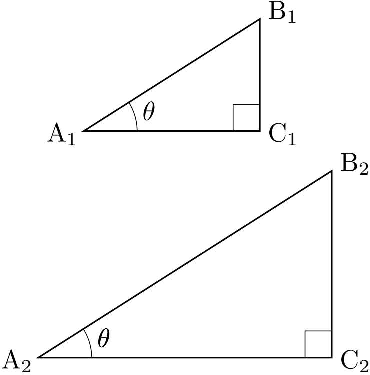
6.1 鋭角の三角比

角度 34° や 67° などを表す変数にしばしばギリシャ文字 α, β, θ などを用いる.

角度 θ について $0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする．相異なる 3 点 $\mathrm{A_1, B_1, C_1}$ を頂点とする三角形 $\mathrm{A_1B_1C_1}$ と，相異なる 3 点 $\mathrm{A_2, B_2, C_2}$ を頂点とする三角形 $\mathrm{A_2B_2C_2}$ とについて，

$$\angle \mathrm{B_1A_1C_1} = \angle \mathrm{B_2A_2C_2} = \theta \ , \qquad \angle \mathrm{A_1C_1B_1} = \angle \mathrm{A_2C_2B_2} = 90^\circ$$

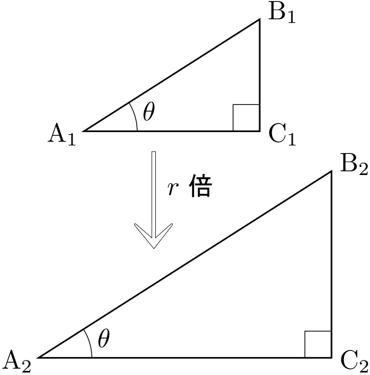
とする．三角形 $\mathrm{A_1B_1C_1}$ と $\mathrm{A_2B_2C_2}$ とは相似である．



角度 θ について $0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする．相異なる 3 点 $\mathrm{A_1, B_1, C_1}$ を頂点とする三角形 $\mathrm{A_1B_1C_1}$ と，相異なる 3 点 $\mathrm{A_2, B_2, C_2}$ を頂点とする三角形 $\mathrm{A_2B_2C_2}$ とについて，

$$\angle \mathrm{B_1A_1C_1} = \angle \mathrm{B_2A_2C_2} = \theta \ , \qquad \angle \mathrm{A_1C_1B_1} = \angle \mathrm{A_2C_2B_2} = 90^\circ$$

とする．三角形 $\mathrm{A_1B_1C_1}$ と $\mathrm{A_2B_2C_2}$ とは相似である．三角形 $\mathrm{A_1B_1C_1}$ に対する三角形 $\mathrm{A_2B_2C_2}$ の相似比を r とおく．三角形 $\mathrm{A_2B_2C_2}$ は三角形 $\mathrm{A_1B_1C_1}$ の r 倍である．

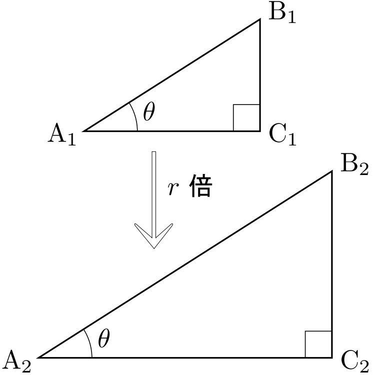


　角度 θ について $0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする．相異なる 3 点 $\mathrm{A_1, B_1, C_1}$ を頂点とする三角形 $\mathrm{A_1B_1C_1}$ と，相異なる 3 点 $\mathrm{A_2, B_2, C_2}$ を頂点とする三角形 $\mathrm{A_2B_2C_2}$ とについて，

$$\angle \mathrm{B_1A_1C_1} = \angle \mathrm{B_2A_2C_2} = \theta \ , \qquad \angle \mathrm{A_1C_1B_1} = \angle \mathrm{A_2C_2B_2} = 90^\circ$$

とする．三角形 $\mathrm{A_1B_1C_1}$ と $\mathrm{A_2B_2C_2}$ とは相似である．三角形 $\mathrm{A_1B_1C_1}$ に対する三角形 $\mathrm{A_2B_2C_2}$ の相似比を r とおく．三角形 $\mathrm{A_2B_2C_2}$ は三角形 $\mathrm{A_1B_1C_1}$ の r 倍である．

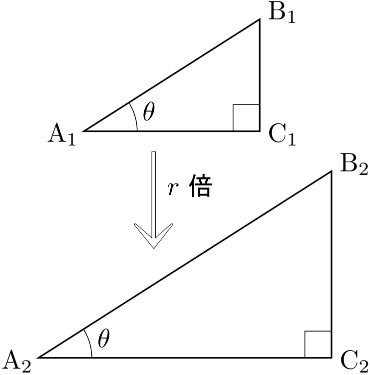
$$\overline{\mathrm{A_2B_2}} = r\overline{\mathrm{A_1B_1}} \ , \qquad \overline{\mathrm{B_2C_2}} = r\overline{\mathrm{B_1C_1}} \ ,$$



角度 θ について $0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする．相異なる 3 点 $\mathrm{A_1, B_1, C_1}$ を頂点とする三角形 $\mathrm{A_1B_1C_1}$ と，相異なる 3 点 $\mathrm{A_2, B_2, C_2}$ を頂点とする三角形 $\mathrm{A_2B_2C_2}$ とについて，

$$\angle \mathrm{B_1A_1C_1} = \angle \mathrm{B_2A_2C_2} = \theta \ , \qquad \angle \mathrm{A_1C_1B_1} = \angle \mathrm{A_2C_2B_2} = 90^\circ$$

とする．三角形 $\mathrm{A_1B_1C_1}$ と $\mathrm{A_2B_2C_2}$ とは相似である．三角形 $\mathrm{A_1B_1C_1}$ に対する三角形 $\mathrm{A_2B_2C_2}$ の相似比を r とおく．三角形 $\mathrm{A_2B_2C_2}$ は三角形 $\mathrm{A_1B_1C_1}$ の r 倍である．



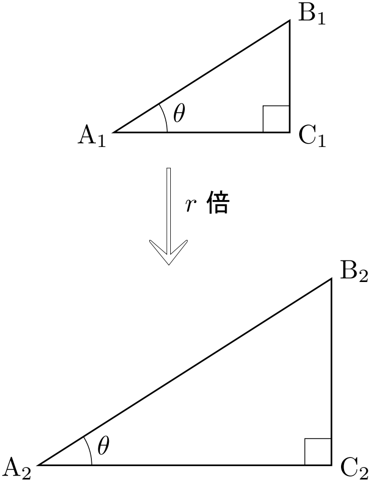
$$\overline{\mathrm{A_2B_2}} = r\overline{\mathrm{A_1B_1}} \ , \qquad \overline{\mathrm{B_2C_2}} = r\overline{\mathrm{B_1C_1}} \ ,$$

よって

$$\frac{\overline{\mathrm{B_2C_2}}}{\overline{\mathrm{A_2B_2}}} = \frac{r\overline{\mathrm{B_1C_1}}}{r\overline{\mathrm{A_1B_1}}} = \frac{\overline{\mathrm{B_1C_1}}}{\overline{\mathrm{A_1B_1}}} \ .$$

三角形 $\mathrm{A_2B_2C_2}$ は三角形 $\mathrm{A_1B_1C_1}$ の r 倍なので,

$$\overline{\mathrm{A_2B_2}} = r\overline{\mathrm{A_1B_1}} \ , \qquad \overline{\mathrm{A_2C_2}} = r\overline{\mathrm{A_1C_1}} \ ,$$

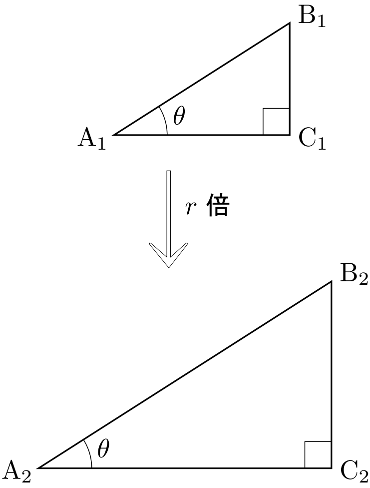


三角形 $\mathrm{A_2B_2C_2}$ は三角形 $\mathrm{A_1B_1C_1}$ の r 倍なので，

$$\overline{\mathrm{A_2B_2}} = r\overline{\mathrm{A_1B_1}}\ , \qquad \overline{\mathrm{A_2C_2}} = r\overline{\mathrm{A_1C_1}}\ ,$$

よって

$$\frac{\overline{\mathrm{A_2C_2}}}{\overline{\mathrm{A_2B_2}}} = \frac{r\overline{\mathrm{A_1C_1}}}{r\overline{\mathrm{A_1B_1}}} = \frac{\overline{\mathrm{A_1C_1}}}{\overline{\mathrm{A_1B_1}}}\ .$$



三角形 $\mathrm{A_2B_2C_2}$ は三角形 $\mathrm{A_1B_1C_1}$ の r 倍なので,

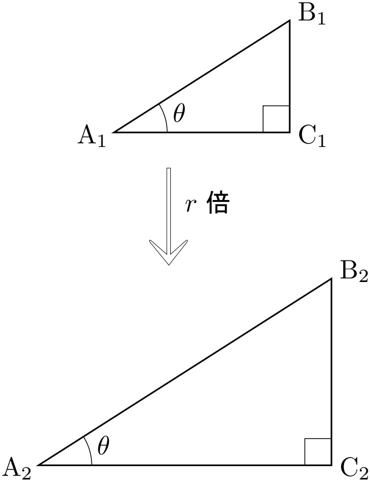
$$\overline{\mathrm{A_2B_2}} = r\overline{\mathrm{A_1B_1}}\ , \qquad \overline{\mathrm{A_2C_2}} = r\overline{\mathrm{A_1C_1}}\ ,$$

よって

$$\frac{\overline{\mathrm{A_2C_2}}}{\overline{\mathrm{A_2B_2}}} = \frac{r\overline{\mathrm{A_1C_1}}}{r\overline{\mathrm{A_1B_1}}} = \frac{\overline{\mathrm{A_1C_1}}}{\overline{\mathrm{A_1B_1}}}\ .$$

三角形 $\mathrm{A_2B_2C_2}$ は三角形 $\mathrm{A_1B_1C_1}$ の r 倍なので,

$$\overline{\mathrm{A_2C_2}} = r\overline{\mathrm{A_1C_1}}\ , \qquad \overline{\mathrm{B_2C_2}} = r\overline{\mathrm{B_1C_1}}\ ,$$



三角形 $\mathrm{A_2B_2C_2}$ は三角形 $\mathrm{A_1B_1C_1}$ の r 倍なので，

$$\overline{\mathrm{A_2B_2}} = r\overline{\mathrm{A_1B_1}} \ , \qquad \overline{\mathrm{A_2C_2}} = r\overline{\mathrm{A_1C_1}} \ ,$$

よって

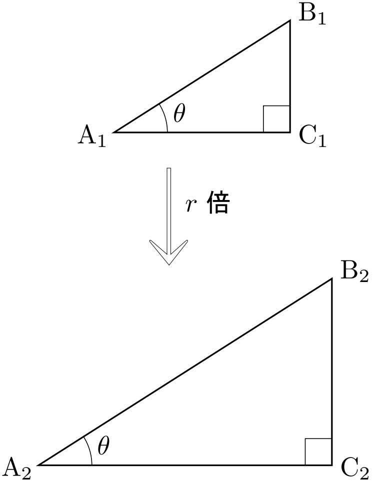
$$\frac{\overline{\mathrm{A_2C_2}}}{\overline{\mathrm{A_2B_2}}} = \frac{r\overline{\mathrm{A_1C_1}}}{r\overline{\mathrm{A_1B_1}}} = \frac{\overline{\mathrm{A_1C_1}}}{\overline{\mathrm{A_1B_1}}} \ .$$

三角形 $\mathrm{A_2B_2C_2}$ は三角形 $\mathrm{A_1B_1C_1}$ の r 倍なので，

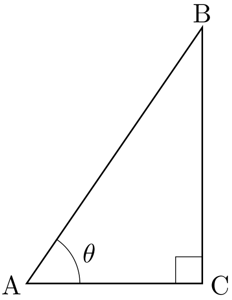
$$\overline{\mathrm{A_2C_2}} = r\overline{\mathrm{A_1C_1}} \ , \qquad \overline{\mathrm{B_2C_2}} = r\overline{\mathrm{B_1C_1}} \ ,$$

よって

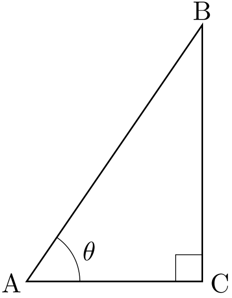
$$\frac{\overline{\mathrm{B_2C_2}}}{\overline{\mathrm{A_2C_2}}} = \frac{r\overline{\mathrm{B_1C_1}}}{r\overline{\mathrm{A_1C_1}}} = \frac{\overline{\mathrm{B_1C_1}}}{\overline{\mathrm{A_1C_1}}} \ .$$



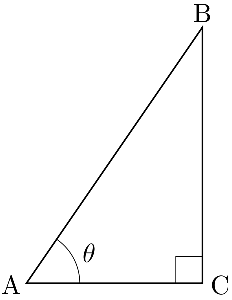
角度 θ について $0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする．相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において $\angle \mathrm{BAC} = \theta$ かつ $\angle \mathrm{ACB} = 90^\circ$ とする．



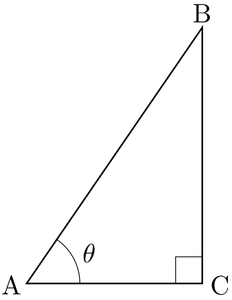
角度 θ について $0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする．相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC において $\angle\mathrm{BAC} = \theta$ かつ $\angle\mathrm{ACB} = 90^\circ$ とする．角度 θ に対して，$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$，$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$，$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$ の各々の値は直角三角形 ABC の大きさに関わらず唯一つに決まる．



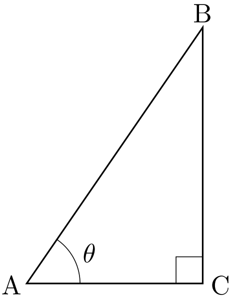
角度 θ について $0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする．相異なる3点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC において $\angle\mathrm{BAC} = \theta$ かつ $\angle\mathrm{ACB} = 90^\circ$ とする．角度 θ に対して，$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$，$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$，$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$ の各々の値は直角三角形 ABC の大きさに関わらず唯一つに決まる．$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$ の値を，角度 θ の正弦といい $\sin\theta$ と書き表す．



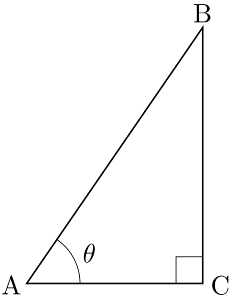
　角度 θ について $0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする．相異なる3点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC において $\angle\mathrm{BAC} = \theta$ かつ $\angle\mathrm{ACB} = 90^\circ$ とする．角度 θ に対して，$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$，$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$，$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$ の各々の値は直角三角形 ABC の大きさに関わらず唯一つに決まる．$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$ の値を，角度 θ の正弦といい $\sin\theta$ と書き表す．$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$ の値を，角度 θ の余弦といい $\cos\theta$ と書き表す．



角度 θ について $0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする．相異なる3点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC において $\angle\mathrm{BAC} = \theta$ かつ $\angle\mathrm{ACB} = 90^\circ$ とする．角度 θ に対して，$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$，$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$，$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$ の各々の値は直角三角形 ABC の大きさに関わらず唯一つに決まる．$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$ の値を，角度 θ の正弦といい $\sin\theta$ と書き表す．$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$ の値を，角度 θ の余弦といい $\cos\theta$ と書き表す．$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$ の値を，角度 θ の正接といい $\tan\theta$ と書き表す．

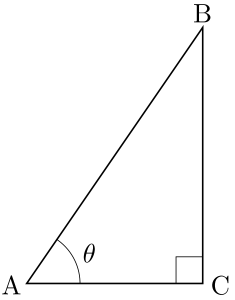


角度 θ について $0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする．相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC において $\angle\mathrm{BAC} = \theta$ かつ $\angle\mathrm{ACB} = 90^\circ$ とする．角度 θ に対して，$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$，$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$，$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$ の各々の値は直角三角形 ABC の大きさに関わらず唯一つに決まる．$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$ の値を，角度 θ の正弦といい $\sin\theta$ と書き表す．$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$ の値を，角度 θ の余弦といい $\cos\theta$ と書き表す．$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$ の値を，角度 θ の正接といい $\tan\theta$ と書き表す．



$$\sin\theta = \sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}\,,\ \cos\theta = \cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}\,,\ \tan\theta = \tan\angle\mathrm{BAC} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}\ .$$

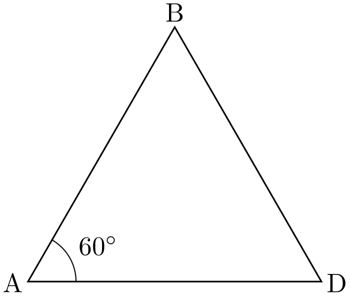
角度 θ について $0° < \theta < 90°$ とする．相異なる3点 $\mathrm{A,B,C}$ を頂点とする三角形 ABC において $\angle\mathrm{BAC} = \theta$ かつ $\angle\mathrm{ACB} = 90°$ とする．角度 θ に対して，$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$，$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$，$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$ の各々の値は直角三角形 ABC の大きさに関わらず唯一つに決まる．$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$ の値を，角度 θ の正弦といい $\sin\theta$ と書き表す．$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$ の値を，角度 θ の余弦といい $\cos\theta$ と書き表す．$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$ の値を，角度 θ の正接といい $\tan\theta$ と書き表す．



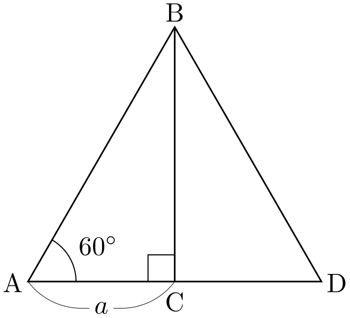
$$\sin\theta = \sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}},\ \cos\theta = \cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}},\ \tan\theta = \tan\angle\mathrm{BAC} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}.$$

角度に対するこのような直角三角形の辺の長さの比を三角比という．

相異なる 3 点 A, B, D を頂点とする三角形 ABD は正三角形であるとする.



相異なる3点 A,B,D を頂点とする三角形 ABD は正三角形であるとする．辺 AD の中点を C とおく． $\overline{\mathrm{AC}} = a > 0$ とおく．



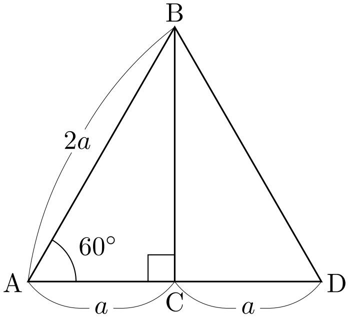
相異なる3点 A, B, D を頂点とする三角形 ABD は正三角形であるとする．辺 AD の中点を C とおく． $\overline{\mathrm{AC}}=a>0$ とおく．

$$\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{AC}}=a\ ,$$

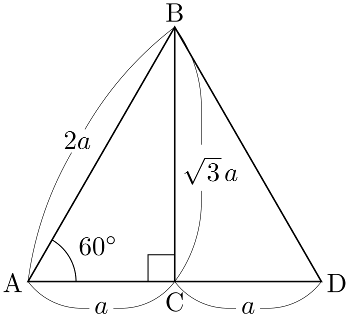
$$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{CD}}=a+a=2a\ .$$

三角形 ABD は正三角形なので，

$$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}=2a>0\ .$$



相異なる 3 点 A, B, D を頂点とする三角形 ABD は正三角形であるとする．辺 AD の中点を C とおく． $\overline{\mathrm{AC}} = a > 0$ とおく．



$$\overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{AC}} = a \ ,$$

$$\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{AC}} + \overline{\mathrm{CD}} = a + a = 2a \ .$$

三角形 ABD は正三角形なので，

$$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AD}} = 2a > 0 \ .$$

$\angle\mathrm{ACB} = 90^\circ$ なので，直角三角形 ABC において，ピタゴラスの定理により $\overline{\mathrm{AC}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2$ ，よって

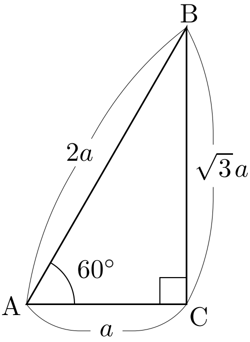
$$\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 - \overline{\mathrm{AC}}^2 = (2a)^2 - a^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2 \ ,$$

$a > 0$ なので

$$\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}\,a \ .$$

こうして直角三角形 ABC について次のようになる：

$$\overline{\mathrm{AB}} = 2a \ , \qquad \overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{3}a \ , \qquad \overline{\mathrm{AC}} = a \ .$$



こうして直角三角形 ABC について次のようになる：

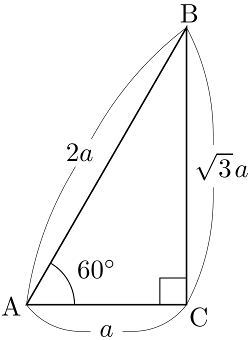
$$\overline{\mathrm{AB}} = 2a \ , \qquad \overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{3}a \ , \qquad \overline{\mathrm{AC}} = a \ .$$

三角形 ABD 直角三角形 ABC において $\angle\mathrm{ACB} = 90^\circ$ ，$\angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$ なので，正弦・余弦・正接の定義により以下の式が導かれる：

$$\sin 60^\circ = \sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ ;$$

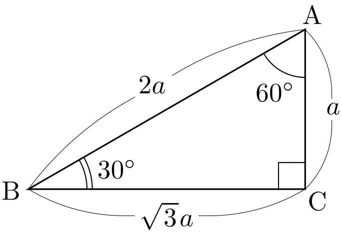
$$\cos 60^\circ = \cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \ ;$$

$$\tan 60^\circ = \tan\angle\mathrm{BAC} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3} \ .$$



更に，直角三角形 ABC において $\angle\mathrm{ACB} = 90^\circ$ ，$\angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$ なので，

$$\angle\mathrm{ABC} = 180^\circ - \angle\mathrm{ACB} - \angle\mathrm{BAC} = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \ .$$



更に，直角三角形 ABC において $\angle\mathrm{ACB} = 90^\circ$ ，$\angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$ なので，

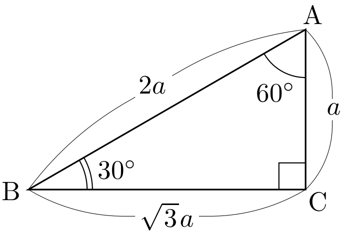
$$\angle\mathrm{ABC} = 180^\circ - \angle\mathrm{ACB} - \angle\mathrm{BAC} = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ\ .$$

従って正弦・余弦・正接の定義により以下の式が導かれる：

$$\sin 30^\circ = \sin\angle\mathrm{ABC} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}\ ;$$

$$\cos 30^\circ = \cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ;$$

$$\tan 30^\circ = \tan\angle\mathrm{ABC} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BC}}} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ .$$

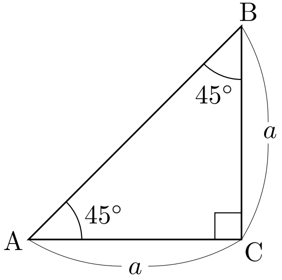


相異なる3点 $\mathrm{A, B, C}$ を頂点とする三角形 ABC について $\angle\mathrm{BAC} = 45^\circ$, $\angle\mathrm{ACB} = 90^\circ$ とする.

$$\angle\mathrm{ABC} = 180^\circ - \angle\mathrm{ACB} - \angle\mathrm{BAC} = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ = \angle\mathrm{BAC} ,$$

従って三角形 ABC は直角二等辺三角形で,

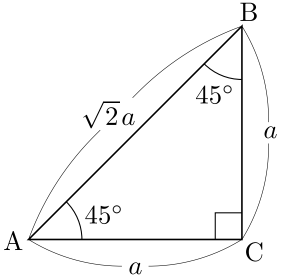
$\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}}$. $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}} = a > 0$ とおく.



相異なる３点 $\mathrm{A,B,C}$ を頂点とする三角形 ABC について $\angle\mathrm{BAC}=45^\circ$ ，$\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$ とする.

$$\angle\mathrm{ABC} = 180^\circ-\angle\mathrm{ACB}-\angle\mathrm{BAC} = 180^\circ-45^\circ-90^\circ = 45^\circ = \angle\mathrm{BAC} \ ,$$

従って三角形 ABC は直角二等辺三角形で，$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$ ． $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}=a>0$ とおく．ピタゴラスの定理により



$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2 = a^2+a^2 = 2a^2 \ ,$$

$a>0$ なので，

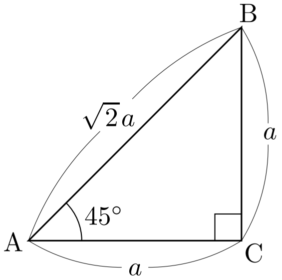
$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} \ .$$

こうして以下の式が導かれる：

$$\sin 45^\circ = \sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,$$

$$\cos 45^\circ = \cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,$$

$$\tan 45^\circ = \tan\angle\mathrm{BAC} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}} = \frac{a}{a} = 1\ .$$



以上の結果をまとめる：

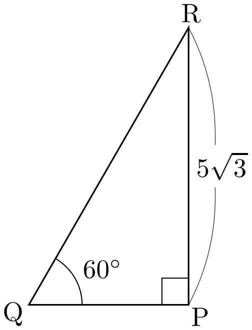
$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}\ , \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\ , \qquad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}\ ;$$

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}\ , \qquad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}\ , \qquad \tan 45^\circ = 1\ ;$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\ , \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}\ , \qquad \tan 60^\circ = \sqrt{3}\ .$$

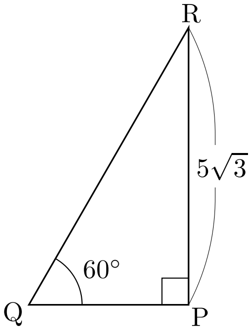
直角三角形の内角の大きさと一辺の長さが分かれば，三角比の値を用いて，他の二辺の長さを求めることができる．

例 相異なる3点 $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ を頂点とする三角形 PQR において，$\angle\mathrm{QPR} = 90^\circ$ かつ $\angle\mathrm{PQR} = 60^\circ$ かつ $\overline{\mathrm{PR}} = 5\sqrt{3}$ とする．他の2辺の長さ $\overline{\mathrm{PQ}}$，$\overline{\mathrm{QR}}$ を求める．



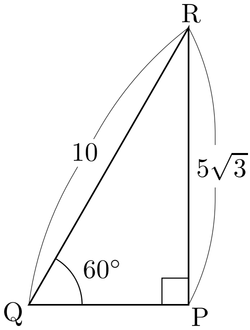
$\boxed{\text{例}}$ 相異なる 3 点 $\mathrm{P,Q,R}$ を頂点とする三角形 PQR において，$\angle\mathrm{QPR}=90^\circ$ かつ $\angle\mathrm{PQR}=60^\circ$ かつ $\overline{\mathrm{PR}}=5\sqrt{3}$ とする．他の 2 辺の長さ $\overline{\mathrm{PQ}}$，$\overline{\mathrm{QR}}$ を求める．正弦の定義により

$$\frac{\overline{\mathrm{PR}}}{\overline{\mathrm{QR}}}=\sin\angle\mathrm{PQR}=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,$$



例 相異なる 3 点 $\mathrm{P},\mathrm{Q},\mathrm{R}$ を頂点とする三角形 PQR において，$\angle\mathrm{QPR} = 90^\circ$ かつ $\angle\mathrm{PQR} = 60^\circ$ かつ $\overline{\mathrm{PR}} = 5\sqrt{3}$ とする．他の 2 辺の長さ $\overline{\mathrm{PQ}}$，$\overline{\mathrm{QR}}$ を求める．正弦の定義により

$$\frac{\overline{\mathrm{PR}}}{\overline{\mathrm{QR}}} = \sin\angle\mathrm{PQR} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ,$$



従って

$$\overline{\mathrm{QR}} = \frac{\overline{\mathrm{PR}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\overline{\mathrm{PR}} = \frac{2}{\sqrt{3}}5\sqrt{3} = 10\ .$$

例 相異なる3点 $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ を頂点とする三角形 PQR において，$\angle \mathrm{QPR} = 90^\circ$ かつ $\angle \mathrm{PQR} = 60^\circ$ かつ $\overline{\mathrm{PR}} = 5\sqrt{3}$ とする．他の2辺の長さ $\overline{\mathrm{PQ}}$，$\overline{\mathrm{QR}}$ を求める．正弦の定義により

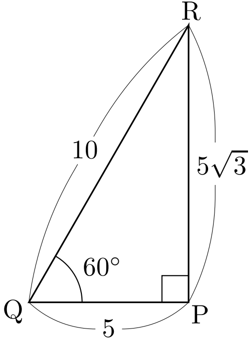
$$\frac{\overline{\mathrm{PR}}}{\overline{\mathrm{QR}}} = \sin\angle \mathrm{PQR} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \ ,$$

従って

$$\overline{\mathrm{QR}} = \frac{\overline{\mathrm{PR}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\overline{\mathrm{PR}} = \frac{2}{\sqrt{3}}5\sqrt{3} = 10 \ .$$

また，ピタゴラスの定理により，

$$\overline{\mathrm{PQ}}^2 = \overline{\mathrm{QR}}^2 - \overline{\mathrm{PR}}^2 = 100 - 75 = 25 \ .$$



例 相異なる 3 点 P, Q, R を頂点とする三角形 PQR において，$\angle\mathrm{QPR} = 90^\circ$ かつ $\angle\mathrm{PQR} = 60^\circ$ かつ $\overline{\mathrm{PR}} = 5\sqrt{3}$ とする．他の 2 辺の長さ $\overline{\mathrm{PQ}}$，$\overline{\mathrm{QR}}$ を求める．正弦の定義により

$$\frac{\overline{\mathrm{PR}}}{\overline{\mathrm{QR}}} = \sin\angle\mathrm{PQR} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \ ,$$

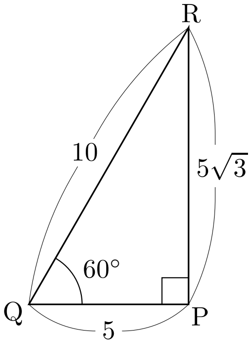
従って

$$\overline{\mathrm{QR}} = \frac{\overline{\mathrm{PR}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\overline{\mathrm{PR}} = \frac{2}{\sqrt{3}}5\sqrt{3} = 10 \ .$$

また，ピタゴラスの定理により，

$$\overline{\mathrm{PQ}}^2 = \overline{\mathrm{QR}}^2 - \overline{\mathrm{PR}}^2 = 100 - 75 = 25 \ .$$

$\overline{\mathrm{PQ}} \geq 0$ なので $\overline{\mathrm{PQ}} = 5$ ．

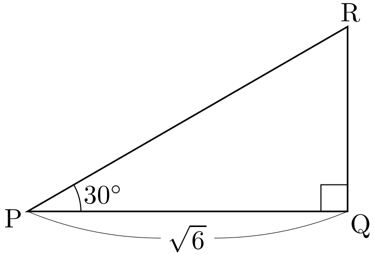


終

$\boxed{問6.1.1}$ 相異なる 3 点 $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ を頂点とする三角形 PQR において，$\angle\mathrm{PQR} = 90^\circ$ かつ $\angle\mathrm{QPR} = 30^\circ$ かつ $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{6}$ とする．他の 2 辺の長さ $\overline{\mathrm{PR}}$，$\overline{\mathrm{QR}}$ を求めよ．

$$\frac{\overline{\mathrm{QR}}}{\overline{\mathrm{PQ}}} =$$

$$\overline{\mathrm{QR}} = \qquad \overline{\mathrm{PQ}} =$$



また，

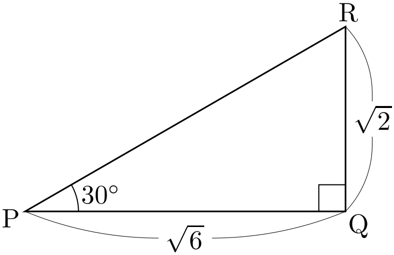
$$\overline{\mathrm{PR}}^2 = \overline{\mathrm{PQ}}^2 + \overline{\mathrm{QR}}^2 = \sqrt{6}^2 + \qquad {}^2$$

$\overline{\mathrm{PR}} \geq 0$ なので $\overline{\mathrm{PR}} = \qquad .$

$\boxed{\text{問}6.1.1}$ 相異なる 3 点 $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ を頂点とする三角形 PQR において，$\angle\mathrm{PQR} = 90^\circ$ かつ $\angle\mathrm{QPR} = 30^\circ$ かつ $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{6}$ とする．他の 2 辺の長さ $\overline{\mathrm{PR}}$，$\overline{\mathrm{QR}}$ を求めよ．

$$\frac{\overline{\mathrm{QR}}}{\overline{\mathrm{PQ}}} = \tan\angle\mathrm{QPR} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} ,$$

$$\overline{\mathrm{QR}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{\mathrm{PQ}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} .$$



また，

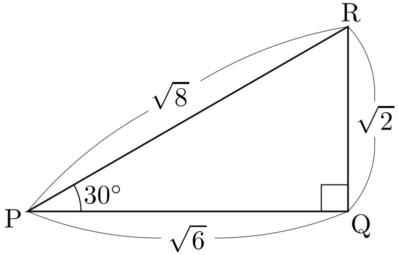
$$\overline{\mathrm{PR}}^2 = \overline{\mathrm{PQ}}^2 + \overline{\mathrm{QR}}^2 = \sqrt{6}^2 + \quad{}^2$$

$\overline{\mathrm{PR}} \geq 0$ なので $\overline{\mathrm{PR}} = \qquad .$

$\boxed{\text{問}6.1.1}$ 相異なる 3 点 $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ を頂点とする三角形 PQR において，$\angle \mathrm{PQR} = 90^\circ$ かつ $\angle \mathrm{QPR} = 30^\circ$ かつ $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{6}$ とする．他の 2 辺の長さ $\overline{\mathrm{PR}}$，$\overline{\mathrm{QR}}$ を求めよ．

$$\frac{\overline{\mathrm{QR}}}{\overline{\mathrm{PQ}}} = \tan \angle \mathrm{QPR} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \ ,$$

$$\overline{\mathrm{QR}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \overline{\mathrm{PQ}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \ .$$



また，

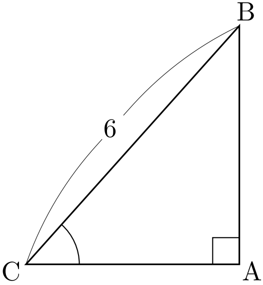
$$\overline{\mathrm{PR}}^2 = \overline{\mathrm{PQ}}^2 + \overline{\mathrm{QR}}^2 = \sqrt{6}^{\,2} + \sqrt{2}^{\,2}$$

$$= 8 \ ,$$

$\overline{\mathrm{PR}} \geq 0$ なので $\overline{\mathrm{PR}} = \sqrt{8}$ ．

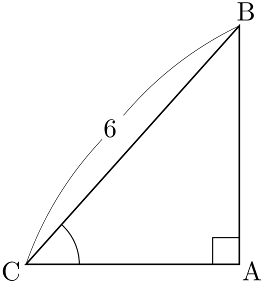
$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{例}$ 相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC において, $\angle\mathrm{BAC} = 90^\circ$ かつ $\cos\angle\mathrm{ACB} = \dfrac{2}{3}$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 6$ とする. 他の 2 辺の長さ $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{AC}}$ を求める.



$\boxed{例}$ 相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC において，$\angle\mathrm{BAC} = 90°$ かつ $\cos\angle\mathrm{ACB} = \dfrac{2}{3}$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 6$ とする．他の 2 辺の長さ $\overline{\mathrm{AB}}$，$\overline{\mathrm{AC}}$ を求める．余弦の定義により

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BC}}} = \cos\angle\mathrm{ACB} = \frac{2}{3} .$$

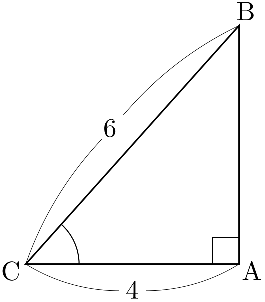


$\boxed{例}$ 相異なる3点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC において，$\angle\mathrm{BAC} = 90^\circ$ かつ $\cos\angle\mathrm{ACB} = \dfrac{2}{3}$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 6$ とする．他の2辺の長さ $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{AC}}$ を求める．余弦の定義により

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BC}}} = \cos\angle\mathrm{ACB} = \frac{2}{3} \ .$$

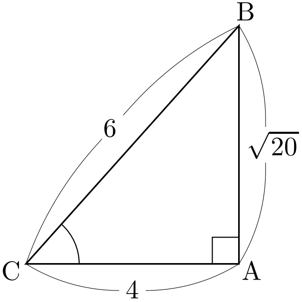
従って

$$\overline{\mathrm{AC}} = \frac{2}{3}\overline{\mathrm{BC}} = \frac{2}{3}\times 6 = 4 \ .$$



$\boxed{\text{例}}$ 相異なる 3 点 $\mathrm{A,B,C}$ を頂点とする三角形 ABC において，$\angle\mathrm{BAC} = 90°$ かつ $\cos\angle\mathrm{ACB} = \dfrac{2}{3}$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 6$ とする．他の 2 辺の長さ $\overline{\mathrm{AB}}$，$\overline{\mathrm{AC}}$ を求める．余弦の定義により

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BC}}} = \cos\angle\mathrm{ACB} = \frac{2}{3} \ .$$



従って

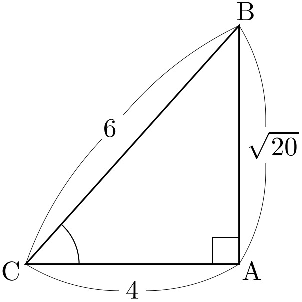
$$\overline{\mathrm{AC}} = \frac{2}{3}\overline{\mathrm{BC}} = \frac{2}{3} \times 6 = 4 \ .$$

また，ピタゴラスの定理により，

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2 - \overline{\mathrm{AC}}^2 = 6^2 - 4^2 = 20 \ .$$

例 相異なる3点 A,B,C を頂点とする三角形 ABC において，$\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$ かつ $\cos\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{2}{3}$ かつ $\overline{\mathrm{BC}}=6$ とする．他の2辺の長さ $\overline{\mathrm{AB}}$，$\overline{\mathrm{AC}}$ を求める．余弦の定義により

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BC}}}=\cos\angle\mathrm{ACB}=\frac{2}{3}\ .$$



従って

$$\overline{\mathrm{AC}}=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{BC}}=\frac{2}{3}\times 6=4\ .$$

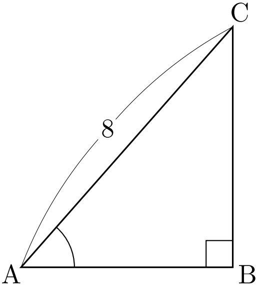
また，ピタゴラスの定理により，

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2-\overline{\mathrm{AC}}^2=6^2-4^2=20\ .$$

$\overline{\mathrm{AB}}\geq 0$ なので，$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{20}$ ．

終

問6.1.2 相異なる 3 点 $\mathrm{A, B, C}$ を頂点とする三角形 ABC において，$\angle \mathrm{ABC} = 90^\circ$ かつ $\overline{\mathrm{AC}} = 8$ かつ $\sin \angle \mathrm{BAC} = \dfrac{3}{4}$ とする．他の 2 辺の長さ $\overline{\mathrm{AB}}$，$\overline{\mathrm{BC}}$ を求めよ．



$$\frac{\overline{\quad\quad}}{\overline{\quad\quad}} = \sin \angle \mathrm{BAC} = \frac{3}{4},$$

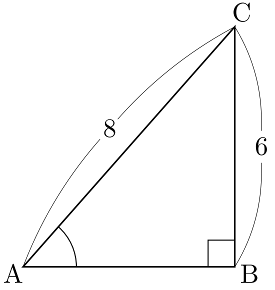
$$\overline{\mathrm{BC}} = \frac{3}{4} \cdot \overline{\quad\quad} = \frac{3}{4} \cdot \quad = \quad .$$

また，

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2 - \overline{\mathrm{BC}}^2 = 8^2 - \quad^2 = \quad ,$$

よって $\overline{\mathrm{AB}} = \quad$.

$\boxed{\text{問}6.1.2}$ 相異なる 3 点 $\mathrm{A,B,C}$ を頂点とする三角形 ABC において，$\angle\mathrm{ABC} = 90^\circ$ かつ $\overline{\mathrm{AC}} = 8$ かつ $\sin\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{3}{4}$ とする．他の 2 辺の長さ $\overline{\mathrm{AB}}$，$\overline{\mathrm{BC}}$ を求めよ．



$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}} = \sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{3}{4} \ ,$$

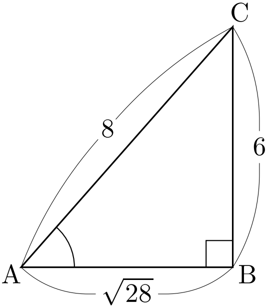
$$\overline{\mathrm{BC}} = \frac{3}{4}\cdot\overline{\mathrm{AC}} = \frac{3}{4}\cdot 8 = 6 \ .$$

また，

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2 - \overline{\mathrm{BC}}^2 = 8^2 - \quad{}^2 = \qquad ,$$

よって $\overline{\mathrm{AB}} = \qquad$.

$\boxed{問6.1.2}$ 相異なる 3 点 $\mathrm{A,B,C}$ を頂点とする三角形 ABC において，$\angle\mathrm{ABC} = 90^\circ$ かつ $\overline{\mathrm{AC}} = 8$ かつ $\sin\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{3}{4}$ とする．他の 2 辺の長さ $\overline{\mathrm{AB}}$，$\overline{\mathrm{BC}}$ を求めよ．



$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}} = \sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{3}{4} \ ,$$

$$\overline{\mathrm{BC}} = \frac{3}{4}\cdot\overline{\mathrm{AC}} = \frac{3}{4}\cdot 8 = 6 \ .$$

また，

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2 - \overline{\mathrm{BC}}^2 = 8^2 - 6^2 = 28 \ ,$$

よって $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{28}$ ．

$\boxed{終}$