy 座標平面において変数 x の関数 $y = \frac{2}{x}$ のグラフを x の軸の向きに -3 だけ y 軸の向きに -4 だけ平行移動させた双曲線 H をグラフとする関数を表わす方程式を導け（導く過程を記せ）.

H の各点 (x, y) は, 関数 $y = \frac{2}{x}$ のグラフの点 $\left(t, \quad\right)$ (t はある実数) を x の軸の向きに -3 だけ y 軸の向きに -4 だけ平行移動させた点 $\left(\quad, \quad\right)$ なので, $(x, y) = \left(\quad, \quad\right)$. $x = \quad$ より $t = \quad$ なので, $y = \quad = \quad$. 故に H をグラフとする関数は $y = -$ である.

問5.10.1 xy 座標平面において変数 x の関数 $y = \frac{2}{x}$ のグラフを x の軸の向きに -3 だけ y 軸の向きに -4 だけ平行移動させた双曲線 H をグラフとする関数を表わす方程式を導け（導く過程を記せ）.

H の各点 (x, y) は, 関数 $y = \frac{2}{x}$ のグラフの点 $\left(t, \frac{2}{t}\right)$ (t はある実数) を x の軸の向きに -3 だけ y 軸の向きに -4 だけ平行移動させた点 $\left(t-3, \frac{2}{t}-4\right)$ なので, $(x, y) = \left(t-3, \frac{2}{t}-4\right)$. $x = t-3$ より $t = x+3$ なので, $y = \frac{2}{t} - 4 = \frac{2}{x+3} - 4$. 故に H をグラフとする関数は $y = -4 + \frac{2}{x+3}$ である.

終

一般的に述べる．定数 k, p, q ($k \neq 0$) に対し, xy 座標平面において, 変数 x の関数 $y = \frac{k}{x}$ のグラフを x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた双曲線を H とおく．

一般的に述べる. 定数 k, p, q ($k \neq 0$) に対し, xy 座標平面において, 変数 x の関数 $y = \frac{k}{x}$ のグラフを x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた双曲線を H とおく. H の各点 (x, y) は $y = \frac{k}{x}$ のグラフの点 $\left(t, \frac{k}{t}\right)$ (t はある実数) を x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ移動させた点 $\left(t-p, \frac{k}{t} + q\right)$ なので, $(x, y) = \left(t-p, \frac{k}{t} + q\right)$.

一般的に述べる．定数 k, p, q ($k \neq 0$) に対し, xy 座標平面において, 変数 x の関数 $y = \frac{k}{x}$ のグラフを x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた双曲線を H とおく． H の各点 (x, y) は $y = \frac{k}{x}$ のグラフの点 $\left(t, \frac{k}{t}\right)$ (t はある実数) を x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ移動させた点 $\left(t-p, \frac{k}{t} + q\right)$ なので, $(x, y) = \left(t-p, \frac{k}{t} + q\right)$. $x = t-p$ より $t = x+p$ なので,

$$y = \frac{k}{t} + q = \frac{k}{x+p} + q .$$

一般的に述べる. 定数 k, p, q ($k \neq 0$) に対し, xy 座標平面において, 変数 x の関数 $y = \frac{k}{x}$ のグラフを x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた双曲線を H とおく. H の各点 (x, y) は $y = \frac{k}{x}$ のグラフの点 $(t, \frac{k}{t})$ (t はある実数) を x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ移動させた点 $(t-p, \frac{k}{t} + q)$ なので, $(x, y) = (t-p, \frac{k}{t} + q)$. $x = t-p$ より $t = x+p$ なので,

$$y = \frac{k}{t} + q = \frac{k}{x+p} + q .$$

双曲線 H は方程式 $y = \frac{k}{x+p} + q$ で表される.

一般的に述べる. 定数 k, p, q ($k \neq 0$) に対し, xy 座標平面において, 変数 x の関数 $y = \frac{k}{x}$ のグラフを x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた双曲線を H とおく. H の各点 (x, y) は $y = \frac{k}{x}$ のグラフの点 $(t, \frac{k}{t})$ (t はある実数) を x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ移動させた点 $(t-p, \frac{k}{t} + q)$ なので, $(x, y) = (t-p, \frac{k}{t} + q)$. $x = t-p$ より $t = x+p$ なので,

$$y = \frac{k}{t} + q = \frac{k}{x+p} + q .$$

双曲線 H は方程式 $y = \frac{k}{x+p} + q$ で表される. 故に, 変数 x の関数

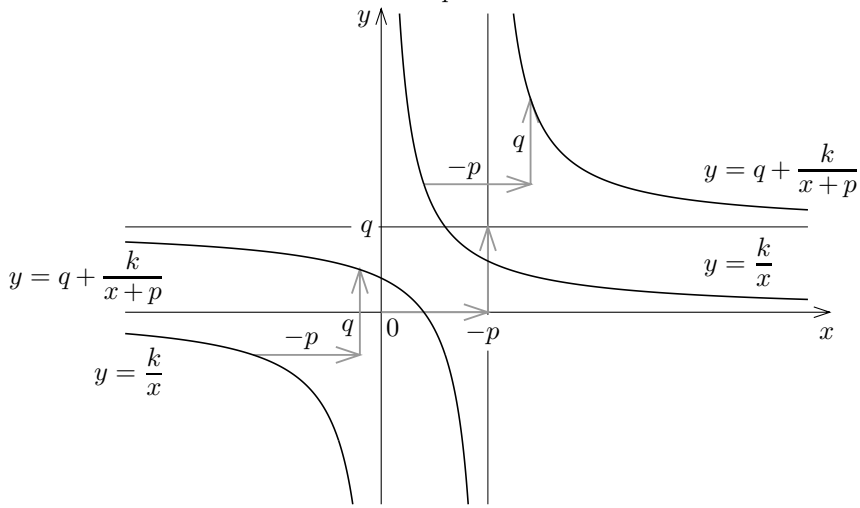
$y = \frac{k}{x+p} + q$ のグラフは, 関数 $y = \frac{k}{x}$ のグラフを x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた双曲線である.

変数 x の関数 $y = \frac{k}{x+p} + q$ のグラフは、関数 $y = \frac{k}{x}$ のグラフを x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた双曲線である.

変数 x の関数 $y = \frac{k}{x+p} + q$ のグラフは、関数 $y = \frac{k}{x}$ のグラフを x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた双曲線である．関数 $y = \frac{k}{x+p} + q$ のグラフの中心は、関数 $y = \frac{k}{x}$ のグラフの中心 $(0,0)$ を x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた点 $(-p, q)$ である．

変数 x の関数 $y = \frac{k}{x+p} + q$ のグラフは、関数 $y = \frac{k}{x}$ のグラフを x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた双曲線である．関数 $y = \frac{k}{x+p} + q$ のグラフの中心は、関数 $y = \frac{k}{x}$ のグラフの中心 $(0,0)$ を x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた点 $(-p, q)$ である．その漸近線は方程式 $x = -p$ で表される直線と方程式 $y = q$ で表される直線とである．

xy 座標平面における関数 $y = \frac{k}{x+p} + q$ のグラフは以下のようなになる.



[定理 5.10] 定数 k, p, q ($k \neq 0$) に対し, xy 座標平面において, 変数 x の関数 $y = q + \frac{k}{x+p}$ のグラフは, x の関数 $y = \frac{k}{x}$ のグラフを x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた双曲線である; その漸近線は直線 $x = -p$ と $y = q$ とである.

例 xy 座標平面において変数 x の関数 $y = \frac{3}{x}$ のグラフを直線 $x = -4$ と直線 $y = 5$ とが漸近線になるように平行移動させた双曲線 H をグラフとする関数を表す方程式を導く.

例 xy 座標平面において変数 x の関数 $y = \frac{3}{x}$ のグラフを直線 $x = -4$ と直線 $y = 5$ とが漸近線になるように平行移動させた双曲線 H をグラフとする関数を表す方程式を導く. 関数 $y = \frac{3}{x}$ のグラフの漸近線である直線 $x = 0$ と直線 $y = 0$ とがそれぞれ直線 $x = -4$ と直線 $y = 5$ とに移動する平行移動で, 各点は x の軸の向きに -4 だけ y 軸の向きに 5 だけ平行移動する.

例 xy 座標平面において変数 x の関数 $y = \frac{3}{x}$ のグラフを直線 $x = -4$ と直線 $y = 5$ とが漸近線になるように平行移動させた双曲線 H をグラフとする関数を表す方程式を導く. 関数 $y = \frac{3}{x}$ のグラフの漸近線である直線 $x = 0$ と直線 $y = 0$ とがそれぞれ直線 $x = -4$ と直線 $y = 5$ とに移動する平行移動で, 各点は x の軸の向きに -4 だけ y 軸の向きに 5 だけ平行移動する. H の各点 (x, y) は, 関数 $y = \frac{3}{x}$ のグラフの点 $\left(t, \frac{3}{t}\right)$ (t はある実数) を x の軸の向きに -4 だけ y 軸の向きに 5 だけ平行移動させた点 $\left(t-4, \frac{3}{t}+5\right)$ である: $(x, y) = \left(t-4, \frac{3}{t}+5\right)$.

例 xy 座標平面において変数 x の関数 $y = \frac{3}{x}$ のグラフを直線 $x = -4$ と直線 $y = 5$ とが漸近線になるように平行移動させた双曲線 H をグラフとする関数を表す方程式を導く. 関数 $y = \frac{3}{x}$ のグラフの漸近線である直線 $x = 0$ と直線 $y = 0$ とがそれぞれ直線 $x = -4$ と直線 $y = 5$ とに移動する平行移動で, 各点は x の軸の向きに -4 だけ y 軸の向きに 5 だけ平行移動する. H の各点 (x, y) は, 関数 $y = \frac{3}{x}$ のグラフの点 $\left(t, \frac{3}{t}\right)$ (t はある実数) を x の軸の向きに -4 だけ y 軸の向きに 5 だけ平行移動させた点 $\left(t-4, \frac{3}{t}+5\right)$ である: $(x, y) = \left(t-4, \frac{3}{t}+5\right)$. $x = t-4$ より $t = x+4$ なので, $y = \frac{3}{t}+5 = \frac{3}{x+4}+5$. 故に H をグラフとする関数は $y = 5 + \frac{3}{x+4}$ である.

終

問5.10.2 xy 座標平面において変数 x の関数 $y = \frac{4}{x}$ のグラフを直線 $x = 3$ と直線 $y = -2$ とが漸近線になるように平行移動させた双曲線 H をグラフとする関数を表わす方程式を導け（導く過程を記せ）.

関数 $y = \frac{4}{x}$ のグラフの漸近線である直線 $x = 0$ と直線 $y = 0$ とがそれぞれ直線 $x = 3$ と直線 $y = -2$ とに移動する平行移動で、各点は x の軸の向きに だけ y 軸の向きに だけ平行移動する. H の各点 (x, y) は、関数 $y = \frac{4}{x}$ のグラフの点 $\left(t, \quad\right)$ (t はある実数) を x の軸の向きに 3 だけ y 座標の向きに -2 だけ平行移動させた点 $\left(\quad, \quad\right)$ である:
 $(x, y) = \left(\quad, \quad\right)$. $x = \quad$ なので $t = \quad$; $y = \quad$ なので
 $y = \quad$. 故に H をグラフとする関数は $y = \quad$ である.

問5.10.2 xy 座標平面において変数 x の関数 $y = \frac{4}{x}$ のグラフを直線 $x = 3$ と直線 $y = -2$ とが漸近線になるように平行移動させた双曲線 H をグラフとする関数を表わす方程式を導け（導く過程を記せ）.

関数 $y = \frac{4}{x}$ のグラフの漸近線である直線 $x = 0$ と直線 $y = 0$ とがそれぞれ直線 $x = 3$ と直線 $y = -2$ とに移動する平行移動で、各点は x の軸の向きに 3 だけ y 軸の向きに -2 だけ平行移動する. H の各点 (x, y) は、関数 $y = \frac{4}{x}$ のグラフの点 $\left(t, \frac{4}{t}\right)$ (t はある実数) を x の軸の向きに 3 だけ y 座標の向きに -2 だけ平行移動させた点 $\left(t+3, \frac{4}{t}-2\right)$ である：
 $(x, y) = \left(t+3, \frac{4}{t}-2\right)$. $x = t+3$ なので $t = x-3$; $y = \frac{4}{t}-2$ なので
 $y = \frac{4}{x-3}-2$. 故に H をグラフとする関数は $y = -2 + \frac{4}{x-3}$ である. 終

例 変数 x の関数 $y = \frac{4x + 16}{2x + 5}$ のグラフを考える.

例 変数 x の関数 $y = \frac{4x+16}{2x+5}$ のグラフを考える. 分数式 $\frac{4x+16}{2x+5}$ の分子 $4x+16$ を分母 $2x+5$ で割ると整商は 2 で剰余は 6 なので,
 $4x+16 = 2(2x+5) + 6$.

例 変数 x の関数 $y = \frac{4x+16}{2x+5}$ のグラフを考える. 分数式 $\frac{4x+16}{2x+5}$ の分子 $4x+16$ を分母 $2x+5$ で割ると整商は 2 で剰余は 6 なので,
 $4x+16 = 2(2x+5) + 6$. よって

$$\frac{4x+16}{2x+5} = \frac{2(2x+5) + 6}{2x+5} = 2 + \frac{6}{2x+5} = 2 + \frac{3}{x + \frac{5}{2}} .$$

例 変数 x の関数 $y = \frac{4x+16}{2x+5}$ のグラフを考える. 分数式 $\frac{4x+16}{2x+5}$ の分子 $4x+16$ を分母 $2x+5$ で割ると整商は 2 で剰余は 6 なので,
 $4x+16 = 2(2x+5) + 6$. よって

$$\frac{4x+16}{2x+5} = \frac{2(2x+5)+6}{2x+5} = 2 + \frac{6}{2x+5} = 2 + \frac{3}{x+\frac{5}{2}} .$$

従って, 関数を表す方程式 $y = \frac{4x+16}{2x+5}$ は次のように同値変形できる:

$$y = 2 + \frac{3}{x+\frac{5}{2}} .$$

例 変数 x の関数 $y = \frac{4x+16}{2x+5}$ のグラフを考える. 分数式 $\frac{4x+16}{2x+5}$ の分子 $4x+16$ を分母 $2x+5$ で割ると整商は 2 で剰余は 6 なので,
 $4x+16 = 2(2x+5) + 6$. よって

$$\frac{4x+16}{2x+5} = \frac{2(2x+5)+6}{2x+5} = 2 + \frac{6}{2x+5} = 2 + \frac{3}{x+\frac{5}{2}} .$$

従って, 関数を表す方程式 $y = \frac{4x+16}{2x+5}$ は次のように同値変形できる:

$$y = 2 + \frac{3}{x+\frac{5}{2}} .$$

xy 座標平面において, この関数のグラフは, 関数 $y = \frac{3}{x}$ のグラフを x 軸の向きに $-\frac{5}{2}$ だけ y 軸の向きに 2 だけ平行移動させた双曲線であり, その漸近線は直線 $x = -\frac{5}{2}$ と $y = 2$ とである.

終

一般的に，関数を表す式 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ （ a, b, c, d は定数で $c \neq 0$ ） は，

$y = q + \frac{k}{x+p}$ （ k, p, q は定数） の形に同値変形することでグラフの概形を調べることができる．

例 xy 座標平面において変数 x の関数 $y = \frac{3x - 12}{x - 2}$ のグラフの漸近線

を求めてグラフの概形を描く.

例 xy 座標平面において変数 x の関数 $y = \frac{3x-12}{x-2}$ のグラフの漸近線

を求めてグラフの概形を描く. 関数 $y = \frac{3x-12}{x-2}$ について, 右辺の分子 $3x-12$ を右辺の分母 $x-2$ で割ると整商は 3 で剰余は -6 なので $3x-12 = 3(x-2) - 6$; よって

$$y = \frac{3x-12}{x-2} = \frac{3(x-2)-6}{x-2} = 3 - \frac{6}{x-2} .$$

例 xy 座標平面において変数 x の関数 $y = \frac{3x-12}{x-2}$ のグラフの漸近線

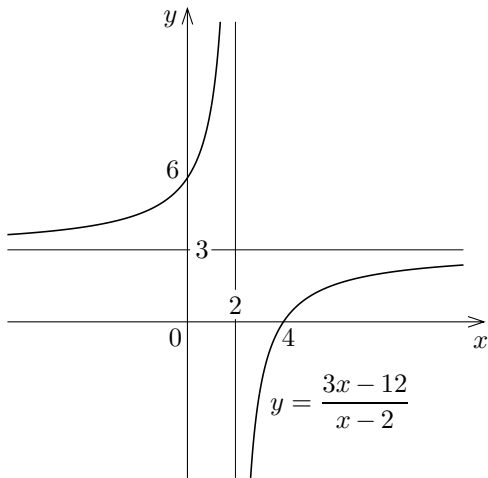
を求めてグラフの概形を描く. 関数 $y = \frac{3x-12}{x-2}$ について, 右辺の分子 $3x-12$ を右辺の分母 $x-2$ で割ると整商は 3 で剰余は -6 なので

$3x-12 = 3(x-2) - 6$; よって

$$y = \frac{3x-12}{x-2} = \frac{3(x-2)-6}{x-2} = 3 - \frac{6}{x-2} .$$

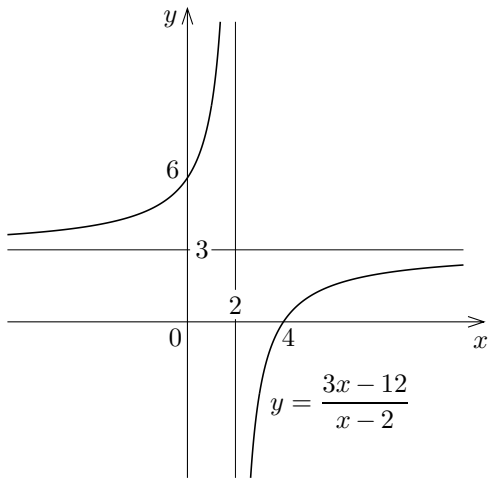
グラフは関数 $y = -\frac{6}{x}$ のグラフを x 軸の向きに 2 だけ y 軸の向きに 3 だけ平行移動させた双曲線であり, その漸近線は直線 $x=2$ と $y=3$ とである.

関数 $3 - \frac{6}{x-2}$ のグラフは直線 $x = 2$ と直線 $y = 3$ とを漸近線とする双曲線である.



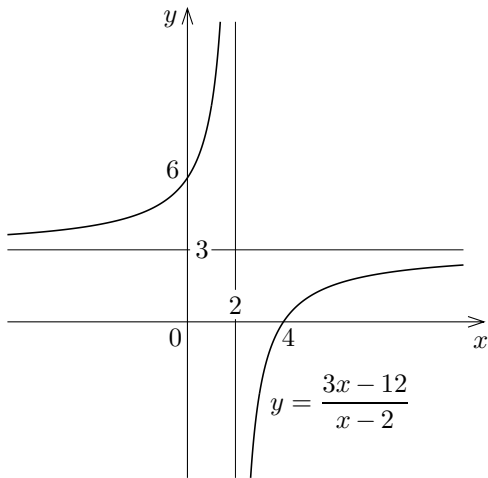
関数 $3 - \frac{6}{x-2}$ のグラフは直線 $x = 2$ と直線 $y = 3$ とを漸近線とする双曲線である.

関数 $y = \frac{3x-12}{x-2}$ について,
 $y = 0$ とすると, $\frac{3x-12}{x-2} = 0$,
 $3x-12 = 0$, $x = 4$; このとき
分母は 0 にならない.



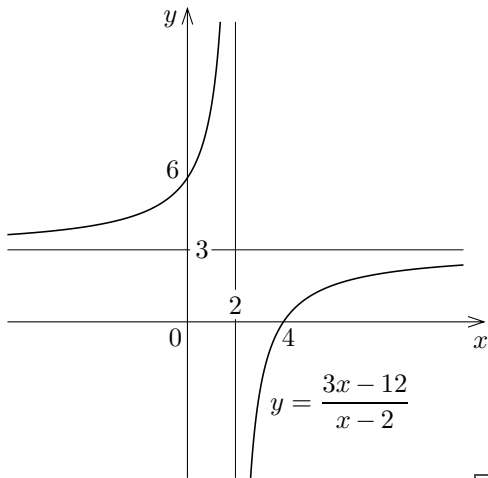
関数 $3 - \frac{6}{x-2}$ のグラフは直線 $x=2$ と直線 $y=3$ とを漸近線とする双曲線である.

関数 $y = \frac{3x-12}{x-2}$ について,
 $y=0$ とすると. $\frac{3x-12}{x-2} = 0$,
 $3x-12=0$, $x=4$; このとき
分母は 0 にならない. グラフと
 x 軸との共有点は $(4,0)$ である.



関数 $3 - \frac{6}{x-2}$ のグラフは直線 $x=2$ と直線 $y=3$ とを漸近線とする双曲線である.

関数 $y = \frac{3x-12}{x-2}$ について,
 $y=0$ とすると, $\frac{3x-12}{x-2} = 0$,
 $3x-12=0$, $x=4$; このとき
分母は 0 にならない. グラフと
 x 軸との共有点は $(4,0)$ である.
また, $x=0$ とすると $y=6$
なので, グラフと y 軸との共有
点は $(0,6)$ である.



問5.10.3 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = \frac{2x-10}{x-3}$ のグラフの漸近線を求めてグラフの概形を描け.

関数 $y = \frac{2x-10}{x-3}$ について,

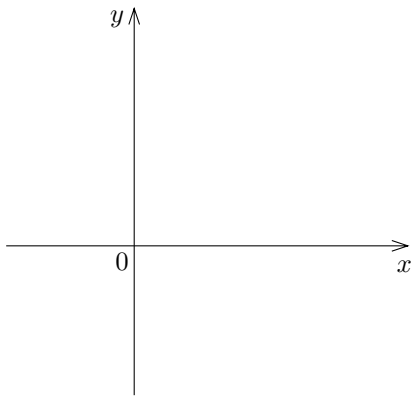
$$y = \frac{2x-10}{x-3} = \frac{(x-3)}{x-3} = \frac{\quad}{x-3} .$$

グラフは、直線 $x = \quad$ と直線 $y = \quad$ とを漸近線とする双曲線である.

$$y = 0 \text{ とすると, } \frac{2x-10}{x-3} = 0 , \\ = 0 , \quad x = \quad ; \text{このとき分母は } 0$$

にならない. グラフと x 軸との共有点は $(\quad, 0)$ である. $x = 0$ とすると $y = \quad$.

グラフと y 軸との共有点は $(0, \quad)$ である.



問5.10.3 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = \frac{2x-10}{x-3}$ のグラフの漸近線を求めてグラフの概形を描け.

関数 $y = \frac{2x-10}{x-3}$ について,

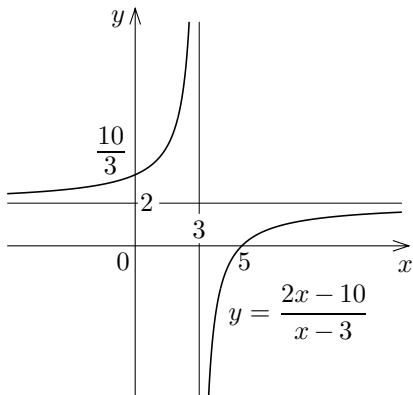
$$y = \frac{2x-10}{x-3} = \frac{2(x-3)-4}{x-3} = 2 - \frac{4}{x-3}.$$

グラフは、直線 $x=3$ と直線 $y=2$ とを漸近線とする双曲線である.

$$y=0 \text{ とすると, } \frac{2x-10}{x-3} = 0,$$

$2x-10=0$, $x=5$; このとき分母は 0 にならない. グラフと x 軸との共有点は $(5,0)$ である. $x=0$ とすると $y = \frac{10}{3}$.

グラフと y 軸との共有点は $(0, \frac{10}{3})$ である.



例 xy 座標平面において，変数 x の関数 $y = \frac{3x + 11}{2x + 4}$ のグラフの漸近

線を求めてグラフの概形を描く．

例 xy 座標平面において，変数 x の関数 $y = \frac{3x+11}{2x+4}$ のグラフの漸近線を求めてグラフの概形を描く．関数 $y = \frac{3x+11}{2x+4}$ について，左辺の分子 $3x+11$ を左辺の分母 $2x+4$ で割ると整商は $\frac{3}{2}$ で剰余は 5 なので

$$3x+11 = \frac{3}{2}(2x+4) + 5 \quad ;$$

例 xy 座標平面において，変数 x の関数 $y = \frac{3x+11}{2x+4}$ のグラフの漸近線を求めてグラフの概形を描く．関数 $y = \frac{3x+11}{2x+4}$ について，左辺の分子 $3x+11$ を左辺の分母 $2x+4$ で割ると整商は $\frac{3}{2}$ で剰余は 5 なので $3x+11 = \frac{3}{2}(2x+4) + 5$ ； よって，

$$y = \frac{3x+11}{2x+4} = \frac{\frac{3}{2}(2x+4) + 5}{2x+4} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2x+4} = \frac{3}{2} + \frac{\frac{5}{2}}{x+2} .$$

例 xy 座標平面において，変数 x の関数 $y = \frac{3x+11}{2x+4}$ のグラフの漸近線を求めてグラフの概形を描く．関数 $y = \frac{3x+11}{2x+4}$ について，左辺の分子 $3x+11$ を左辺の分母 $2x+4$ で割ると整商は $\frac{3}{2}$ で剰余は 5 なので $3x+11 = \frac{3}{2}(2x+4) + 5$ ；よって，

$$y = \frac{3x+11}{2x+4} = \frac{\frac{3}{2}(2x+4) + 5}{2x+4} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2x+4} = \frac{3}{2} + \frac{\frac{5}{2}}{x+2} .$$

グラフは関数 $y = \frac{5}{2x}$ のグラフを x 軸の向きに -2 だけ y 軸の向きに $\frac{3}{2}$ だけ平行移動させた双曲線であり，その漸近線は直線 $x = -2$ と直線 $y = \frac{3}{2}$ である．

関数 $y = \frac{3x + 11}{2x + 4}$ について,
グラフは直線 $x = -2$ と直線
 $y = \frac{3}{2}$ とを漸近線とする双曲
線である.

関数 $y = \frac{3x+11}{2x+4}$ について,

グラフは直線 $x = -2$ と直線
 $y = \frac{3}{2}$ とを漸近線とする双曲

線である. $y = 0$ とすると,

$$\frac{3x+11}{2x+4} = 0, \quad 3x+11 = 0,$$

$$x = -\frac{11}{3}; \text{このとき分母は } 0 \text{ に}$$

ならない.

関数 $y = \frac{3x+11}{2x+4}$ について,

グラフは直線 $x = -2$ と直線
 $y = \frac{3}{2}$ とを漸近線とする双曲

線である. $y = 0$ とすると,

$$\frac{3x+11}{2x+4} = 0, \quad 3x+11 = 0,$$

$x = -\frac{11}{3}$; このとき分母は 0 に

ならない. グラフと x 軸との共

有点は $\left(-\frac{11}{3}, 0\right)$ である.

関数 $y = \frac{3x+11}{2x+4}$ について,

グラフは直線 $x = -2$ と直線 $y = \frac{3}{2}$ とを漸近線とする双曲

線である. $y = 0$ とすると,

$$\frac{3x+11}{2x+4} = 0, \quad 3x+11 = 0,$$

$x = -\frac{11}{3}$; このとき分母は 0 に

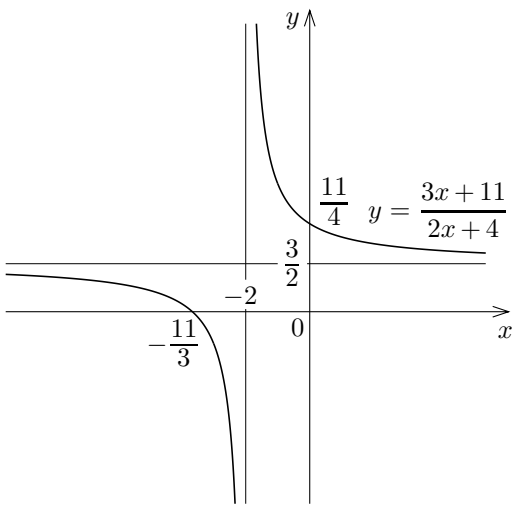
ならない. グラフと x 軸との共有点は $\left(-\frac{11}{3}, 0\right)$ である. $x = 0$

とすると $y = \frac{11}{4}$ なので, グラ

フと y 軸との共有点は $\left(0, \frac{11}{4}\right)$

である.

関数 $y = \frac{3x+11}{2x+4}$ について、
 グラフは直線 $x = -2$ と直線 $y = \frac{3}{2}$ とを漸近線とする双曲線である。 $y = 0$ とすると、
 $\frac{3x+11}{2x+4} = 0$, $3x+11 = 0$,
 $x = -\frac{11}{3}$; このとき分母は 0 にならない。 グラフと x 軸との共有点は $(-\frac{11}{3}, 0)$ である。 $x = 0$ とすると $y = \frac{11}{4}$ なので、グラフと y 軸との共有点は $(0, \frac{11}{4})$ である。



問5.10.4 xy 座標平面において, 変数 x の関数 $y = \frac{5x+22}{2x+6}$ のグラフの漸近線を求めてグラフの概形を描け.

関数 $y = \frac{5x+22}{2x+6}$ について,

$$y = \frac{5x+22}{2x+6} = \frac{(2x+6) +}{2x+6} = \quad + \frac{\quad}{2(x+3)} = \quad + \frac{\quad}{x+3} .$$

グラフは直線 $x = -3$ と $y = \frac{5}{2}$ とを漸近線とする双曲線である.

問5.10.4 xy 座標平面において, 変数 x の関数 $y = \frac{5x+22}{2x+6}$ のグラフの漸近線を求めてグラフの概形を描け.

関数 $y = \frac{5x+22}{2x+6}$ について,

$$y = \frac{5x+22}{2x+6} = \frac{\frac{5}{2}(2x+6) + 7}{2x+6} = \frac{5}{2} + \frac{7}{2(x+3)} = \frac{5}{2} + \frac{\frac{7}{2}}{x+3} .$$

グラフは直線 $x = -3$ と $y = \frac{5}{2}$ とを漸近線とする双曲線である.

$y = 0$ とすると, $\frac{5x+22}{2x+6} = 0$,

よって $x = -\frac{22}{5}$; このとき分母は 0 にならない. グラフと x 軸との共有点は $(-\frac{22}{5}, 0)$ である.

$x = 0$ とすると $y = \frac{11}{3}$. グラフ

と y 軸との共有点は $(0, \frac{11}{3})$ である.

