6.5 加法定理

加法定理といわれる次の定理がある：任意の一般角 α と β とについて，

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \ ,$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \ ,$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \ ,$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \ .$$

この加法定理は重要な定理である．

加法定理といわれる次の定理がある：任意の一般角 α と β とについて,

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\ ,$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\ ,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\ ,$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\ .$$

この加法定理は重要な定理である．通常は次のように述べられる．

定理（正弦と余弦の加法定理） 任意の一般角 α と β とについて,

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \quad （複号同順）.$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta \quad （複号同順）.$$

余弦の加法定理において左辺と右辺とで含まれる複号が異なることに注意すること．

加法定理を用いて $\sin 75^\circ$ 及び $\cos 75^\circ$ を計算する.

加法定理を用いて $\sin 75^\circ$ 及び $\cos 75^\circ$ を計算する.

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ)$$

加法定理を用いて $\sin 75^\circ$ 及び $\cos 75^\circ$ を計算する.

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

加法定理を用いて $\sin 75^\circ$ 及び $\cos 75^\circ$ を計算する.

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\ , \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\ , \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}\ , \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

これより,

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\ ,\end{aligned}$$

加法定理を用いて $\sin 75^\circ$ 及び $\cos 75^\circ$ を計算する.

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\ , \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\ , \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}\ , \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

これより,

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\ ,$$

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ)$$

加法定理を用いて $\sin 75^\circ$ 及び $\cos 75^\circ$ を計算する.

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

これより,

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

加法定理を用いて $\sin 75^\circ$ 及び $\cos 75^\circ$ を計算する.

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

これより,

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

加法定理を用いて $\sin 15^\circ$ 及び $\cos 15^\circ$ を計算する.

加法定理を用いて $\sin 15^\circ$ 及び $\cos 15^\circ$ を計算する.

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$$

加法定理を用いて $\sin 15^\circ$ 及び $\cos 15^\circ$ を計算する.

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

加法定理を用いて $\sin 15^\circ$ 及び $\cos 15^\circ$ を計算する.

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

これより,

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},\end{aligned}$$

加法定理を用いて $\sin 15^\circ$ 及び $\cos 15^\circ$ を計算する.

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

これより,

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},\end{aligned}$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ)$$

加法定理を用いて $\sin 15^\circ$ 及び $\cos 15^\circ$ を計算する.

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

これより,

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

加法定理を用いて $\sin 15^\circ$ 及び $\cos 15^\circ$ を計算する.

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

これより,

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 一般角 θ について $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ かつ $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ とする．次の式を計算する：
$\sin(\theta + 30^\circ)$，$\cos(\theta + 30^\circ)$．

$\boxed{例}$ 一般角 θ について $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ かつ $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ とする．次の式を計算する：

$\sin(\theta + 30^\circ)$，$\cos(\theta + 30^\circ)$．

正弦の加法定理より，

$$\sin(\theta + 30^\circ) = \sin\theta\cos 30^\circ + \cos\theta\sin 30^\circ$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$\boxed{\text{例}}$ 一般角 θ について $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ かつ $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ とする．次の式を計算する：
$\sin(\theta+30^\circ)$，$\cos(\theta+30^\circ)$.

$\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ，$\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$ ．正弦の加法定理より，

$$\sin(\theta+30^\circ) = \sin\theta\cos 30^\circ + \cos\theta\sin 30^\circ = \frac{3}{5}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{5}\frac{1}{2} = \frac{4+3\sqrt{3}}{10} .$$

例 一般角 θ について $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ かつ $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ とする．次の式を計算する：
$\sin(\theta + 30^\circ)$，$\cos(\theta + 30^\circ)$．

$\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$．正弦の加法定理より，

$$\sin(\theta + 30^\circ) = \sin\theta\cos 30^\circ + \cos\theta\sin 30^\circ = \frac{3}{5}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{5}\frac{1}{2} = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{10}.$$

余弦の加法定理より，

$$\cos(\theta + 30^\circ) = \cos\theta\cos 30^\circ - \sin\theta\sin 30^\circ$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$\boxed{\text{例}}$ 一般角 θ について $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ かつ $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ とする．次の式を計算する：
$\sin(\theta + 30^\circ)$，$\cos(\theta + 30^\circ)$．

$\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$．正弦の加法定理より，

$$\sin(\theta + 30^\circ) = \sin\theta\cos 30^\circ + \cos\theta\sin 30^\circ = \frac{3}{5}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{5}\frac{1}{2} = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{10}.$$

余弦の加法定理より，

$$\cos(\theta + 30^\circ) = \cos\theta\cos 30^\circ - \sin\theta\sin 30^\circ = \frac{4}{5}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{5}\frac{1}{2} = \frac{3 - 4\sqrt{3}}{10}.$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問6.5.1}$ 一般角 θ について $\sin\theta = \dfrac{3}{4}$ かつ $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$ とする．次の式を計算せよ： $\sin(\theta + 60^\circ)$，$\cos(\theta + 60^\circ)$．

正弦の加法定理より,

$$\sin(\theta + 60^\circ) =$$

余弦の加法定理より,

$$\cos(\theta + 60^\circ) =$$

$\boxed{\text{問}6.5.1}$ 一般角 θ について $\sin\theta = \dfrac{3}{4}$ かつ $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$ とする．次の式を計算せよ： $\sin(\theta+60^\circ)$，$\cos(\theta+60^\circ)$．

正弦の加法定理より，

$$\sin(\theta+60^\circ) = \sin\theta\cos 60^\circ + \cos\theta\sin 60^\circ = \frac{3}{4}\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{4}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3+\sqrt{21}}{8}.$$

余弦の加法定理より，

$$\cos(\theta+60^\circ) =$$

$\boxed{問 6.5.1}$ 一般角 θ について $\sin\theta = \dfrac{3}{4}$ かつ $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$ とする．次の式を計算せよ： $\sin(\theta + 60^\circ)$，$\cos(\theta + 60^\circ)$．

正弦の加法定理より，

$$\sin(\theta + 60^\circ) = \sin\theta\cos 60^\circ + \cos\theta\sin 60^\circ = \frac{3}{4}\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{4}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{21}}{8}.$$

余弦の加法定理より，

$$\cos(\theta + 60^\circ) = \cos\theta\cos 60^\circ - \sin\theta\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{7}}{4}\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{7} - 3\sqrt{3}}{8}.$$ $\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 一般角 θ について $\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ かつ $\cos\theta < 0$ とする．次の式を計算する：
$\sin(\theta - 60^\circ)$，$\cos(\theta - 60^\circ)$．

$\boxed{例}$ 一般角 θ について $\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ かつ $\cos\theta < 0$ とする．次の式を計算する：
$\sin(\theta - 60^\circ)$，$\cos(\theta - 60^\circ)$．

$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ なので，

$$(\cos\theta)^2 = 1 - (\sin\theta)^2 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9},$$

$\boxed{\text{例}}$ 一般角 θ について $\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ かつ $\cos\theta < 0$ とする．次の式を計算する：
$\sin(\theta - 60^\circ)$，$\cos(\theta - 60^\circ)$.

$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ なので,

$$(\cos\theta)^2 = 1 - (\sin\theta)^2 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \ ,$$

$\cos\theta < 0$ なので

$$\cos\theta = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3} \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 一般角 θ について $\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ かつ $\cos\theta < 0$ とする．次の式を計算する：
$\sin(\theta - 60^\circ)$, $\cos(\theta - 60^\circ)$.

$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ なので，

$$(\cos\theta)^2 = 1 - (\sin\theta)^2 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \ ,$$

$\cos\theta < 0$ なので

$$\cos\theta = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3} \ .$$

また， $\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$, $\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\boxed{\text{例}}$ 一般角 θ について $\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ かつ $\cos\theta < 0$ とする．次の式を計算する：
$\sin(\theta - 60^\circ)$，$\cos(\theta - 60^\circ)$.

$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ なので，

$$(\cos\theta)^2 = 1 - (\sin\theta)^2 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} ,$$

$\cos\theta < 0$ なので

$$\cos\theta = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3} .$$

また，$\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$ ， $\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ．正弦の加法定理より，

$$\sin(\theta - 60^\circ) = \sin\theta\cos 60^\circ - \cos\theta\sin 60^\circ = \frac{2}{3}\frac{1}{2} - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2+\sqrt{15}}{6} .$$

$\boxed{\text{例}}$ 一般角 θ について $\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ かつ $\cos\theta < 0$ とする．次の式を計算する：
$\sin(\theta - 60^\circ)$，$\cos(\theta - 60^\circ)$.

$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ なので，

$$(\cos\theta)^2 = 1 - (\sin\theta)^2 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} ,$$

$\cos\theta < 0$ なので

$$\cos\theta = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3} .$$

また，$\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$ ，$\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ．正弦の加法定理より，

$$\sin(\theta - 60^\circ) = \sin\theta\cos 60^\circ - \cos\theta\sin 60^\circ = \frac{2}{3}\frac{1}{2} - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2+\sqrt{15}}{6} .$$

余弦の加法定理より，

$$\cos(\theta - 60^\circ) = \cos\theta\cos 60^\circ + \sin\theta\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{5}}{3}\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{5}}{6} .$$ $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}6.5.2}$ 一般角 θ について $\cos\theta = -\dfrac{3}{4}$ かつ $\sin\theta < 0$ とする．次の式を計算せよ： $\sin(\theta - 30^\circ)$，$\cos(\theta - 30^\circ)$.

$$(\sin\theta)^2 = 1 - (\cos\theta)^2 = 1 - \left(\quad \right)^2 = 1 - \qquad = \qquad ,$$

$\sin\theta < 0$ なので

$$\sin\theta =$$

正弦の加法定理より，

$\sin(\theta - 30^\circ) =$

余弦の加法定理より，

$\cos(\theta - 30^\circ) =$

$\boxed{\text{問}6.5.2}$ 一般角 θ について $\cos\theta = -\dfrac{3}{4}$ かつ $\sin\theta < 0$ とする．次の式を計算せよ： $\sin(\theta - 30^\circ)$ ，$\cos(\theta - 30^\circ)$.

$$(\sin\theta)^2 = 1 - (\cos\theta)^2 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} ,$$

$\sin\theta < 0$ なので

$$\sin\theta = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4} .$$

正弦の加法定理より,

$$\sin(\theta - 30^\circ) = \sin\theta\cos 30^\circ - \cos\theta\sin 30^\circ = -\frac{\sqrt{7}}{4}\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{3}{4}\right)\frac{1}{2} = \frac{3 - \sqrt{21}}{8} .$$

余弦の加法定理より,

$$\cos(\theta - 30^\circ) = \cos\theta\cos 30^\circ + \sin\theta\sin 30^\circ = -\frac{3}{4}\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)\frac{1}{2} = -\frac{3\sqrt{3} + \sqrt{7}}{8}$$

$\boxed{\text{終}}$

正接の加法定理もある.

定理（正接の加法定理）　任意の一般角 α と β とについて, $\tan\alpha$, $\tan\beta$ 及び, $\tan(\alpha+\beta)$ または $\tan(\alpha-\beta)$ の値があるとき,

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}\quad\text{（複号同順）}.$$

加法定理を用いて $\tan 75^\circ$ を計算する.

加法定理を用いて $\tan 75^\circ$ を計算する.

$$\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ)$$

加法定理を用いて $\tan 75^\circ$ を計算する.

$$\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

加法定理を用いて $\tan 75^\circ$ を計算する.

$$\tan 45^\circ = 1 \ , \qquad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \ .$$

これより,

$$\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$

加法定理を用いて $\tan 75^\circ$ を計算する.

$$\tan 45^\circ = 1 \ , \qquad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \ .$$

これより,

$$\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\left(\sqrt{3} + 1\right)\left(\sqrt{3} + 1\right)}{\left(\sqrt{3} - 1\right)\left(\sqrt{3} + 1\right)} = \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1}$$

$$= 2 + \sqrt{3} \ .$$

加法定理を用いて $\tan 15^\circ$ を計算する.

$$\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ)$$

加法定理を用いて $\tan 15^\circ$ を計算する.

$$\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$$

加法定理を用いて $\tan 15^\circ$ を計算する.

$$\tan 45^\circ = 1 \ , \qquad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \ .$$

これより,

$$\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

加法定理を用いて $\tan 15^\circ$ を計算する.

$$\tan 45^\circ = 1 \ , \qquad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \ .$$

これより,

$$\begin{aligned}
\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) &= \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\left(\sqrt{3} - 1\right)\left(\sqrt{3} - 1\right)}{\left(\sqrt{3} + 1\right)\left(\sqrt{3} - 1\right)} = \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} \\
&= 2 - \sqrt{3} \ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 一般角 θ について $\tan\theta = 5$ とする．次の式を計算する：$\tan(\theta + 60°)$ ．
分母に根号が現れるときは分母を有理化する．

$\boxed{\text{例}}$ 一般角 θ について $\tan\theta = 5$ とする．次の式を計算する：$\tan(\theta + 60°)$ ．
分母に根号が現れるときは分母を有理化する．

正接の加法定理を用いる．

$$\tan(\theta + 60°) = \frac{\tan\theta + \tan 60°}{1 - \tan\theta \tan 60°}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

$\boxed{\text{例}}$ 一般角 θ について $\tan\theta = 5$ とする．次の式を計算する：$\tan(\theta + 60^\circ)$ ．
分母に根号が現れるときは分母を有理化する．

$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ ． 正接の加法定理を用いる．

$$\tan(\theta + 60^\circ) = \frac{\tan\theta + \tan 60^\circ}{1 - \tan\theta \tan 60^\circ} = \frac{5 + \sqrt{3}}{1 - 5\sqrt{3}}$$

例 一般角 θ について $\tan\theta=5$ とする．次の式を計算する：$\tan(\theta+60^\circ)$ ．
分母に根号が現れるときは分母を有理化する．

$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ ． 正接の加法定理を用いる．

$$\tan(\theta+60^\circ)=\frac{\tan\theta+\tan 60^\circ}{1-\tan\theta\tan 60^\circ}=\frac{5+\sqrt{3}}{1-5\sqrt{3}}=\frac{\left(5+\sqrt{3}\,\right)\left(1+5\sqrt{3}\,\right)}{\left(1-5\sqrt{3}\,\right)\left(1+5\sqrt{3}\,\right)}$$

$$=\frac{5+25\sqrt{3}+\sqrt{3}+5\sqrt{3}^{\,2}}{1^2-\left(5\sqrt{3}\,\right)^2}=\frac{5+26\sqrt{3}+15}{1-75}=-\frac{20+26\sqrt{3}}{74}$$

$$=-\frac{10+13\sqrt{3}}{37}\ .$$

終

$\boxed{\text{例}}$ 一般角 θ について $\tan\theta = 5$ とする．次の式を計算する：$\tan(\theta - 60^\circ)$ ．
分母に根号が現れるときは分母を有理化する．

$\boxed{\text{例}}$ 一般角 θ について $\tan\theta = 5$ とする．次の式を計算する：$\tan(\theta - 60^\circ)$ ．
分母に根号が現れるときは分母を有理化する．

正接の加法定理を用いる．

$$\tan(\theta - 60^\circ) = \frac{\tan\theta - \tan 60^\circ}{1 + \tan\theta \tan 60^\circ}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$$

$\boxed{\text{例}}$ 一般角 θ について $\tan\theta = 5$ とする．次の式を計算する：$\tan(\theta - 60^\circ)$ ．
分母に根号が現れるときは分母を有理化する．

$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ ． 正接の加法定理を用いる．

$$\tan(\theta - 60^\circ) = \frac{\tan\theta - \tan 60^\circ}{1 + \tan\theta\tan 60^\circ} = \frac{5 - \sqrt{3}}{1 + 5\sqrt{3}}$$

$\boxed{\text{例}}$ 一般角 θ について $\tan\theta = 5$ とする．次の式を計算する：$\tan(\theta - 60^\circ)$ ．
分母に根号が現れるときは分母を有理化する．

$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ ．正接の加法定理を用いる．

$$\tan(\theta - 60^\circ) = \frac{\tan\theta - \tan 60^\circ}{1 + \tan\theta \tan 60^\circ} = \frac{5 - \sqrt{3}}{1 + 5\sqrt{3}} = \frac{\left(5 - \sqrt{3}\,\right)\left(1 - 5\sqrt{3}\,\right)}{\left(1 + 5\sqrt{3}\,\right)\left(1 - 5\sqrt{3}\,\right)}$$

$$= \frac{5 - 25\sqrt{3} - \sqrt{3} + 5\sqrt{3}^{\,2}}{1^2 - \left(5\sqrt{3}\,\right)^2} = \frac{5 - 26\sqrt{3} + 15}{1 - 75} = -\frac{20 - 26\sqrt{3}}{74}$$

$$= \frac{13\sqrt{3} - 10}{37} \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問6.5.3}$ 一般角 θ について $\tan\theta = 2$ とする．次の式を計算せよ：
$\tan(\theta + 30°)$ ．分母に根号が現れるときは分母を有理化せよ．

$$\tan(\theta + 30°) =$$

$\boxed{問 6.5.3}$ 一般角 θ について $\tan\theta = 2$ とする．次の式を計算せよ：
$\tan(\theta + 30^\circ)$ ．分母に根号が現れるときは分母を有理化せよ．

$$
\begin{aligned}
\tan(\theta+30^\circ) &= \frac{\tan\theta + \tan 30^\circ}{1-\tan\theta\tan 30^\circ} = \frac{2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= \frac{2\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-2} = \frac{\left(2\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}+2\right)}{\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}+2\right)} \\
&= \frac{2\sqrt{3}^{\,2}+4\sqrt{3}+\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}^{\,2}-2^2} = \frac{6+5\sqrt{3}+2}{3-4} \\
&= -8-5\sqrt{3}\ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{終}$

$\boxed{問6.5.3}$ 一般角 θ について $\tan\theta = 2$ とする．次の式を計算せよ：$\tan(\theta - 30^\circ)$ ．分母に根号が現れるときは分母を有理化せよ．

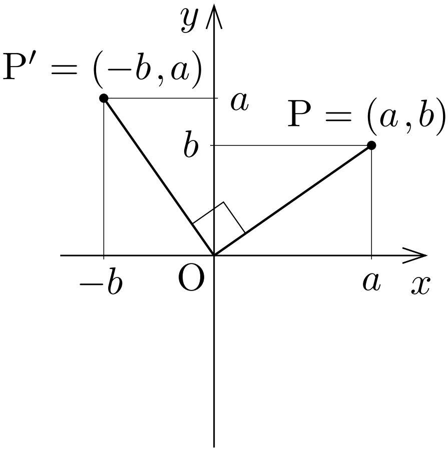
$$\tan(\theta - 30^\circ) =$$

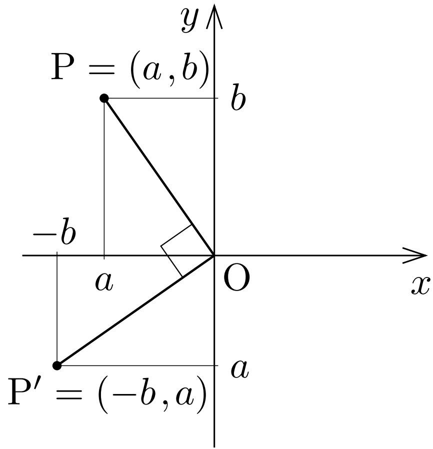
$\boxed{問6.5.3}$ 一般角 θ について $\tan\theta = 2$ とする．次の式を計算せよ：$\tan(\theta - 30^\circ)$ ．分母に根号が現れるときは分母を有理化せよ．

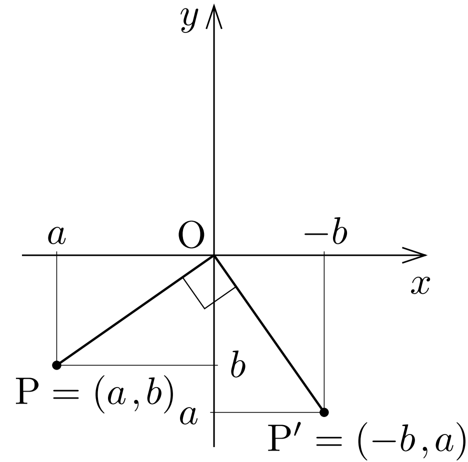
$$
\begin{aligned}
\tan(\theta - 30^\circ) &= \frac{\tan\theta - \tan 30^\circ}{1 + \tan\theta \tan 30^\circ} = \frac{2 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= \frac{2\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 2} = \frac{\left(2\sqrt{3} - 1\right)\left(\sqrt{3} - 2\right)}{\left(\sqrt{3} - 2\right)\left(\sqrt{3} + 2\right)} \\
&= \frac{2\sqrt{3}^{\,2} - 4\sqrt{3} - \sqrt{3} + 2}{\sqrt{3}^{\,2} - 2^2} = \frac{6 - 5\sqrt{3} + 2}{3 - 4} \\
&= 5\sqrt{3} - 8 \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{終}$

xy 座標平面において，原点 O を中心にして点 $\mathrm{P}=(a,b)$ を 90° だけ回転させた点を P' とおく．このとき，次の図のように，$\mathrm{P}'=(-b,a)$ となる．

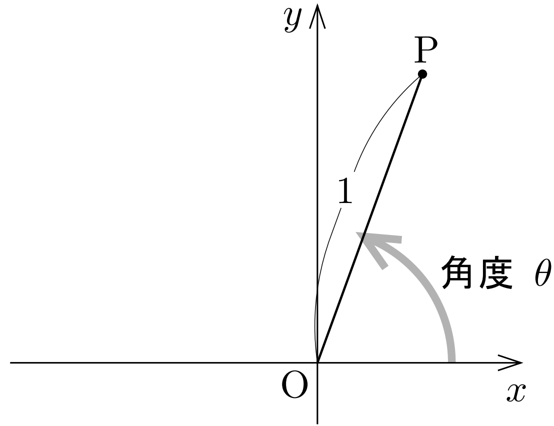






線分 OP は始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の線分で，$\overline{\mathrm{OP}} = 1$ とする．

$$\mathrm{P} = (\cos\theta, \sin\theta) .$$

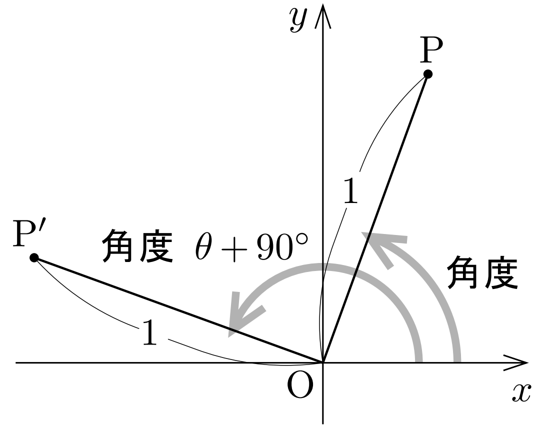


線分 OP は始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の線分で，$\overline{\mathrm{OP}}=1$ とする．

$$\mathrm{P} = (\cos\theta, \sin\theta)\ .$$

点 P' は点 P を 90° だけ回転させた点なので，始線 $\mathrm{O}x$ に対する線分 OP' の角度は $\theta+90^\circ$ で，$\overline{\mathrm{OP}'}=1$ ．

$$\mathrm{P}' = \big(\cos(\theta+90^\circ), \sin(\theta+90^\circ)\big)\ .$$

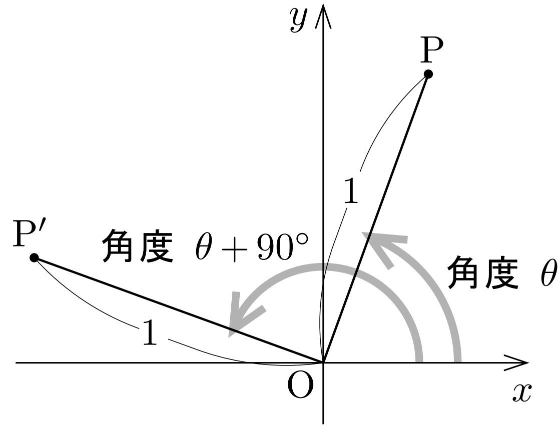


線分 OP は始線 Ox に対する角度 θ の線分で，$\overline{\mathrm{OP}} = 1$ とする．

$$\mathrm{P} = (\cos\theta, \sin\theta) \ .$$

点 P$'$ は点 P を 90° だけ回転させた点なので，始線 Ox に対する線分 OP$'$ の角度は $\theta + 90^\circ$ で，$\overline{\mathrm{OP'}} = 1$ ．

$$\mathrm{P'} = \bigl(\cos(\theta + 90^\circ), \sin(\theta + 90^\circ)\bigr) \ .$$



$\mathrm{P} = (a, b)$ かつ $\mathrm{P'} = (-b, a)$ なので，

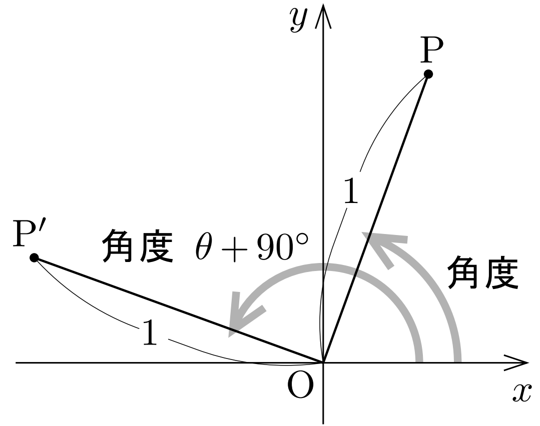
$$(\cos\theta, \sin\theta) = \mathrm{P} = (a, b) \ , \quad \bigl(\cos(\theta + 90^\circ), \sin(\theta + 90^\circ)\bigr) = \mathrm{P'} = (-b, a) \ .$$

線分 OP は始線 Ox に対する角度 θ の線分で, $\overline{\mathrm{OP}}=1$ とする.

$$\mathrm{P}=(\cos\theta,\sin\theta)\ .$$

点 P$'$ は点 P を 90° だけ回転させた点なので, 始線 Ox に対する線分 OP$'$ の角度は $\theta+90^\circ$ で, $\overline{\mathrm{OP'}}=1$.

$$\mathrm{P'}=\bigl(\cos(\theta+90^\circ),\sin(\theta+90^\circ)\bigr)\ .$$



$\mathrm{P}=(a,b)$ かつ $\mathrm{P'}=(-b,a)$ なので,

$$(\cos\theta,\sin\theta)=\mathrm{P}=(a,b)\ ,\quad \bigl(\cos(\theta+90^\circ),\sin(\theta+90^\circ)\bigr)=\mathrm{P'}=(-b,a)\ .$$

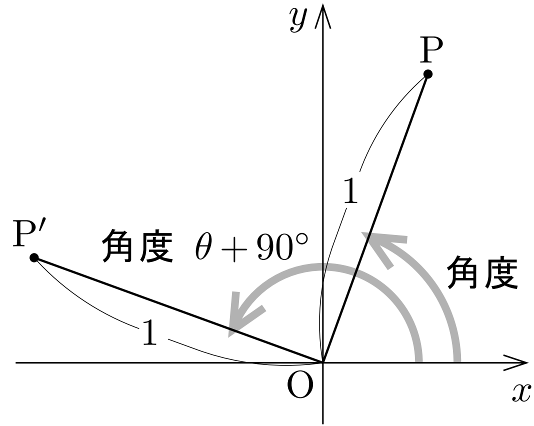
$\cos(\theta+90^\circ)=-b$ かつ $b=\sin\theta$ なので, $\cos(\theta+90^\circ)=-\sin\theta$.

線分 OP は始線 Ox に対する角度 θ の線分で，$\overline{\mathrm{OP}}=1$ とする．

$$\mathrm{P}=(\cos\theta,\sin\theta)\ .$$

点 P$'$ は点 P を $90°$ だけ回転させた点なので，始線 Ox に対する線分 OP$'$ の角度は $\theta+90°$ で，$\overline{\mathrm{OP'}}=1$ ．

$$\mathrm{P'}=\big(\cos(\theta+90°),\sin(\theta+90°)\big)\ .$$



$\mathrm{P}=(a,b)$ かつ $\mathrm{P'}=(-b,a)$ なので，

$$(\cos\theta,\sin\theta)=\mathrm{P}=(a,b)\ ,\quad \big(\cos(\theta+90°),\sin(\theta+90°)\big)=\mathrm{P'}=(-b,a)\ .$$

$\cos(\theta+90°)=-b$ かつ $b=\sin\theta$ なので，$\cos(\theta+90°)=-\sin\theta$ ．また，$\sin(\theta+90°)=a$ かつ $a=\cos\theta$ なので，$\sin(\theta+90°)=\cos\theta$ ．

定理　任意の一般角 θ について,

$$\sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta \ , \qquad \cos(\theta + 90^\circ) = -\sin\theta \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ **次の式を計算する**: $\sin 120°$，$\cos 120°$，$\tan 120°$． **公式** $\sin(\theta + 90°) = \cos\theta$，$\cos(\theta + 90°) = -\sin\theta$ **を用いる**.

$\boxed{\text{例}}$ **次の式を計算する**: $\sin 120^\circ$, $\cos 120^\circ$, $\tan 120^\circ$. **公式** $\sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta$, $\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin\theta$ **を用いる**.

$$\sin 120^\circ = \sin(30^\circ + 90^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ **次の式を計算する**: $\sin 120^\circ$, $\cos 120^\circ$, $\tan 120^\circ$. **公式** $\sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta$, $\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin\theta$ **を用いる**.

$$\sin 120^\circ = \sin(30^\circ + 90^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

$$\cos 120^\circ = \cos(30^\circ + 90^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2} \ .$$

例 次の式を計算する: $\sin 120^\circ$, $\cos 120^\circ$, $\tan 120^\circ$. 公式 $\sin(\theta+90^\circ)=\cos\theta$, $\cos(\theta+90^\circ)=-\sin\theta$ を用いる.

$$\sin 120^\circ = \sin(30^\circ+90^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

$$\cos 120^\circ = \cos(30^\circ+90^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2} \ .$$

また,

$$\tan 120^\circ = \frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \ .$$

終

$\boxed{\text{問}6.5.4}$ **次の式を計算せよ**： $\sin 150^\circ$，$\cos 150^\circ$，$\tan 150^\circ$．

$$\sin 150^\circ = \sin(\quad{}^\circ + 90^\circ) = \qquad\qquad = \quad .$$

$$\cos 150^\circ = \cos(\quad{}^\circ + 90^\circ) = \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

$$\tan 150^\circ = \frac{\sin 150^\circ}{\cos 150^\circ} = \quad \Big/ \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

$\boxed{問 6.5.4}$ **次の式を計算せよ：** $\sin 150^\circ$，$\cos 150^\circ$，$\tan 150^\circ$.

$$\sin 150^\circ = \sin(60^\circ + 90^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \ .$$

$$\cos 150^\circ = \cos(60^\circ + 90^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

$$\tan 150^\circ = \frac{\sin 150^\circ}{\cos 150^\circ} = \frac{1}{2} \Bigg/ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \ .$$

$\boxed{終}$

任意の一般角 θ について,

$$\sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta \ , \qquad \cos(\theta + 90^\circ) = -\sin\theta \ .$$

任意の一般角 θ について，

$$\sin(\theta+90^\circ) = \cos\theta \ , \qquad \cos(\theta+90^\circ) = -\sin\theta \ .$$

これらの等式において $\theta = 90^\circ$ とすると，

$$\sin(90^\circ+90^\circ) = \cos 90^\circ = 0 \ , \qquad \cos(90^\circ+90^\circ) = -\sin 90^\circ = -1 \ ;$$

つまり，

$$\sin 180^\circ = 0 \ , \quad \cos 180^\circ = -1 \ .$$

任意の一般角 θ について,

$$\sin(\theta+90^\circ) = \cos\theta \ , \qquad \cos(\theta+90^\circ) = -\sin\theta \ .$$

これらの等式において $\theta = 90^\circ$ とすると,

$$\sin(90^\circ+90^\circ) = \cos 90^\circ = 0 \ , \qquad \cos(90^\circ+90^\circ) = -\sin 90^\circ = -1 \ ;$$

つまり,

$$\sin 180^\circ = 0 \ , \quad \cos 180^\circ = -1 \ .$$

一般角 θ について,

$$\sin(180^\circ-\theta) = \sin 180^\circ \cos\theta - \cos 180^\circ \sin\theta = 0\cdot\cos\theta - (-1)\cdot\sin\theta = \sin\theta \ ,$$

$$\cos(180^\circ-\theta) = \cos 180^\circ \cos\theta + \sin 180^\circ \sin\theta = -1\cdot\cos\theta + 0\cdot\sin\theta = -\cos\theta \ .$$

任意の一般角 θ について,

$$\sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta \ , \qquad \cos(\theta + 90^\circ) = -\sin\theta \ .$$

これらの等式において $\theta = 90^\circ$ とすると,

$$\sin(90^\circ + 90^\circ) = \cos 90^\circ = 0 \ , \qquad \cos(90^\circ + 90^\circ) = -\sin 90^\circ = -1 \ ;$$

つまり,

$$\sin 180^\circ = 0 \ , \quad \cos 180^\circ = -1 \ .$$

一般角 θ について,

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin 180^\circ \cos\theta - \cos 180^\circ \sin\theta = 0 \cdot \cos\theta - (-1) \cdot \sin\theta = \sin\theta \ ,$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = \cos 180^\circ \cos\theta + \sin 180^\circ \sin\theta = -1 \cdot \cos\theta + 0 \cdot \sin\theta = -\cos\theta \ .$$

定理　一般角 θ について,

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta \ , \qquad \cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta \ .$$