

5. 補遺 1 分数式が現れる不等式の解法

分数式が現れる不等式のうち簡単なものを解く.

例 変数 x に関する不等式 $\frac{3x}{x-4} < 2$ を解く.

例 変数 x に関する不等式 $\frac{3x}{x-4} < 2$ を解く. 左辺の分数式の分母 $x-4$ を両辺に掛けて分母を払うには問題がある.

例 変数 x に関する不等式 $\frac{3x}{x-4} < 2$ を解く. 左辺の分数式の分母 $x-4$ を両辺に掛けて分母を払うには問題がある. 実数 a, b, c について,

$$a < b \text{ ならば, } \begin{cases} c > 0 \text{ のとき } ac < bc \\ c < 0 \text{ のとき } ac > bc \end{cases} .$$

例 変数 x に関する不等式 $\frac{3x}{x-4} < 2$ を解く. 左辺の分数式の分母 $x-4$ を両辺に掛けて分母を払うには問題がある. 実数 a, b, c について,

$$a < b \text{ ならば, } \begin{cases} c > 0 \text{ のとき } ac < bc \\ c < 0 \text{ のとき } ac > bc \end{cases} .$$

このことより, 不等式 $\frac{3x}{x-4} < 2$ の両辺に $x-4$ を掛けると, $x-4 > 0$ のときは $3x < 2(x-4)$ であり, $x-4 < 0$ のときは $3x > 2(x-4)$ である.

例 変数 x に関する不等式 $\frac{3x}{x-4} < 2$ を解く. 左辺の分数式の分母 $x-4$ を両辺に掛けて分母を払うには問題がある. 実数 a, b, c について,

$$a < b \text{ ならば, } \begin{cases} c > 0 \text{ のとき } ac < bc \\ c < 0 \text{ のとき } ac > bc \end{cases} .$$

このことより, 不等式 $\frac{3x}{x-4} < 2$ の両辺に $x-4$ を掛けると, $x-4 > 0$ のときは $3x < 2(x-4)$ であり, $x-4 < 0$ のときは $3x > 2(x-4)$ である.

予め $x-4 > 0$ か $x-4 < 0$ かは分からないので, 不等式 $\frac{3x}{x-4} < 2$ の両辺に $x-4$ を掛けたとき $3x < 2(x-4)$ なのか $3x > 2(x-4)$ なのか分からない.

例えば不等式 $\frac{x+4}{3} < 2$ では, $3 > 0$ なので, $\frac{x+4}{3} < 2$ の両辺に 3 を掛けると $x+4 < 6$.

例 変数 x に関する不等式 $\frac{3x}{x-4} < 2$ を解く. 左辺の分数式の分母 $x-4$ を両辺に掛けて分母を払うには問題がある. 実数 a, b, c について,

$$a < b \text{ ならば, } \begin{cases} c > 0 \text{ のとき } ac < bc \\ c < 0 \text{ のとき } ac > bc \end{cases} .$$

このことより, 不等式 $\frac{3x}{x-4} < 2$ の両辺に $x-4$ を掛けると, $x-4 > 0$ のときは $3x < 2(x-4)$ であり, $x-4 < 0$ のときは $3x > 2(x-4)$ である.

予め $x-4 > 0$ か $x-4 < 0$ かは分からないので, 不等式 $\frac{3x}{x-4} < 2$ の両辺に $x-4$ を掛けたとき $3x < 2(x-4)$ なのか $3x > 2(x-4)$ なのか分からない. そのため別の解法を考える.

与えられた不等式 $\frac{3x}{x-4} < 2$ を次のように同値変形する：

$$\frac{3x}{x-4} < 2 \iff \frac{3x}{x-4} - 2 < 0 .$$

与えられた不等式 $\frac{3x}{x-4} < 2$ を次のように同値変形する：

$$\frac{3x}{x-4} < 2 \iff \frac{3x}{x-4} - 2 < 0 .$$

ここで

$$\frac{3x}{x-4} - 2 = \frac{3x}{x-4} - \frac{2(x-4)}{x-4} = \frac{3x - 2(x-4)}{x-4} = \frac{x+8}{x-4}$$

なので、

$$\frac{3x}{x-4} < 2 \iff \frac{x+8}{x-4} < 0 .$$

与えられた不等式 $\frac{3x}{x-4} < 2$ を次のように同値変形する：

$$\frac{3x}{x-4} < 2 \iff \frac{3x}{x-4} - 2 < 0 .$$

ここで

$$\frac{3x}{x-4} - 2 = \frac{3x}{x-4} - \frac{2(x-4)}{x-4} = \frac{3x - 2(x-4)}{x-4} = \frac{x+8}{x-4}$$

なので、

$$\frac{3x}{x-4} < 2 \iff \frac{x+8}{x-4} < 0 .$$

与えられた不等式 $\frac{3x}{x-4} < 2$ と同値な不等式 $\frac{x+8}{x-4} < 0$ を解けばよい。

与えられた不等式 $\frac{3x}{x-4} < 2$ を次のように同値変形する：

$$\frac{3x}{x-4} < 2 \iff \frac{3x}{x-4} - 2 < 0 .$$

ここで

$$\frac{3x}{x-4} - 2 = \frac{3x}{x-4} - \frac{2(x-4)}{x-4} = \frac{3x - 2(x-4)}{x-4} = \frac{x+8}{x-4}$$

なので、

$$\frac{3x}{x-4} < 2 \iff \frac{x+8}{x-4} < 0 .$$

与えられた不等式 $\frac{3x}{x-4} < 2$ と同値な不等式 $\frac{x+8}{x-4} < 0$ を解けばよい。そ

のために、次のような表を作って分数式 $\frac{x+8}{x-4}$ の値の符号を調べる。

与えられた不等式 $\frac{3x}{x-4} < 2$ を次のように同値変形する：

$$\frac{3x}{x-4} < 2 \iff \frac{3x}{x-4} - 2 < 0 .$$

ここで

$$\frac{3x}{x-4} - 2 = \frac{3x}{x-4} - \frac{2(x-4)}{x-4} = \frac{3x - 2(x-4)}{x-4} = \frac{x+8}{x-4}$$

なので、

$$\frac{3x}{x-4} < 2 \iff \frac{x+8}{x-4} < 0 .$$

与えられた不等式 $\frac{3x}{x-4} < 2$ と同値な不等式 $\frac{x+8}{x-4} < 0$ を解けばよい。そ

のために、次のような表を作って分数式 $\frac{x+8}{x-4}$ の値の符号を調べる。 $x = 4$

のとき、 $x - 4 = 0$ なので、分数式 $\frac{x+8}{x-4}$ の値は無い。

分数式 $\frac{x+8}{x-4}$ の値の符号を調べる.

x の値	$x < -8$	$x = -8$	$-8 < x < 4$	$x = 4$	$4 < x$
$x + 8$ の値の符号	-	0	+	+	+
$x - 4$ の値の符号	-	-	-	0	+
$\frac{x+8}{x-4}$ の値の符号	+	0	-	値なし	+

分数式 $\frac{x+8}{x-4}$ の値の符号を調べる.

x の値	$x < -8$	$x = -8$	$-8 < x < 4$	$x = 4$	$4 < x$
$x + 8$ の値の符号	-	0	+	+	+
$x - 4$ の値の符号	-	-	-	0	+
$\frac{x+8}{x-4}$ の値の符号	+	0	-	値なし	+

この表より,

$$\frac{x+8}{x-4} < 0 \iff -8 < x < 4 .$$

分数式 $\frac{x+8}{x-4}$ の値の符号を調べる.

x の値	$x < -8$	$x = -8$	$-8 < x < 4$	$x = 4$	$4 < x$
$x+8$ の値の符号	-	0	+	+	+
$x-4$ の値の符号	-	-	-	0	+
$\frac{x+8}{x-4}$ の値の符号	+	0	-	値なし	+

この表より,

$$\frac{x+8}{x-4} < 0 \iff -8 < x < 4 .$$

故に, 与えられた不等式 $\frac{3x}{x-4} < 2$ を解くと $-8 < x < 4$.

終

例 変数 x に関する不等式 $\frac{2x-13}{2x-5} \leq 4$ を解く.

例 変数 x に関する不等式 $\frac{2x-13}{2x-5} \leq 4$ を解く.

$$\frac{2x-13}{2x-5} - 4 = \frac{2x-13-4(2x-5)}{2x-5} = \frac{-6x+7}{2x-5} = -3 \cdot \frac{x-\frac{7}{6}}{x-\frac{5}{2}},$$

例 変数 x に関する不等式 $\frac{2x-13}{2x-5} \leq 4$ を解く.

$$\frac{2x-13}{2x-5} - 4 = \frac{2x-13-4(2x-5)}{2x-5} = \frac{-6x+7}{2x-5} = -3 \cdot \frac{x-\frac{7}{6}}{x-\frac{5}{2}},$$

従って

$$\begin{aligned} \frac{2x-13}{2x-5} \leq 4 &\iff \frac{2x-13}{2x-5} - 4 \leq 0 \iff -3 \cdot \frac{x-\frac{7}{6}}{x-\frac{5}{2}} \leq 0 \\ &\iff \frac{x-\frac{7}{6}}{x-\frac{5}{2}} \geq 0. \end{aligned}$$

例 変数 x に関する不等式 $\frac{2x-13}{2x-5} \leq 4$ を解く.

$$\frac{2x-13}{2x-5} - 4 = \frac{2x-13-4(2x-5)}{2x-5} = \frac{-6x+7}{2x-5} = -3 \cdot \frac{x-\frac{7}{6}}{x-\frac{5}{2}},$$

従って

$$\frac{2x-13}{2x-5} \leq 4 \iff \frac{2x-13}{2x-5} - 4 \leq 0 \iff -3 \cdot \frac{x-\frac{7}{6}}{x-\frac{5}{2}} \leq 0$$

$$\iff \frac{x-\frac{7}{6}}{x-\frac{5}{2}} \geq 0.$$

不等式 $\frac{x-\frac{7}{6}}{x-\frac{5}{2}} \geq 0$ を解く.

例 変数 x に関する不等式 $\frac{2x-13}{2x-5} \leq 4$ を解く.

$$\frac{2x-13}{2x-5} - 4 = \frac{2x-13-4(2x-5)}{2x-5} = \frac{-6x+7}{2x-5} = -3 \cdot \frac{x-\frac{7}{6}}{x-\frac{5}{2}},$$

従って

$$\frac{2x-13}{2x-5} \leq 4 \iff \frac{2x-13}{2x-5} - 4 \leq 0 \iff -3 \cdot \frac{x-\frac{7}{6}}{x-\frac{5}{2}} \leq 0$$

$$\iff \frac{x-\frac{7}{6}}{x-\frac{5}{2}} \geq 0.$$

不等式 $\frac{x-\frac{7}{6}}{x-\frac{5}{2}} \geq 0$ を解く. 分数式 $\frac{x-\frac{7}{6}}{x-\frac{5}{2}}$ の値の符号を調べて表を作る.

x	\dots	$\frac{7}{6}$	\dots	$\frac{5}{2}$	\dots
$x - \frac{7}{6}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - \frac{5}{2}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x - \frac{7}{6}}{x - \frac{5}{2}}$	$+$	0	$-$	値なし	$+$

x	...	$\frac{7}{6}$...	$\frac{5}{2}$...
$x - \frac{7}{6}$	-	0	+	+	+
$x - \frac{5}{2}$	-	-	-	0	+
$\frac{x - \frac{7}{6}}{x - \frac{5}{2}}$	+	0	-	値なし	+

この表より,

$$\frac{x - \frac{7}{6}}{x - \frac{5}{2}} \geq 0 \iff x \leq \frac{7}{6} \text{ または } x > \frac{5}{2} .$$

x	...	$\frac{7}{6}$...	$\frac{5}{2}$...
$x - \frac{7}{6}$	-	0	+	+	+
$x - \frac{5}{2}$	-	-	-	0	+
$\frac{x - \frac{7}{6}}{x - \frac{5}{2}}$	+	0	-	値なし	+

この表より,

$$\frac{x - \frac{7}{6}}{x - \frac{5}{2}} \geq 0 \iff x \leq \frac{7}{6} \text{ または } x > \frac{5}{2} .$$

故に, 与えられた不等式を解くと, $x \leq \frac{7}{6}$ または $x > \frac{5}{2}$.

しばしば次の様に同値記号を省いて記す：

$$\frac{2x-13}{2x-5} \leq 4 ,$$

$$\frac{2x-13}{2x-5} - 4 \leq 0 ,$$

$$-3 \cdot \frac{x - \frac{7}{6}}{x - \frac{5}{2}} \leq 0 ,$$

$$\frac{x - \frac{7}{6}}{x - \frac{5}{2}} \geq 0 ,$$

$$x \leq \frac{7}{6} \text{ または } x > \frac{5}{2} .$$

同値記号を省いても同値変形であることに注意すること.

終

問5.補遺1.1 変数 x に関する不等式 $\frac{5}{x+1} \leq 2$ を解け.

$$\frac{5}{x+1} - 2 = \quad =$$

$$= \frac{x}{x} .$$

不等式 $\frac{5}{x+1} \leq 2$ より, $\frac{x}{x} \leq 0$,

$\frac{x}{x} \leq 0$, $\frac{x}{x} \geq 0$, 右の表よ

り, $\frac{x}{x} = 0$. 故に, 与

えられた不等式を解くと,

x
x					
x					
$\frac{x}{x}$					

問5.補遺1.1 変数 x に関する不等式 $\frac{5}{x+1} \leq 2$ を解け.

$$\begin{aligned}\frac{5}{x+1} - 2 &= \frac{5 - 2(x+1)}{x+1} = -\frac{2x-3}{x+1} \\ &= -2 \cdot \frac{x - \frac{3}{2}}{x+1}.\end{aligned}$$

不等式 $\frac{5}{x+1} \leq 2$ より, $\frac{5}{x+1} - 2 \leq 0$,

$$-2 \cdot \frac{x - \frac{3}{2}}{x+1} \leq 0, \quad \frac{x - \frac{3}{2}}{x+1} \geq 0, \quad \text{右の表よ}$$

り, $x < -1$ または $x \geq \frac{3}{2}$. 故に, 与

えられた不等式を解くと, $x < -1$ または $x \geq \frac{3}{2}$.

x	...	-1	...	$\frac{3}{2}$...
$x - \frac{3}{2}$	-	-	-	0	+
$x + 1$	-	0	+	+	+
$\frac{x - \frac{3}{2}}{x + 1}$	+	値なし	-	0	+

終

問5.補遺1.2 変数 x に関する不等式 $\frac{3x-13}{2x-3} \geq 3$ を解け.

$$\frac{3x-13}{2x-3} - 3 =$$

=

$$= \frac{x}{x} .$$

不等式 $\frac{3x-13}{2x-3} \geq 3$ より, \geq

0, $\frac{x}{x} \geq 0$, $\frac{x}{x} \geq 0$, 右の表より, . 故に, 与え

られた不等式を解くと .

x
x					
x					
x					
x					

問5.補遺1.2 変数 x に関する不等式 $\frac{3x-13}{2x-3} \geq 3$ を解け.

$$\begin{aligned} \frac{3x-13}{2x-3} - 3 &= \frac{3x-13-3(2x-3)}{2x-3} \\ &= -\frac{3x+4}{2x-3} \\ &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{x+\frac{4}{3}}{x-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

不等式 $\frac{3x-13}{2x-3} \geq 3$ より, $\frac{3x-13}{2x-3} - 3 \geq$

0 , $-\frac{3}{2} \cdot \frac{x+\frac{4}{3}}{x-\frac{3}{2}} \geq 0$, $\frac{x+\frac{4}{3}}{x-\frac{3}{2}} \leq 0$, 右の表より, $-\frac{4}{3} \leq x < \frac{3}{2}$. 故に, 与え

られた不等式を解くと $-\frac{4}{3} \leq x < \frac{3}{2}$.

x	...	$-\frac{4}{3}$...	$\frac{3}{2}$...
$x +$	-	0	+	+	+
$x - \frac{3}{2}$	-	-	-	0	+
$\frac{x + \frac{4}{3}}{x - \frac{3}{2}}$	+	0	-	値なし	+

終

問5.補遺1.3 変数 x に関する不等式 $\frac{7x-8}{3x+2} \geq 1$ を解け.

$$\frac{7x-8}{3x+2} - 1 = \frac{x}{x} .$$

不等式 $\frac{7x-8}{3x+2} \geq 1$ より, $\frac{x}{x} \geq 0$,

$$\frac{x}{x} \geq 0 , \quad \frac{x}{x} \geq 0 , \text{ 右の表より,}$$

. 故に, 与えられ

た不等式を解くと,

x
x					
x					
x					

問5.補遺1.3 変数 x に関する不等式 $\frac{7x-8}{3x+2} \geq 1$ を解け.

$$\frac{7x-8}{3x+2} - 1 = \frac{4x-10}{3x+2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{x-\frac{5}{2}}{x+\frac{3}{2}}.$$

不等式 $\frac{7x-8}{3x+2} \geq 1$ より, $\frac{7x-8}{3x+2} - 1 \geq 0$,

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{x-\frac{5}{2}}{x+\frac{3}{2}} \geq 0, \quad \frac{x-\frac{5}{2}}{x+\frac{3}{2}} \geq 0, \quad \text{右の表より,}$$

$x < -\frac{2}{3}$ または $x \geq \frac{5}{2}$. 故に, 与えられ

た不等式を解くと, $x < -\frac{2}{3}$ または $x \geq \frac{5}{2}$.

x	...	$-\frac{2}{3}$...	$\frac{5}{2}$...
$x - \frac{5}{2}$	-	-	-	0	+
$x + \frac{2}{3}$	-	0	+	+	+
$\frac{x - \frac{5}{2}}{x + \frac{2}{3}}$	+	値なし	-	0	+

終