5.11　関数のグラフの共有点

座標平面において，2 つの関数のグラフの両方に属す点を，それらのグラフの共有点という.

例 変数 x の関数 $y=x^2$ のグラフと x の関数 $y=x+2$ のグラフとの共有点を求める.

$\boxed{例}$ 変数 x の関数 $y = x^2$ のグラフと x の関数 $y = x + 2$ のグラフとの共有点を求める．実数 u, v について，**5.4** 節で述べたように，

$$\text{点 } (u, v) \text{ が } y = x^2 \text{ のグラフに属す} \iff v = u^2 \ ,$$

$$\text{点 } (u, v) \text{ が } y = x + 2 \text{ のグラフに属す} \iff v = u + 2 \ ;$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $y = x^2$ のグラフと x の関数 $y = x + 2$ のグラフとの共有点を求める．実数 u, v について，**5.4** 節で述べたように，

$$\text{点 } (u, v) \text{ が } y = x^2 \text{ のグラフに属す} \iff v = u^2 \ ,$$

$$\text{点 } (u, v) \text{ が } y = x + 2 \text{ のグラフに属す} \iff v = u + 2 \ ;$$

これより，

$$\begin{aligned} & \text{点 } (u, v) \text{ が } y = x^2 \text{ のグラフと } y = x + 2 \text{ のグラフとの共有点である} \\ \iff & \text{点 } (u, v) \text{ が } y = x^2 \text{ のグラフに属しかつ } y = x + 2 \text{ のグラフにも属す} \\ \iff & v = u^2 \text{ かつ } v = u + 2 \ . \end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $y=x^2$ のグラフと x の関数 $y=x+2$ のグラフとの共有点を求める．実数 u,v について，**5.4** 節で述べたように，

$$\text{点 } (u,v) \text{ が } y=x^2 \text{ のグラフに属す} \iff v=u^2 \ ,$$

$$\text{点 } (u,v) \text{ が } y=x+2 \text{ のグラフに属す} \iff v=u+2 \ ;$$

これより，

$$\begin{aligned} &\text{点 } (u,v) \text{ が } y=x^2 \text{ のグラフと } y=x+2 \text{ のグラフとの共有点である} \\ \iff &\text{点 } (u,v) \text{ が } y=x^2 \text{ のグラフに属しかつ } y=x+2 \text{ のグラフにも属す} \\ \iff &v=u^2 \text{ かつ } v=u+2 \ . \end{aligned}$$

従って， $y=x^2$ のグラフと $y=x+2$ のグラフとの共有点 (u,v) を求めるには，連立方程式 $v=u^2$ かつ $v=u+2$ を解く．

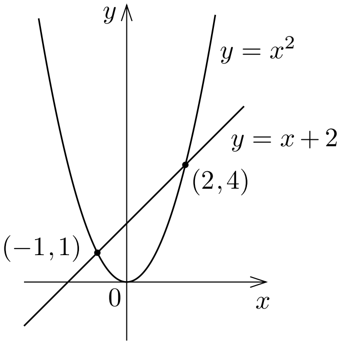
$y = x^2$ のグラフと $y = x + 2$ のグラフとの共有点 (u, v) を求めるには連立方程式 $v = u^2$ かつ $v = u + 2$ を解く.

$y=x^2$ のグラフと $y=x+2$ のグラフとの共有点 (u,v) を求めるには連立方程式 $v=u^2$ かつ $v=u+2$ を解く. この連立方程式より $u^2=u+2$ なので, $u^2-u-2=0$, $u=2$ または $u=-1$.

$y=x^2$ のグラフと $y=x+2$ のグラフとの共有点 (u,v) を求めるには連立方程式 $v=u^2$ かつ $v=u+2$ を解く．この連立方程式より $u^2=u+2$ なので，$u^2-u-2=0$ ，$u=2$ または $u=-1$ ．$v=u+2$ なので，$u=2$ のとき $v=4$ ，$u=-1$ のとき $v=1$ ．

$y=x^2$ のグラフと $y=x+2$ のグラフとの共有点 (u,v) を求めるには連立方程式 $v=u^2$ かつ $v=u+2$ を解く．この連立方程式より $u^2=u+2$ なので，$u^2-u-2=0$ ，$u=2$ または $u=-1$ ．$v=u+2$ なので，$u=2$ のとき $v=4$ ，$u=-1$ のとき $v=1$ ．よって，$(u,v)=(2,4)$ または $(u,v)=(-1,1)$ ．

$y=x^2$ のグラフと $y=x+2$ のグラフとの共有点 (u,v) を求めるには連立方程式 $v=u^2$ かつ $v=u+2$ を解く．この連立方程式より $u^2=u+2$ なので，$u^2-u-2=0$ ，$u=2$ または $u=-1$ ．$v=u+2$ なので，$u=2$ のとき $v=4$ ，$u=-1$ のとき $v=1$ ．よって，$(u,v)=(2,4)$ または $(u,v)=(-1,1)$ ．故に，関数 $y=x^2$ のグラフと関数 $y=x+2$ のグラフとの共有点は $(2,4)$ と $(-1,1)$ とである．



終

一般的に述べる.

一般的に述べる．変数 x の関数 $y = f(x)$ と関数 $y = g(x)$ 及び実数 u, v について，**5.4** 節で述べたように，

$$\text{点 } (u,v) \text{ が } y = f(x) \text{ のグラフに属す} \iff f(u) = v \ ,$$

$$\text{点 } (u,v) \text{ が } y = g(x) \text{ のグラフに属す} \iff g(u) = v \ ;$$

一般的に述べる．変数 x の関数 $y=f(x)$ と関数 $y=g(x)$ 及び実数 u,v について，**5.4** 節で述べたように，

$$\text{点 } (u,v) \text{ が } y=f(x) \text{ のグラフに属す} \iff f(u)=v \ ,$$

$$\text{点 } (u,v) \text{ が } y=g(x) \text{ のグラフに属す} \iff g(u)=v \ ;$$

よって，

$$\begin{aligned}
&\text{点 } (u,v) \text{ が } y=f(x) \text{ のグラフと } y=g(x) \text{ のグラフとの共有点である} \\
\iff &\text{点 } (u,v) \text{ は } y=f(x) \text{ のグラフに属しかつ } y=g(x) \text{ のグラフにも属す} \\
\iff &v=f(u) \text{ かつ } v=g(u) \ .
\end{aligned}$$

一般的に述べる．変数 x の関数 $y=f(x)$ と関数 $y=g(x)$ 及び実数 u,v について，**5.4** 節で述べたように，

$$\text{点 } (u,v) \text{ が } y=f(x) \text{ のグラフに属す} \iff f(u)=v\ ,$$

$$\text{点 } (u,v) \text{ が } y=g(x) \text{ のグラフに属す} \iff g(u)=v\ ;$$

よって，

点 (u,v) が $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフとの共有点である

$\iff$ 点 (u,v) は $y=f(x)$ のグラフに属しかつ $y=g(x)$ のグラフにも属す

$\iff v=f(u)$ かつ $v=g(u)$ ．

このように，関数 $y=f(x)$ のグラフと関数 $y=g(x)$ のグラフとの共有点 (x,y) は，連立方程式 $y=f(x)$ かつ $y=g(x)$ の実数解の順序対である．

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=x^2-x-3$ のグラフと x の関数 $y=2x^2-5x$ のグラフとの共有点を求める．

$\boxed{例}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=x^2-x-3$ のグラフと x の関数 $y=2x^2-5x$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x,y) について，$y=x^2-x-3$ かつ $y=2x^2-5x$ なので，

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=x^2-x-3$ のグラフと x の関数 $y=2x^2-5x$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x,y) について，$y=x^2-x-3$ かつ $y=2x^2-5x$ なので，

$$x^2-x-3=2x^2-5x \ ,$$

$$x^2-4x+3=0 \ ,$$

$$(x-1)(x-3)=0 \ ,$$

$$x=1 \text{ または } x=3 \ .$$

$\boxed{例}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=x^2-x-3$ のグラフと x の関数 $y=2x^2-5x$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x,y) について，$y=x^2-x-3$ かつ $y=2x^2-5x$ なので，

$$x^2-x-3=2x^2-5x\ ,$$

$$x^2-4x+3=0\ ,$$

$$(x-1)(x-3)=0\ ,$$

$$x=1 \text{ または } x=3\ .$$

更に，$y=x^2-x-3$ より，$x=1$ のとき $y=-3$ ，$x=3$ のとき $y=3$ ．

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=x^2-x-3$ のグラフと x の関数 $y=2x^2-5x$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x,y) について，$y=x^2-x-3$ かつ $y=2x^2-5x$ なので，

$$x^2-x-3=2x^2-5x \ ,$$

$$x^2-4x+3=0 \ ,$$

$$(x-1)(x-3)=0 \ ,$$

$$x=1 \ \text{または}\ x=3 \ .$$

更に，$y=x^2-x-3$ より，$x=1$ のとき $y=-3$，$x=3$ のとき $y=3$．
故に，関数 $y=x^2-x-3$ のグラフと関数 $y=2x^2-5x$ のグラフとの共有点は $(1,-3)$ と $(3,3)$ とである． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 5.11.1}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y = x^2 - 4x + 5$ のグラフと x の関数 $y = 3x^2 + x - 7$ のグラフとの共有点を求めよ.

共有点 (x, y) について，$\quad = \qquad\qquad$ かつ $\quad = \qquad\qquad$ なので,

$$= \qquad\qquad ,$$

$$= 0 \ ,$$

$$(\qquad)(\qquad) = 0 \ ,$$

$$x = \qquad \text{または} \qquad .$$

更に，$y = \qquad\qquad$ より，$x = \qquad$ のとき $y = \qquad$，$x = \qquad$ のとき $y = \qquad$．故に，共有点は $\qquad$ と $\qquad$ とである.

$\boxed{問5.11.1}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=x^2-4x+5$ のグラフと x の関数 $y=3x^2+x-7$ のグラフとの共有点を求めよ.

共有点 (x,y) について， $y=x^2-4x+5$ かつ $y=2x^2+5x-12$ なので，

$$x^2-4x+5=3x^2+x-7\ ,$$

$$2x^2+5x-12=0\ ,$$

$$(x+4)(2x-3)=0\ ,$$

$$x=-4\ \text{ または }\ \frac{3}{2}\ .$$

更に， $y=x^2-4x+5$ より， $x=-4$ のとき $y=37$ ， $x=\frac{3}{2}$ のとき $y=\frac{5}{4}$ ．故に，共有点は $(-4,37)$ と $\left(\frac{3}{2},\frac{5}{4}\right)$ とである. $\boxed{終}$

関数 $y=f(x)$ のグラフと関数 $y=g(x)$ のグラフとの共有点 (x,y) は，連立方程式 $y=f(x)$ かつ $y=g(x)$ の実数解の順序対である．それ故，この連立方程式の実数解が無いときは， $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフとの共有点も無い．

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=x^2-2x-5$ のグラフと x の関数 $y=2x^2-5x-1$ のグラフとの共有点を求める.

例 xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=x^2-2x-5$ のグラフと x の関数 $y=2x^2-5x-1$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x,y) について，$y=x^2-2x-5$ かつ $y=2x^2-5y-1$ なので，

$\boxed{例}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=x^2-2x-5$ のグラフと x の関数 $y=2x^2-5x-1$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x,y) について，$y=x^2-2x-5$ かつ $y=2x^2-5y-1$ なので，

$$x^2-2x-5=2x^2-5x-1\ ,$$

$$x^2-3x+4=0\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=x^2-2x-5$ のグラフと x の関数 $y=2x^2-5x-1$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x,y) について，$y=x^2-2x-5$ かつ $y=2x^2-5y-1$ なので，

$$x^2-2x-5=2x^2-5x-1\ ,$$

$$x^2-3x+4=0\ .$$

この x に関する 2 次方程式は，判別式の値が $(-3)^2-4\cdot1\cdot4<0$ なので，実数解が無い．

例 xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=x^2-2x-5$ のグラフと x の関数 $y=2x^2-5x-1$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x,y) について，$y=x^2-2x-5$ かつ $y=2x^2-5y-1$ なので，

$$x^2-2x-5=2x^2-5x-1\ ,$$

$$x^2-3x+4=0\ .$$

この x に関する 2 次方程式は，判別式の値が $(-3)^2-4\cdot1\cdot4<0$ なので，実数解が無い．従って，関数 $y=x^2-2x-5$ のグラフと関数 $y=2x^2-5x-1$ のグラフとの共有点は無い． 終

$\boxed{\text{問5.11.2}}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y = x^2 - 2x + 1$ のグラフと x の関数 $y = 3x^2 - 7x + 5$ のグラフとの共有点を求めよ．

共有点 (x, y) について，　$=$　　　　　かつ　$=$　　　　　なので，

$$= \qquad ,$$

$$= 0 \ .$$

この 2 次方程式は，判別式の値が　　　　　なので，　　　　　．

従って，関数 $y = x^2 - 2x + 1$ のグラフと関数 $y = 3x^2 - 7x + 5$ のグラフとの共有点は　　．

$\boxed{\text{終}}$

問5.11.2 xy 座標平面において，変数 x の関数 $y = x^2 - 2x + 1$ のグラフと x の関数 $y = 3x^2 - 7x + 5$ のグラフとの共有点を求めよ．

共有点 (x, y) について，$y = x^2 - 2x + 1$ かつ $y = 3x^2 - 7x + 5$ なので，

$$x^2 - 2x + 1 = 3x^2 - 7x + 5 \ ,$$

$$2x^2 - 5x + 4 = 0 \ .$$

この 2 次方程式は，判別式の値が $5^3 - 4 \cdot 2 \cdot 4 < 0$ なので，実数解が無い．従って，関数 $y = x^2 - 2x + 1$ のグラフと関数 $y = 3x^2 - 7x + 5$ のグラフとの共有点は無い． 終

$\boxed{例}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=\dfrac{2x-6}{3x-1}$ $\left(x \neq \dfrac{1}{3}\right)$ のグラフと x の関数 $y=\dfrac{x+9}{4}$ のグラフとの共有点を求める.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=\dfrac{2x-6}{3x-1}$ $\left(x \neq \dfrac{1}{3} \right)$ のグラフと x の関数 $y=\dfrac{x+9}{4}$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x,y) について，$y=\dfrac{2x-6}{3x-1}$ かつ $y=\dfrac{x+9}{4}$ なので，

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=\dfrac{2x-6}{3x-1}$ $\left(x \neq \dfrac{1}{3} \right)$ のグラフと x の関数 $y=\dfrac{x+9}{4}$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x,y) について，$y=\dfrac{2x-6}{3x-1}$ かつ $y=\dfrac{x+9}{4}$ なので，

$$\frac{2x-6}{3x-1}=\frac{x+9}{4}\ ,$$

$$4(2x-6)=(x+9)(3x-1)\ ,$$

$$3x^2+18x+15=0\ ,$$

$$x^2+6x+5=0\ ,$$

$$(x+1)(x+5)=0\ .$$

$$x=-1\ \text{ または }\ x=-5\ .$$

$\boxed{例}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=\dfrac{2x-6}{3x-1}$ $\left(x\neq\dfrac{1}{3}\right)$ のグラフと x の関数 $y=\dfrac{x+9}{4}$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x,y) について，

$y=\dfrac{2x-6}{3x-1}$ かつ $y=\dfrac{x+9}{4}$ なので，

$$\frac{2x-6}{3x-1}=\frac{x+9}{4}\ ,$$

$$4(2x-6)=(x+9)(3x-1)\ ,$$

$$3x^2+18x+15=0\ ,$$

$$x^2+6x+5=0\ ,$$

$$(x+1)(x+5)=0\ .$$

$$x=-1\ \text{ または }\ x=-5\ .$$

どちらのときも $x\neq\dfrac{1}{3}$ ．

$\boxed{例}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y = \dfrac{2x-6}{3x-1}$ $\left(x \neq \dfrac{1}{3} \right)$ のグラフと x の関数 $y = \dfrac{x+9}{4}$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x, y) について，$y = \dfrac{2x-6}{3x-1}$ かつ $y = \dfrac{x+9}{4}$ なので，

$$\frac{2x-6}{3x-1} = \frac{x+9}{4} \ ,$$

$$4(2x-6) = (x+9)(3x-1) \ ,$$

$$3x^2 + 18x + 15 = 0 \ ,$$

$$x^2 + 6x + 5 = 0 \ ,$$

$$(x+1)(x+5) = 0 \ .$$

$$x = -1 \ \text{または} \ x = -5 \ .$$

どちらのときも $x \neq \dfrac{1}{3}$ ． $y = \dfrac{x+9}{4}$ より，$x = -1$ のとき $y = 2$ ． $x = -5$ のとき $y = 1$ ．

例 xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=\dfrac{2x-6}{3x-1}$ $\left(x \neq \dfrac{1}{3} \right)$ のグラフと x の関数 $y=\dfrac{x+9}{4}$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x,y) について，$y=\dfrac{2x-6}{3x-1}$ かつ $y=\dfrac{x+9}{4}$ なので，

$$\frac{2x-6}{3x-1}=\frac{x+9}{4}\ ,$$

$$4(2x-6)=(x+9)(3x-1)\ ,$$

$$3x^2+18x+15=0\ ,$$

$$x^2+6x+5=0\ ,$$

$$(x+1)(x+5)=0\ .$$

$$x=-1 \text{ または } x=-5\ .$$

どちらのときも $x \neq \dfrac{1}{3}$ ．$y=\dfrac{x+9}{4}$ より，$x=-1$ のとき $y=2$ ．$x=-5$ のとき $y=1$ ．共有点は $(-1,2)$ と $(-5,1)$ とである．終

$\boxed{\text{問}5.11.3}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=\dfrac{7x+3}{2x-3}$ $\left(x \neq \dfrac{3}{2}\right)$ のグラフと x の関数 $y=\dfrac{x+9}{3}$ のグラフとの共有点を求めよ．

共有点 (x,y) について，　$=$　　　　かつ　$=$　　　　なので，

$$= \qquad ,$$

$$(\qquad)=(\qquad)(\qquad)\ ,$$

$$=0\ ,$$

$$=0\ ,$$

$$(\qquad)(\qquad)=0\ ,$$

$$x= \qquad \text{または} \quad x= \quad .$$

どちらのときも $x \neq \dfrac{3}{2}$．$x=$　　のとき $y=$　．$x=$　　　のとき $y=$　．共有点は　　　と　　　とである．

$\boxed{\text{問}5.11.3}$ xy 座標平面において，変数 x の関数 $y = \dfrac{7x+3}{2x-3}$ $\left(x \neq \dfrac{3}{2} \right)$ のグラフと x の関数 $y = \dfrac{x+9}{3}$ のグラフとの共有点を求めよ.

共有点 (x,y) について， $y = \dfrac{7x+3}{2x-3}$ かつ $y = \dfrac{x+9}{3}$ なので，

$$\frac{7x+3}{2x-3} = \frac{x+9}{3} \ ,$$

$$3(7x+3) = (x+9)(2x-3) \ ,$$

$$2x^2 - 6x - 36 = 0 \ ,$$

$$x^2 - 3x - 18 = 0 \ ,$$

$$(x-6)(x+3) = 0 \ ,$$

$$x = 6 \ \text{または} \ x = -3 \ .$$

どちらのときも $x \neq \dfrac{3}{2}$ ． $x = 6$ のとき $y = 5$ ． $x = -3$ のとき $y = 2$ ．共有点は $(6,5)$ と $(-3,2)$ とである. $\boxed{\text{終}}$