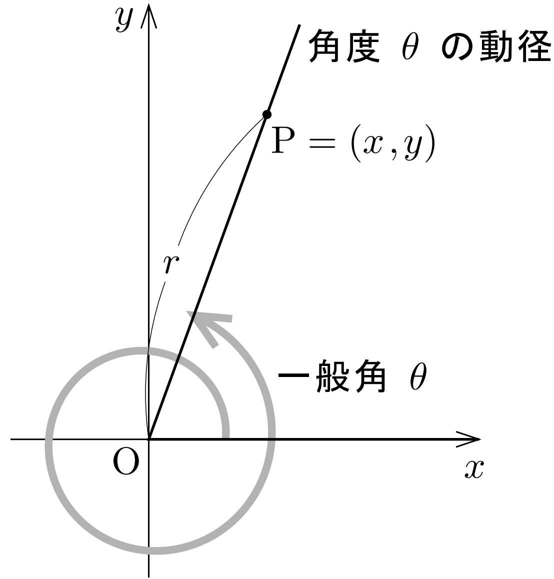
6.4 三角比の性質

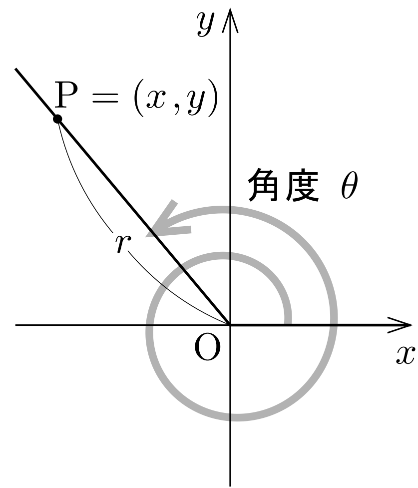
一般角 θ の正弦 $\sin\theta$，余弦 $\cos\theta$，正接 $\tan\theta$ を次のように定義する：xy 座標平面において，原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ を極として x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(x,y)$ （但し $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ）に対して $r=\overline{\mathrm{OP}}$ とおくとき，

$$\sin\theta=\frac{y}{r}\ ,\qquad \cos\theta=\frac{x}{r}\ ,$$

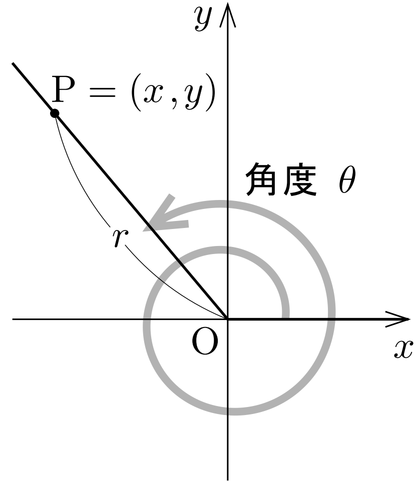
$$x\neq 0 \text{ のとき}\quad \tan\theta=\frac{y}{x}\ .$$



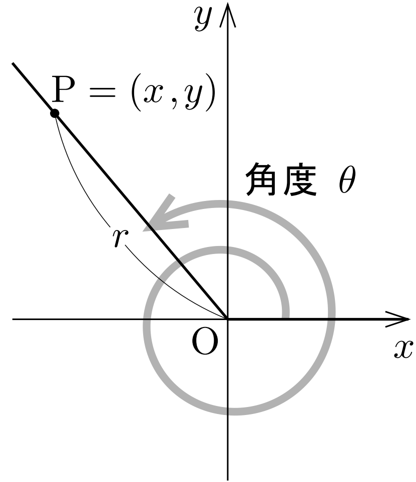
xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(x\,,y)$ （ $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ）をとり， $\overline{\mathrm{OP}}=r$ とおく．



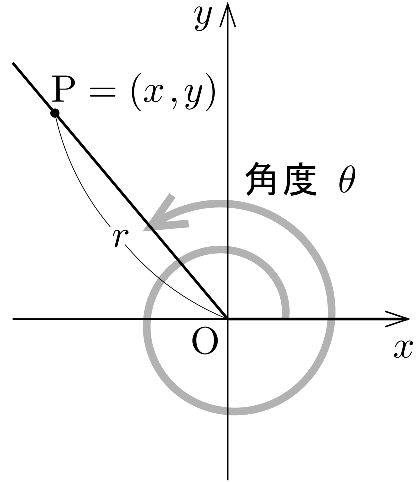
xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(x\,,y)$ （ $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ）をとり， $\overline{\mathrm{OP}}=r$ とおく． θ の正接 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ は $x=0$ のとき値が無い．



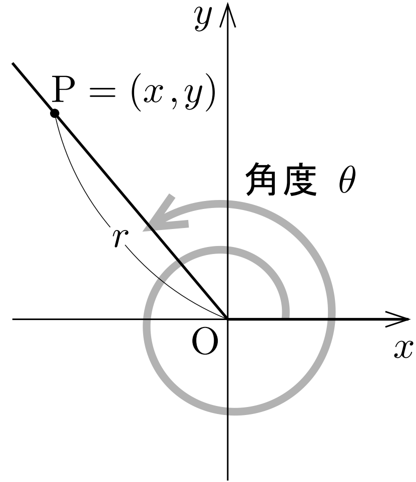
xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(x\,,y)$ （ $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ）をとり， $\overline{\mathrm{OP}}=r$ とおく． θ の正接 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ は $x=0$ のとき値が無い． $x=0$ とすると θ は $\pm 90^\circ, \pm 270^\circ, \pm 450^\circ, \ldots$ などの 90° の奇数倍である．



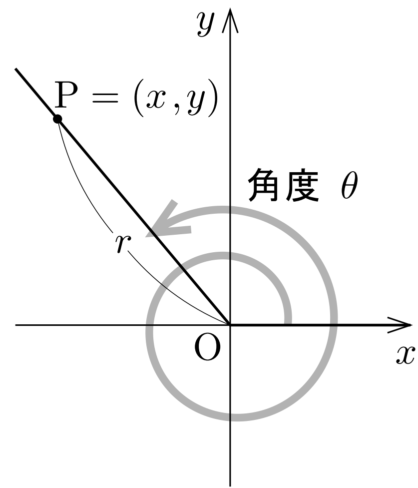
xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(x\,,y)$ （ $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ）をとり， $\overline{\mathrm{OP}}=r$ とおく． θ の正接 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ は $x=0$ のとき値が無い． $x=0$ とすると θ は $\pm 90^\circ,\pm 270^\circ,\pm 450^\circ,\ldots$ などの 90° の奇数倍である．対偶をとると，θ が 90° の奇数倍でないとき $x\neq 0$ ．



xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(x\,,y)$ ($\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$) をとり， $\overline{\mathrm{OP}}=r$ とおく．θ の正接 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ は $x=0$ のとき値が無い．$x=0$ とすると θ は $\pm 90^\circ\,,\pm 270^\circ\,,\pm 450^\circ\,,\ldots$ などの 90° の奇数倍である．対偶をとると，θ が 90° の奇数倍でないとき $x\neq 0$ ．このとき，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ の値があり， $\cos\theta=\dfrac{x}{r}\neq 0$ で，

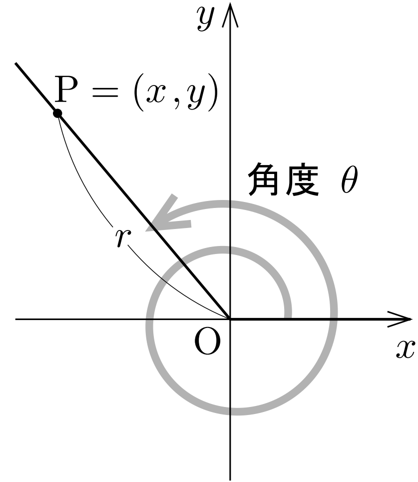


xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(x\,,y)$ （ $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ）をとり， $\overline{\mathrm{OP}}=r$ とおく． θ の正接 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ は $x=0$ のとき値が無い． $x=0$ とすると θ は $\pm 90^\circ\,,\pm 270^\circ\,,\pm 450^\circ\,,\ldots$ などの 90° の奇数倍である．対偶をとると， θ が 90° の奇数倍でないとき $x\neq 0$ ．このとき， $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ の値があり， $\cos\theta=\dfrac{x}{r}\neq 0$ で，



$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\dfrac{y}{r}}{\dfrac{x}{r}}=\frac{\dfrac{y}{r}\cdot r}{\dfrac{x}{r}\cdot r}=\frac{y}{x}=\tan\theta\ .$$

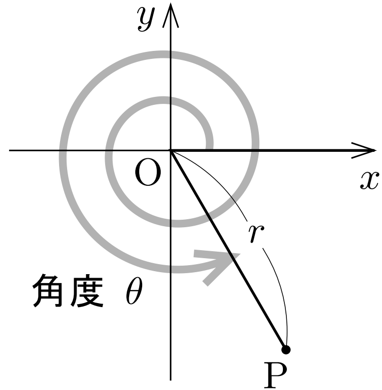
xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(x\,,y)$ ($\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$) をとり， $\overline{\mathrm{OP}}=r$ とおく． θ の正接 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ は $x=0$ のとき値が無い． $x=0$ とすると θ は $\pm 90^\circ\,,\pm 270^\circ\,,\pm 450^\circ\,,\ldots$ などの 90° の奇数倍である．対偶をとると，θ が 90° の奇数倍でないとき $x\neq 0$ ．このとき，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ の値があり， $\cos\theta=\dfrac{x}{r}\neq 0$ で，



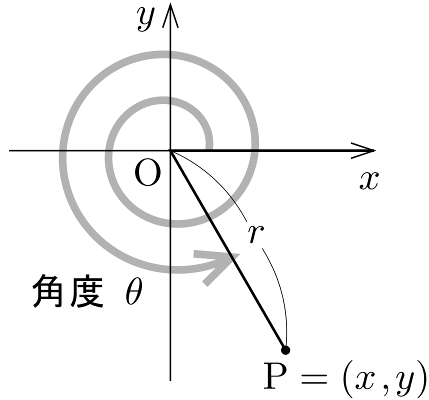
$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\dfrac{y}{r}}{\dfrac{x}{r}}=\frac{\dfrac{y}{r}\cdot r}{\dfrac{x}{r}\cdot r}=\frac{y}{x}=\tan\theta\ .$$

定理　任意の一般角 θ について，θ が角度 90° の奇数倍でないとき $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

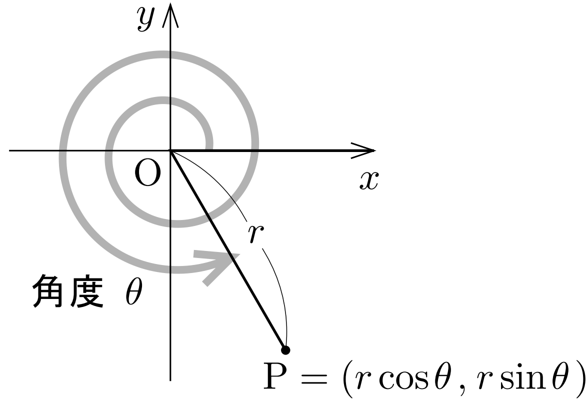
xy 座標平面の点 P について，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の角度が θ であり $\overline{\mathrm{OP}}=r$ とする． $r=\overline{\mathrm{OP}}$ は線分の長さなので $r \geq 0$ ．



xy 座標平面の点 P について，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の角度が θ であり $\overline{\mathrm{OP}} = r$ とする． $r = \overline{\mathrm{OP}}$ は線分の長さなので $r \geq 0$ ． $r > 0$ のとき，$\mathrm{P} = (x\,, y)$ とおくと，余弦と正弦の定義より $\dfrac{x}{r} = \cos\theta$ かつ $\dfrac{y}{r} = \sin\theta$ ，

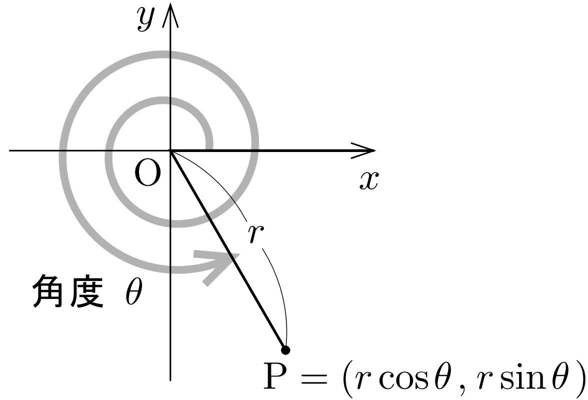


　xy 座標平面の点 P について，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の角度が θ であり $\overline{\mathrm{OP}} = r$ とする． $r = \overline{\mathrm{OP}}$ は線分の長さなので $r \geq 0$ ． $r > 0$ のとき，$\mathrm{P} = (x\,, y)$ とおくと，余弦と正弦の定義より $\dfrac{x}{r} = \cos\theta$ かつ $\dfrac{y}{r} = \sin\theta$ ，よって

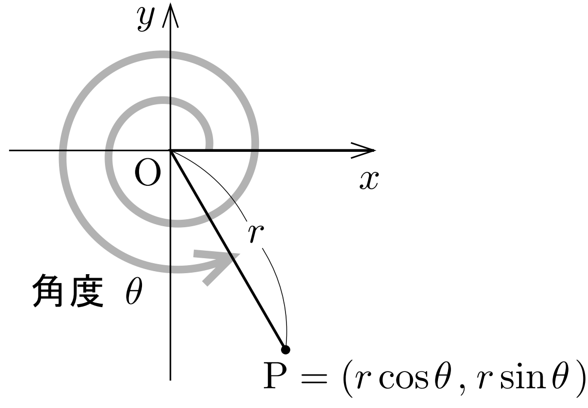


$x = r\cos\theta$ かつ $y = r\sin\theta$ なので， $\mathrm{P} = (x\,, y) = (r\cos\theta\,, r\sin\theta\,)$ ．

xy 座標平面の点 P について，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の角度が θ であり $\overline{\mathrm{OP}} = r$ とする． $r = \overline{\mathrm{OP}}$ は線分の長さなので $r \geq 0$ ． $r > 0$ のとき，$\mathrm{P} = (x\,,y)$ とおくと，余弦と正弦の定義より $\dfrac{x}{r} = \cos\theta$ かつ $\dfrac{y}{r} = \sin\theta$ ，よって $x = r\cos\theta$ かつ $y = r\sin\theta$ なので， $\mathrm{P} = (x\,,y) = (r\cos\theta\,, r\sin\theta)$ ． $r = 0$ のとき， $\overline{\mathrm{OP}} = 0$ なので $\mathrm{P} = \mathrm{O}$ ， $r = 0$ なので $(r\cos\theta\,, r\sin\theta) = (0\,,0) = \mathrm{O}$ ，

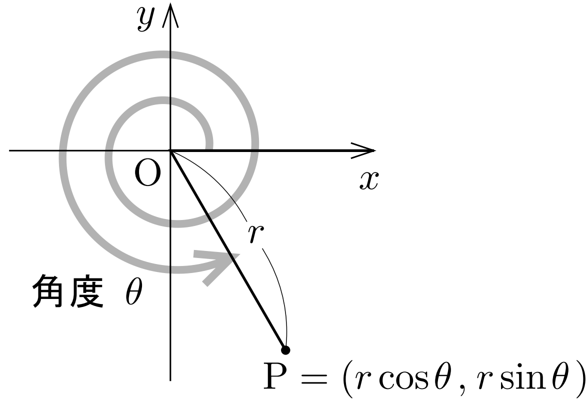


xy 座標平面の点 P について，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の角度が θ であり $\overline{\mathrm{OP}}=r$ とする． $r=\overline{\mathrm{OP}}$ は線分の長さなので $r\geq 0$ ． $r>0$ のとき，$\mathrm{P}=(x,y)$ とおくと，余弦と正弦の定義より $\dfrac{x}{r}=\cos\theta$ かつ $\dfrac{y}{r}=\sin\theta$ ，よって



$x=r\cos\theta$ かつ $y=r\sin\theta$ なので， $\mathrm{P}=(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ ． $r=0$ のとき， $\overline{\mathrm{OP}}=0$ なので $\mathrm{P}=\mathrm{O}$ ， $r=0$ なので $(r\cos\theta,r\sin\theta)=(0,0)=\mathrm{O}$ ，よって $\mathrm{P}=\mathrm{O}=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ ．

xy 座標平面の点 P について，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の角度が θ であり $\overline{\mathrm{OP}} = r$ とする． $r = \overline{\mathrm{OP}}$ は線分の長さなので $r \geq 0$ ． $r > 0$ のとき，$\mathrm{P} = (x, y)$ とおくと，余弦と正弦の定義より $\dfrac{x}{r} = \cos\theta$ かつ $\dfrac{y}{r} = \sin\theta$ ，よって



$x = r\cos\theta$ かつ $y = r\sin\theta$ なので， $\mathrm{P} = (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ ． $r = 0$ のとき， $\overline{\mathrm{OP}} = 0$ なので $\mathrm{P} = \mathrm{O}$ ， $r = 0$ なので $(r\cos\theta, r\sin\theta) = (0, 0) = \mathrm{O}$ ，よって $\mathrm{P} = \mathrm{O} = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ ．

定理 xy 座標平面の点 P について，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の角度が θ であるとき， $\overline{\mathrm{OP}} = r$ とおくと

$$\mathrm{P} = (r\cos\theta, r\sin\theta) \text{ ．}$$

$\boxed{例}$ 点 O を原点とする xy 座標平面の点 P について，線分 OP の始線 Ox に対する角度が 30° で $\overline{\mathrm{OP}} = 5$ とする．点 P を求める．

例 点 O を原点とする xy 座標平面の点 P について，線分 OP の始線 Ox に対する角度が 30° で $\overline{\mathrm{OP}}=5$ とする．点 P を求める．

$\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ，$\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$ なので，

$$\mathrm{P} = (5\cos 30^\circ, 5\sin 30^\circ) = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right) .$$

終

$\boxed{\text{問}6.4.1}$ 点 O を原点とする xy 座標平面の点 P について，線分 OP の始線 Ox に対する角度が 60° で $\overline{\mathrm{OP}}=\dfrac{4}{3}$ とする．点 P を求めよ．

$$\mathrm{P}=\left(\frac{4}{3}\qquad\qquad,\frac{4}{3}\qquad\qquad\right)=\left(\frac{4}{3}\cdot\quad,\frac{4}{3}\cdot\qquad\right)=\left(\qquad,\qquad\right).$$

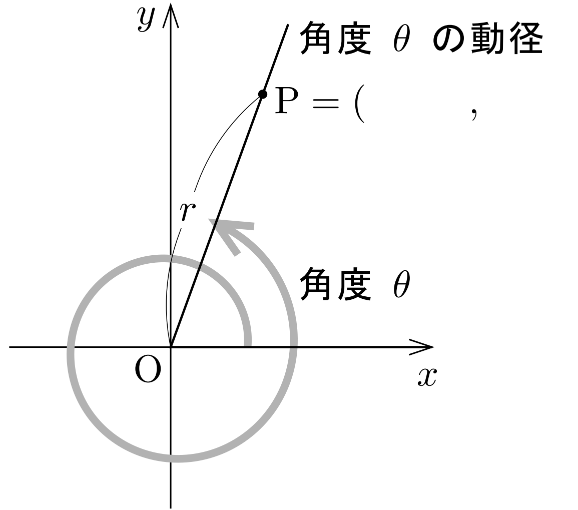
$\boxed{\text{問}6.4.1}$ 点 O を原点とする xy 座標平面の点 P について，線分 OP の始線 Ox に対する角度が $60°$ で $\overline{\mathrm{OP}} = \dfrac{4}{3}$ とする．点 P を求めよ．

$$\mathrm{P} = \left(\frac{4}{3}\cos 60°, \frac{4}{3}\sin 60°\right) = \left(\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right).$$

$\boxed{\text{終}}$

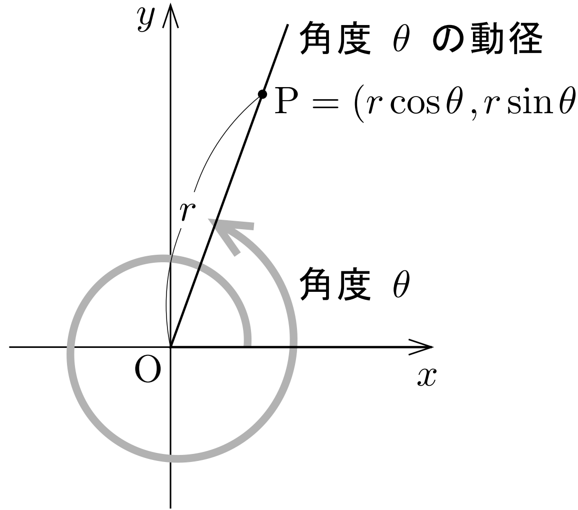
一般角 θ 及び正の実数 r に対して，xy 座標平面において，原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ を極として x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}}=r$ である点をとると，

$$\mathrm{P}=(\qquad\qquad,\qquad\qquad).$$



一般角 θ 及び正の実数 r に対して，xy 座標平面において，原点 $\mathrm{O} = (0,0)$ を極として x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}} = r$ である点をとると，

$$\mathrm{P} = (r\cos\theta, r\sin\theta)\ .$$

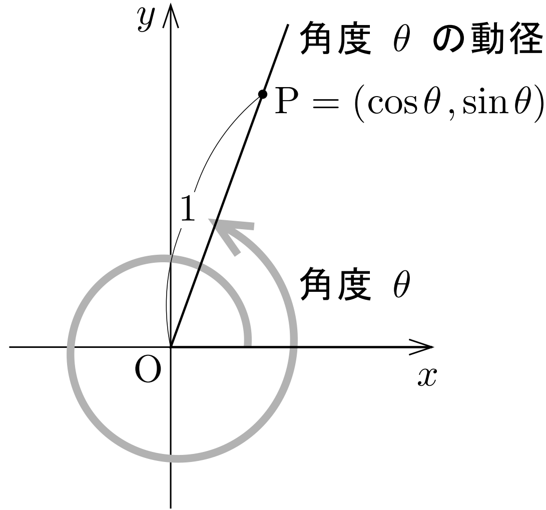


　一般角 θ 及び正の実数 r に対して，xy 座標平面において，原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ を極として x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}}=r$ である点をとると，

$$\mathrm{P}=(r\cos\theta, r\sin\theta)\ .$$

$r=\overline{\mathrm{OP}}=1$ とすると

$$\mathrm{P}=(\cos\theta, \sin\theta)\ .$$

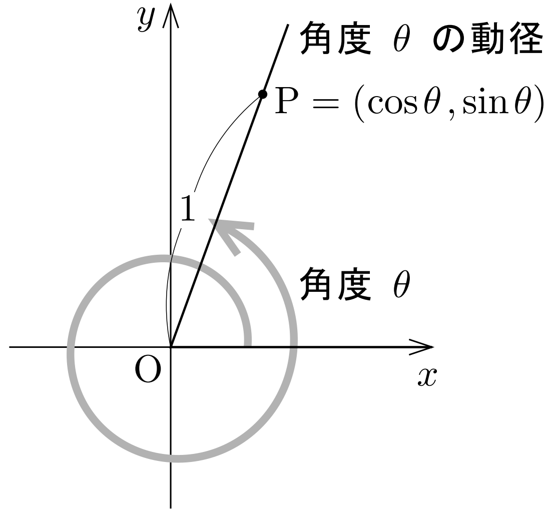


一般角 θ 及び正の実数 r に対して，xy 座標平面において，原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ を極として x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}}=r$ である点をとると，

$$\mathrm{P} = (r\cos\theta, r\sin\theta)\ .$$

$r=\overline{\mathrm{OP}}=1$ とすると

$$\mathrm{P} = (\cos\theta, \sin\theta)\ .$$

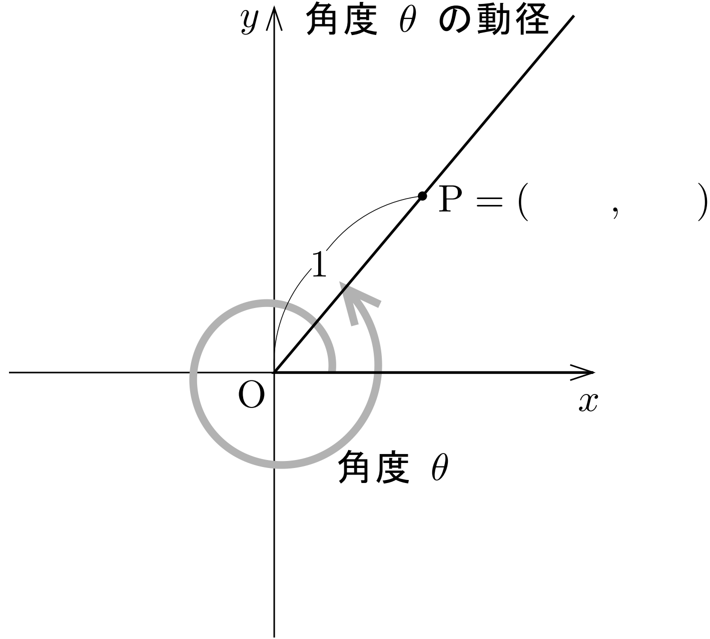


定理　一般角 θ に対して，xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}}=1$ である点をとると，

$$\mathrm{P} = (\cos\theta, \sin\theta)\ .$$

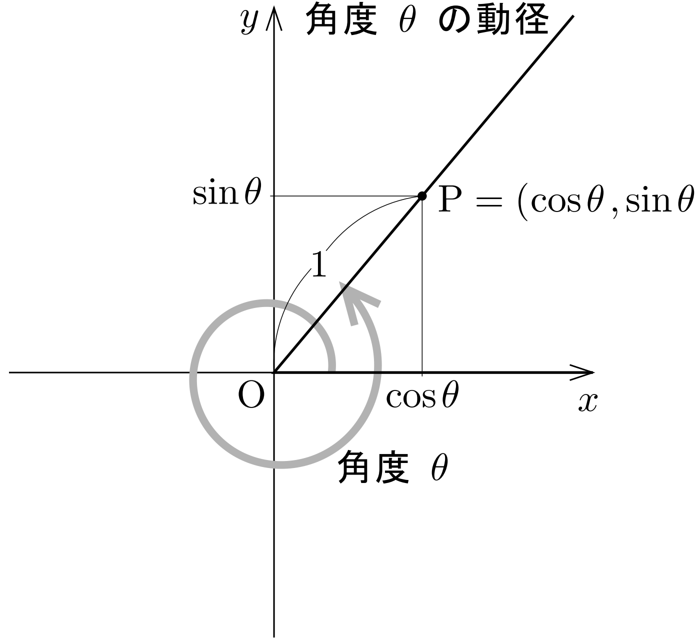
xy 座標平面において，原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ を極として x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}}=1$ である点をとる．

$$\mathrm{P}=(\qquad,\qquad).$$



xy 座標平面において，原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ を極として x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}}=1$ である点をとる．

$$\mathrm{P}=(\cos\theta,\sin\theta)\ .$$



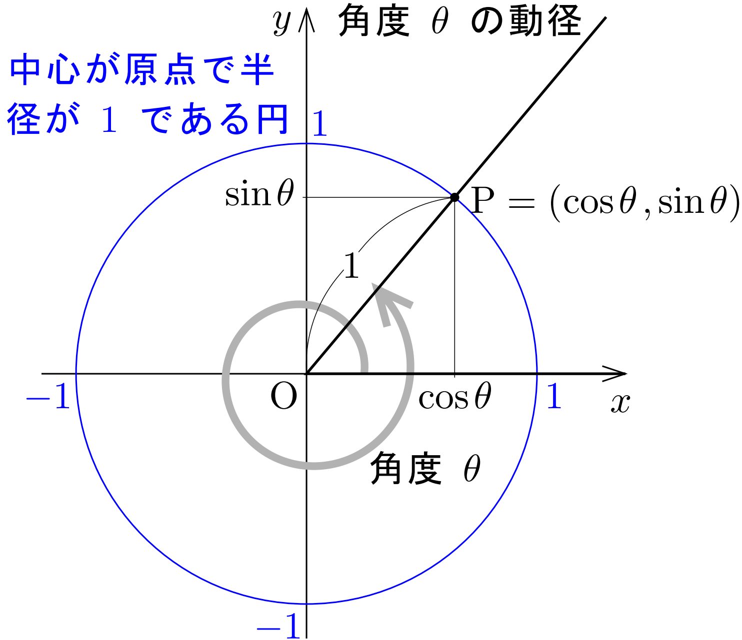
xy 座標平面において，原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ を極として x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}}=1$ である点をとる．

$$\mathrm{P}=(\cos\theta,\sin\theta)\ .$$

P は中心が原点 O で半径が 1 である円に属すので，

$$\quad\le\sin\theta\le\quad,$$

$$\quad\le\cos\theta\le\quad.$$



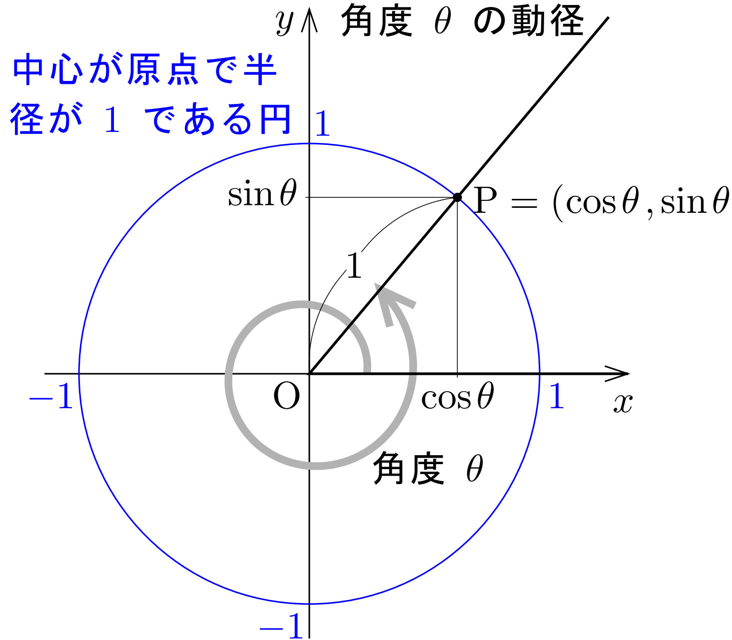
xy 座標平面において，原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ を極として x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}}=1$ である点をとる.

$$\mathrm{P}=(\cos\theta,\sin\theta)\ .$$

P は中心が原点 O で半径が 1 である円に属すので,

$$-1\leq\sin\theta\leq1\ ,$$

$$-1\leq\cos\theta\leq1\ .$$



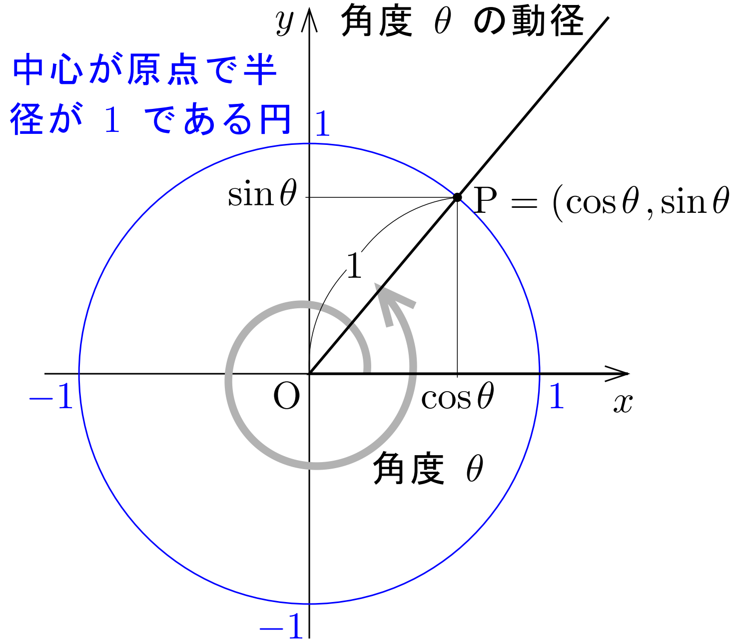
xy 座標平面において，原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ を極として x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}}=1$ である点をとる．

$$\mathrm{P}=(\cos\theta,\sin\theta)\ .$$

P は中心が原点 O で半径が 1 である円に属すので，

$$-1\le\sin\theta\le1\ ,$$

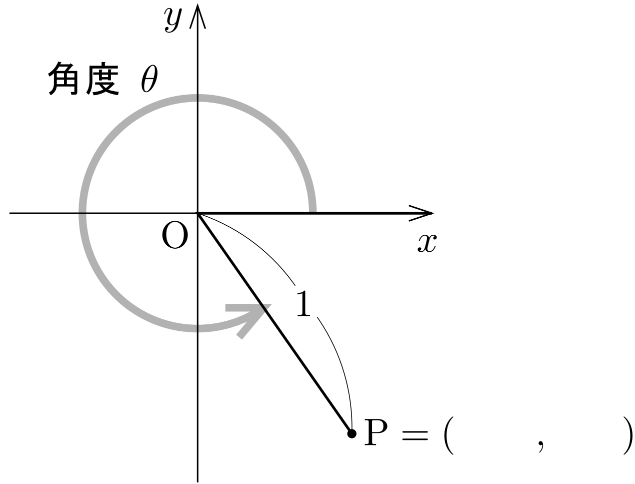
$$-1\le\cos\theta\le1\ .$$



定理　任意の一般角 θ について，$-1\le\sin\theta\le1$ ，$-1\le\cos\theta\le1$ ．

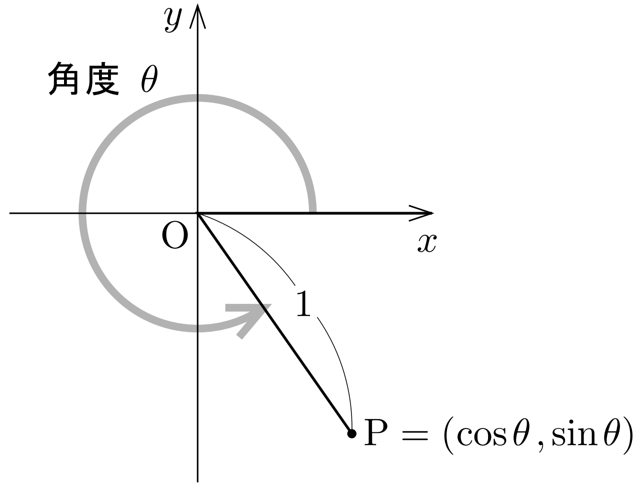
xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}} = 1$ である点をとる.

$$\mathrm{P} = (\qquad , \qquad).$$



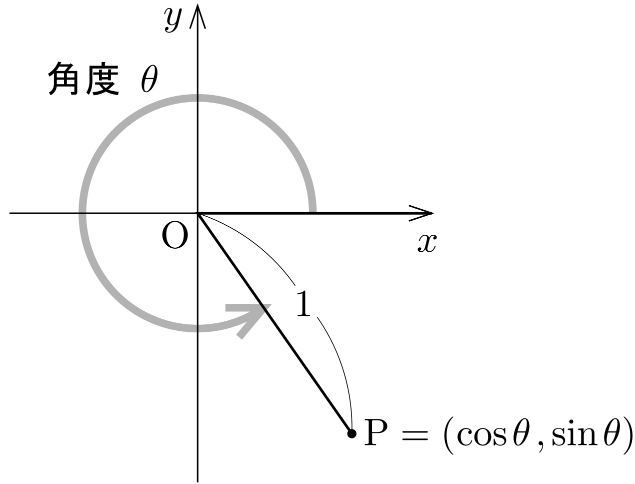
xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}} = 1$ である点をとる．

$$\mathrm{P} = (\cos\theta, \sin\theta) \ .$$



xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}} = 1$ である点をとる．

$$\mathrm{P} = (\cos\theta, \sin\theta) \ .$$

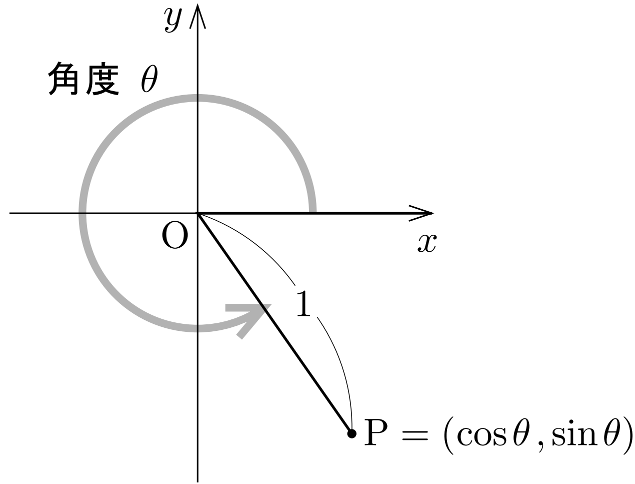


$\mathrm{O} = (0, 0)$ なので，

$$\overline{\mathrm{OP}}^2 = \qquad ,$$

xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}} = 1$ である点をとる.

$$\mathrm{P} = (\cos\theta, \sin\theta) \ .$$

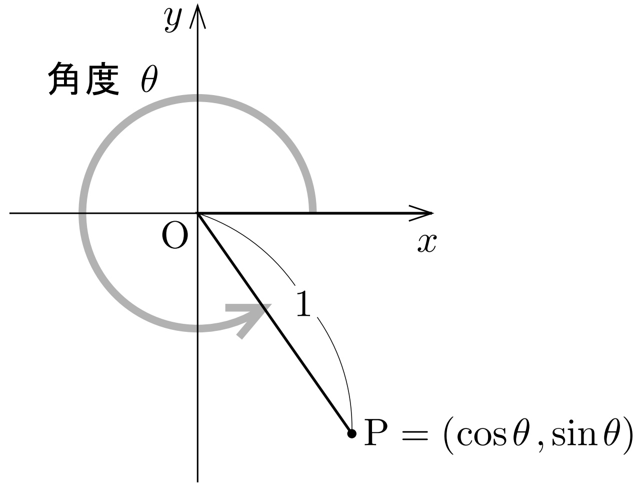


$\mathrm{O} = (0, 0)$ なので，

$$\overline{\mathrm{OP}}^2 = (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 \ ,$$

xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}}=1$ である点をとる．

$$\mathrm{P} = (\cos\theta, \sin\theta)\ .$$



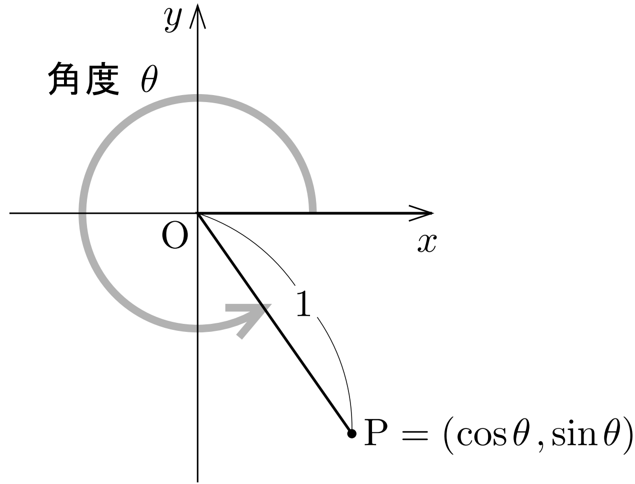
$\mathrm{O}=(0,0)$ なので，

$$\overline{\mathrm{OP}}^2 = (\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2\ ,$$

$\overline{\mathrm{OP}}^2=1$ なので

$$(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2 = 1\ .$$

xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属する点 P で $\overline{\mathrm{OP}} = 1$ である点をとる．



$$\mathrm{P} = (\cos\theta, \sin\theta) \ .$$

$\mathrm{O} = (0, 0)$ なので，

$$\overline{\mathrm{OP}}^2 = (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 \ ,$$

$\overline{\mathrm{OP}}^2 = 1$ なので

$$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1 \ .$$

定理　任意の一般角 θ について

$$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 一般角 θ について $\sin\theta = \dfrac{5}{7}$ かつ $\cos\theta \geq 0$ とする. $\cos\theta$ 及び $\tan\theta$ の値を求める.

$\boxed{\text{例}}$ 一般角 θ について $\sin\theta = \dfrac{5}{7}$ かつ $\cos\theta \geq 0$ とする. $\cos\theta$ 及び $\tan\theta$ の値を求める.

$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$. $\sin\theta = \dfrac{5}{7}$ なので,

$$(\cos\theta)^2 = 1 - (\sin\theta)^2 = 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2 = 1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49} \ ,$$

例 一般角 θ について $\sin\theta = \dfrac{5}{7}$ かつ $\cos\theta \geq 0$ とする．$\cos\theta$ 及び $\tan\theta$ の値を求める．

$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ ． $\sin\theta = \dfrac{5}{7}$ なので，

$$(\cos\theta)^2 = 1 - (\sin\theta)^2 = 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2 = 1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49} \ ,$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{24}{49}} = \pm\frac{\sqrt{24}}{7} \ ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 一般角 θ について $\sin\theta = \dfrac{5}{7}$ かつ $\cos\theta \geq 0$ とする. $\cos\theta$ 及び $\tan\theta$ の値を求める.

$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$. $\sin\theta = \dfrac{5}{7}$ なので,

$$(\cos\theta)^2 = 1 - (\sin\theta)^2 = 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2 = 1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49} \ ,$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{24}{49}} = \pm\frac{\sqrt{24}}{7} \ ,$$

$\cos\theta \geq 0$ なので $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{24}}{7}$.

例 一般角 θ について $\sin\theta = \dfrac{5}{7}$ かつ $\cos\theta \geq 0$ とする．$\cos\theta$ 及び $\tan\theta$ の値を求める．

$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ ． $\sin\theta = \dfrac{5}{7}$ なので，

$$(\cos\theta)^2 = 1 - (\sin\theta)^2 = 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2 = 1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49} \ ,$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{24}{49}} = \pm\frac{\sqrt{24}}{7} \ ,$$

$\cos\theta \geq 0$ なので $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{24}}{7}$ ． 更に，

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{5}{7}}{\frac{\sqrt{24}}{7}} = \frac{5}{\sqrt{24}} \ .$$

終

$\boxed{問6.4.2}$ 一般角 θ について $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ かつ $\cos\theta \leq 0$ とする． $\cos\theta$ 及び $\tan\theta$ の値を求めよ．

$$(\cos\theta)^2 = 1 - (\sin\theta)^2 = 1 - \left(\qquad \right)^2 = 1 - \qquad = \qquad ,$$

$\cos\theta \leq 0$ なので $\cos\theta = \qquad\qquad = \qquad .$ 更に，

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \qquad \Big/ \qquad = \qquad .$$

$\boxed{問 6.4.2}$ 一般角 θ について $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ かつ $\cos\theta \leq 0$ とする．$\cos\theta$ 及び $\tan\theta$ の値を求めよ．

$$(\cos\theta)^2 = 1 - (\sin\theta)^2 = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} ,$$

$\cos\theta \leq 0$ なので $\cos\theta = -\sqrt{\dfrac{9}{25}} = -\dfrac{3}{5}$ ．更に，

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{4}{5}\Big/\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{3} .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}6.4.3}$ 一般角 θ について $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ かつ $\sin\theta \geq 0$ とする． $\sin\theta$ 及び $\tan\theta$ の値を求めよ．

$$(\sin\theta)^2 = 1 - (\qquad\quad)^2 = 1 - \left(\quad\right)^2 = 1 - \qquad = \qquad ,$$

$\sin\theta \geq 0$ なので $\sin\theta = \qquad\quad = \qquad\quad .$ 更に，

$$\tan\theta = \frac{\qquad}{\qquad} = \qquad \Big/ \qquad = \qquad .$$

$\boxed{問 6.4.3}$ 一般角 θ について $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ かつ $\sin\theta \geq 0$ とする． $\sin\theta$ 及び $\tan\theta$ の値を求めよ．

$$(\sin\theta)^2 = 1 - (\cos\theta)^2 = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \ ,$$

$\sin\theta \geq 0$ なので $\sin\theta = \sqrt{\dfrac{8}{9}} = \dfrac{\sqrt{8}}{3}$ ． 更に，

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{8}}{3} \Big/ \frac{1}{3} = \sqrt{8} \ .$$

$\boxed{終}$

一般角 θ は角度 90° の奇数倍でないとする．このとき $\cos\theta \neq 0$ ．

一般角 θ は角度 90° の奇数倍でないとする．このとき $\cos\theta \neq 0$ ．公式 $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ の両辺を $(\cos\theta)^2$ で割ると，

$$\frac{(\sin\theta)^2}{(\cos\theta)^2} + \frac{(\cos\theta)^2}{(\cos\theta)^2} = \frac{1}{(\cos\theta)^2} \ ,$$

一般角 θ は角度 90° の奇数倍でないとする．このとき $\cos\theta \neq 0$ ．公式 $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ の両辺を $(\cos\theta)^2$ で割ると，

$$\frac{(\sin\theta)^2}{(\cos\theta)^2} + \frac{(\cos\theta)^2}{(\cos\theta)^2} = \frac{1}{(\cos\theta)^2} \ ,$$

この等式の左辺は

$$\frac{(\sin\theta)^2}{(\cos\theta)^2} + \frac{(\cos\theta)^2}{(\cos\theta)^2} = \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 + 1 = (\tan\theta)^2 + 1 = 1 + (\tan\theta)^2 \ ,$$

一般角 θ は角度 90° の奇数倍でないとする．このとき $\cos\theta \neq 0$ ．公式 $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ の両辺を $(\cos\theta)^2$ で割ると，

$$\frac{(\sin\theta)^2}{(\cos\theta)^2} + \frac{(\cos\theta)^2}{(\cos\theta)^2} = \frac{1}{(\cos\theta)^2} \ ,$$

この等式の左辺は

$$\frac{(\sin\theta)^2}{(\cos\theta)^2} + \frac{(\cos\theta)^2}{(\cos\theta)^2} = \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 + 1 = (\tan\theta)^2 + 1 = 1 + (\tan\theta)^2 \ ,$$

よって $1 + (\tan\theta)^2 = \dfrac{1}{(\cos\theta)^2}$ ．

一般角 θ は角度 90° の奇数倍でないとする．このとき $\cos\theta \neq 0$ ．公式 $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ の両辺を $(\cos\theta)^2$ で割ると，

$$\frac{(\sin\theta)^2}{(\cos\theta)^2} + \frac{(\cos\theta)^2}{(\cos\theta)^2} = \frac{1}{(\cos\theta)^2} ,$$

この等式の左辺は

$$\frac{(\sin\theta)^2}{(\cos\theta)^2} + \frac{(\cos\theta)^2}{(\cos\theta)^2} = \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 + 1 = (\tan\theta)^2 + 1 = 1 + (\tan\theta)^2 ,$$

よって $1 + (\tan\theta)^2 = \dfrac{1}{(\cos\theta)^2}$ ．

定理　任意の一般角 θ について，

$$\theta \text{ が角度 } 90^\circ \text{ の奇数倍でないとき } 1 + (\tan\theta)^2 = \frac{1}{(\cos\theta)^2} .$$

$\boxed{\text{例}}$ 一般角 θ について $\tan\theta = 3$ かつ $\cos\theta \leq 0$ とする. $\cos\theta$ 及び $\sin\theta$ の値を求める.

$\boxed{\text{例}}$ 一般角 θ について $\tan\theta = 3$ かつ $\cos\theta \leq 0$ とする. $\cos\theta$ 及び $\sin\theta$ の値を求める.

$$1 + (\tan\theta)^2 = \frac{1}{(\cos\theta)^2}\ .$$ $\tan\theta = 3$ なので,

$$\frac{1}{(\cos\theta)^2} = 1 + (\tan\theta)^2 = 1 + 3^2 = 10\ ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 一般角 θ について $\tan\theta = 3$ かつ $\cos\theta \leq 0$ とする. $\cos\theta$ 及び $\sin\theta$ の値を求める.

$$1 + (\tan\theta)^2 = \frac{1}{(\cos\theta)^2} \ .$$ $\tan\theta = 3$ なので,

$$\frac{1}{(\cos\theta)^2} = 1 + (\tan\theta)^2 = 1 + 3^2 = 10 \ ,$$

$$(\cos\theta)^2 = \frac{1}{10} \ ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 一般角 θ について $\tan\theta = 3$ かつ $\cos\theta \leq 0$ とする. $\cos\theta$ 及び $\sin\theta$ の値を求める.

$1 + (\tan\theta)^2 = \dfrac{1}{(\cos\theta)^2}$. $\tan\theta = 3$ なので,

$$\frac{1}{(\cos\theta)^2} = 1 + (\tan\theta)^2 = 1 + 3^2 = 10 \ ,$$

$$(\cos\theta)^2 = \frac{1}{10} \ ,$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{10}} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} \ ,$$

$\boxed{例}$ 一般角 θ について $\tan\theta = 3$ かつ $\cos\theta \leq 0$ とする. $\cos\theta$ 及び $\sin\theta$ の値を求める.

$1 + (\tan\theta)^2 = \dfrac{1}{(\cos\theta)^2}$. $\tan\theta = 3$ なので,

$$\frac{1}{(\cos\theta)^2} = 1 + (\tan\theta)^2 = 1 + 3^2 = 10 \ ,$$

$$(\cos\theta)^2 = \frac{1}{10} \ ,$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{10}} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} \ ,$$

$\cos\theta \leq 0$ なので $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

例 一般角 θ について $\tan\theta = 3$ かつ $\cos\theta \leq 0$ とする．$\cos\theta$ 及び $\sin\theta$ の値を求める．

$1 + (\tan\theta)^2 = \dfrac{1}{(\cos\theta)^2}$ ． $\tan\theta = 3$ なので，

$$\frac{1}{(\cos\theta)^2} = 1 + (\tan\theta)^2 = 1 + 3^2 = 10 \ ,$$

$$(\cos\theta)^2 = \frac{1}{10} \ ,$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{10}} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} \ ,$$

$\cos\theta \leq 0$ なので $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ ．更に，$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ なので，

$$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = 3\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{10}} \ .$$

終

$\boxed{問6.4.4}$ 一般角 θ について $\tan\theta = \dfrac{3}{2}$ かつ $\cos\theta \leq 0$ とする．$\cos\theta$ 及び $\sin\theta$ の値を求めよ．

$$\frac{1}{(\cos\theta)^2} = 1 + (\qquad)^2 = 1 + \left(\quad\right)^2 = \qquad ,$$

$$(\cos\theta)^2 = \qquad ,$$

$\cos\theta \leq 0$ なので $\cos\theta = \qquad\qquad = \qquad\qquad$．更に，$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ なので，

$$\sin\theta = \qquad\qquad = \quad\cdot\qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

$\boxed{問6.4.4}$ 一般角 θ について $\tan\theta = \dfrac{3}{2}$ かつ $\cos\theta \leq 0$ とする．$\cos\theta$ 及び $\sin\theta$ の値を求めよ．

$$\frac{1}{(\cos\theta)^2} = 1 + (\tan\theta)^2 = 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4} \ ,$$

$$(\cos\theta)^2 = \frac{4}{13} \ ,$$

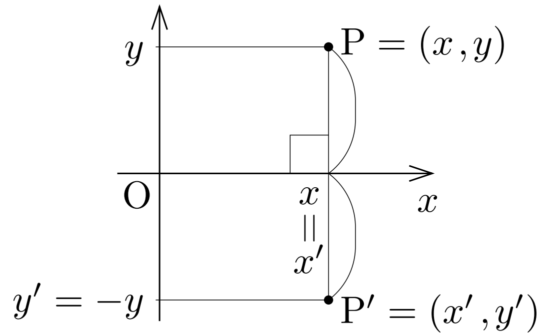
$\cos\theta \leq 0$ なので $\cos\theta = -\sqrt{\dfrac{4}{13}} = -\dfrac{2}{\sqrt{13}}$ ．更に， $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ なので，

$$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{13}} \ .$$

$\boxed{終}$

xy 座標平面の原点を O とおく．点 $\mathrm{P}' = (x', y')$ が点 $\mathrm{P} = (x, y)$ と x 軸に関して対称であるとき，

$$x' = x \ , \qquad y' = -y \ .$$

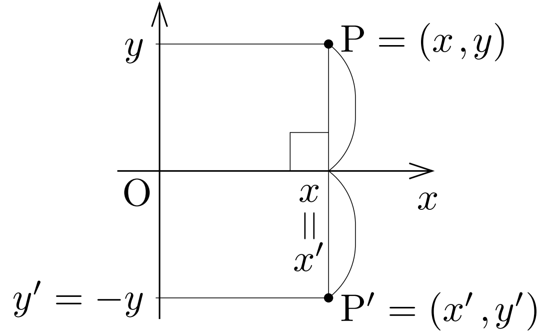


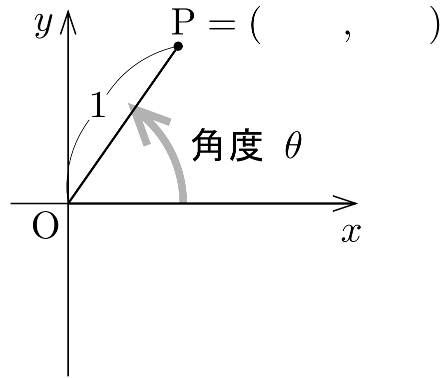
xy 座標平面の原点を O とおく．点 $\mathrm{P}' = (x', y')$ が点 $\mathrm{P} = (x, y)$ と x 軸に関して対称であるとき，

$$x' = x \ , \qquad y' = -y \ .$$

始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}} = 1$ である点をとる．

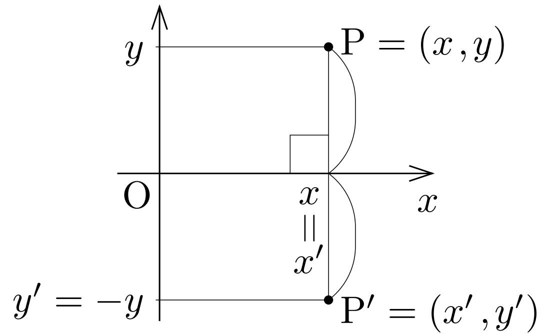
$$\mathrm{P} = (\qquad , \qquad) \ .$$





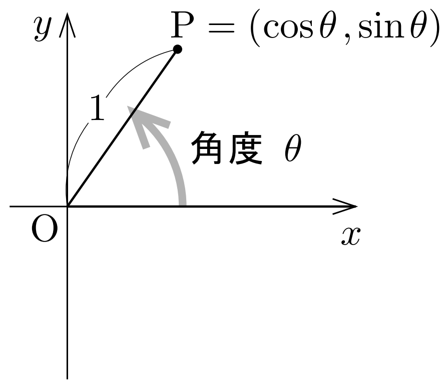
xy 座標平面の原点を O とおく．点 $\mathrm{P}' = (x', y')$ が点 $\mathrm{P} = (x, y)$ と x 軸に関して対称であるとき，

$$x' = x\ , \qquad y' = -y\ .$$



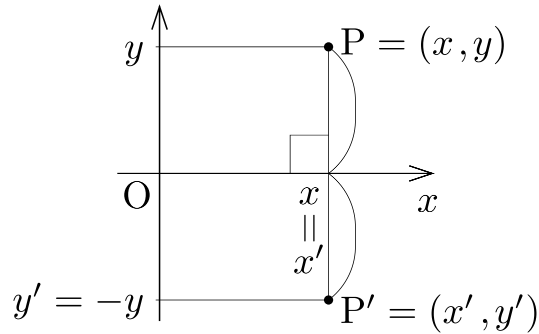
始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}} = 1$ である点をとる．

$$\mathrm{P} = (\cos\theta, \sin\theta)\ .$$



xy 座標平面の原点を O とおく．点 $\mathrm{P}' = (x', y')$ が点 $\mathrm{P} = (x, y)$ と x 軸に関して対称であるとき，

$$x' = x\ , \qquad y' = -y\ .$$

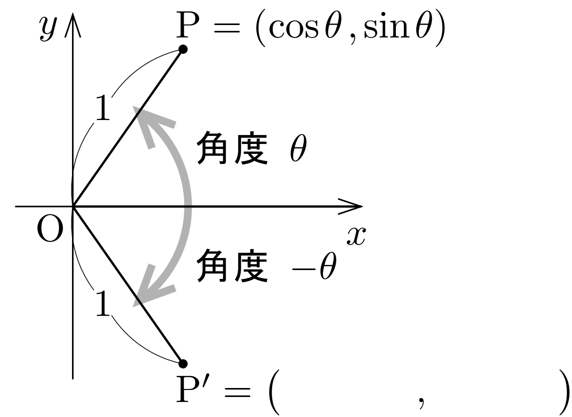


始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}} = 1$ である点をとる．

$$\mathrm{P} = (\cos\theta, \sin\theta)\ .$$

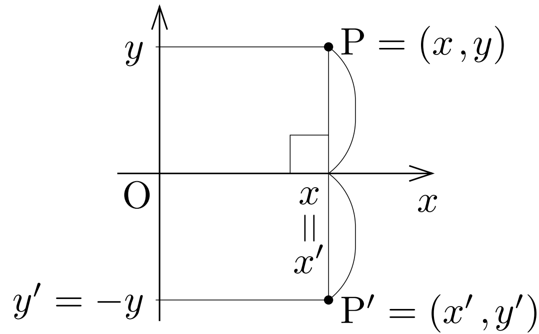
始線 Ox に対する角度 $-\theta$ の動径に属す点 P′ で $\overline{\mathrm{OP'}} = 1$ である点をとる．

$$\mathrm{P}' = (\qquad\qquad , \qquad\qquad)\ .$$



xy 座標平面の原点を O とおく. 点 $\mathrm{P}' = (x', y')$ が点 $\mathrm{P} = (x, y)$ と x 軸に関して対称であるとき,

$$x' = x \ , \qquad y' = -y \ .$$

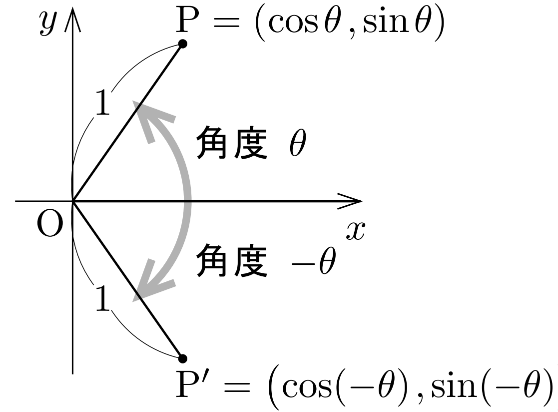


始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}} = 1$ である点をとる.

$$\mathrm{P} = (\cos\theta, \sin\theta) \ .$$

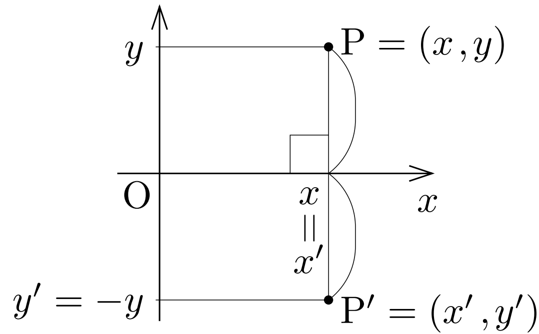
始線 Ox に対する角度 $-\theta$ の動径に属す点 P' で $\overline{\mathrm{OP}'} = 1$ である点をとる.

$$\mathrm{P}' = \bigl(\cos(-\theta), \sin(-\theta)\bigr) \ .$$



xy 座標平面の原点を O とおく. 点 $\mathrm{P}' = (x', y')$ が点 $\mathrm{P} = (x, y)$ と x 軸に関して対称であるとき,

$$x' = x \ , \qquad y' = -y \ .$$

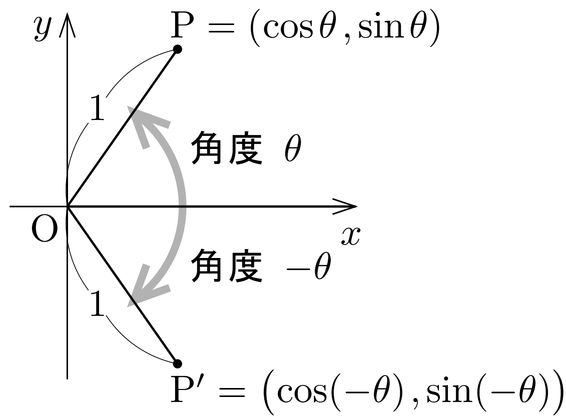


始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}} = 1$ である点をとる.

$$\mathrm{P} = (\cos\theta, \sin\theta) \ .$$

始線 Ox に対する角度 $-\theta$ の動径に属す点 P$'$ で $\overline{\mathrm{OP'}} = 1$ である点をとる.

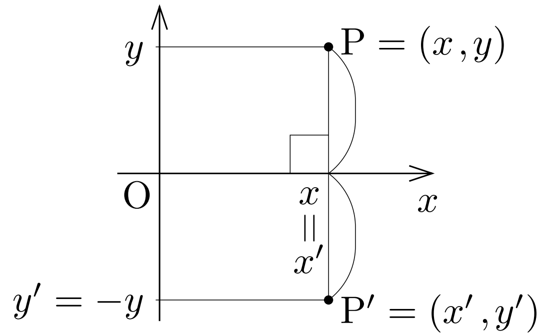
$$\mathrm{P}' = \big(\cos(-\theta), \sin(-\theta)\big) \ .$$



点 P$'$ は点 P と x 軸に関して対称なので,

$$\cos(-\theta) = \qquad\qquad , \qquad \sin(-\theta) = \qquad\qquad .$$

xy 座標平面の原点を O とおく. 点 $\mathrm{P}' = (x', y')$ が点 $\mathrm{P} = (x, y)$ と x 軸に関して対称であるとき,



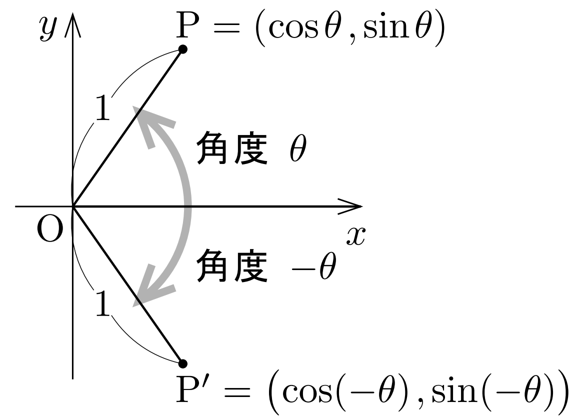
$$x' = x \ , \qquad y' = -y \ .$$

始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}} = 1$ である点をとる.

$$\mathrm{P} = (\cos\theta, \sin\theta) \ .$$

始線 Ox に対する角度 $-\theta$ の動径に属す点 P' で $\overline{\mathrm{OP}'} = 1$ である点をとる.

$$\mathrm{P}' = \big(\cos(-\theta), \sin(-\theta)\big) \ .$$



点 P' は点 P と x 軸に関して対称なので,

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \ , \qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta \ .$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \ , \qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta \ .$$

更に，θ が 90° の奇数倍でないとき，

$$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta \ .$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \ , \qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta \ .$$

更に, θ が 90° の奇数倍でないとき,

$$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta \ .$$

　このように次の定理が成り立つ.

定理　任意の一般角 θ について,

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \ , \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta \ ,$$

$$\theta \text{ が } 90^\circ \text{ の奇数倍でないとき} \quad \tan(-\theta) = -\tan\theta \ .$$