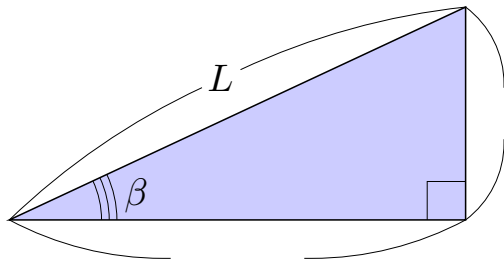
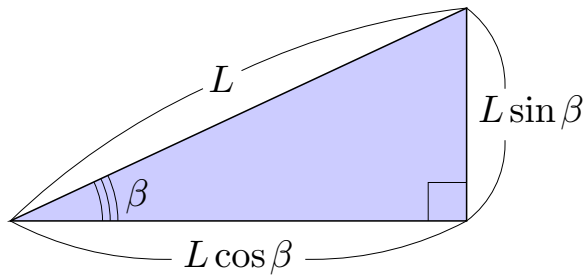


6.6 加法定理の証明

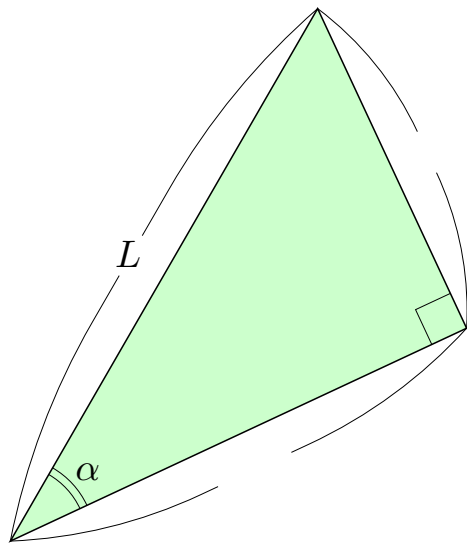
直角三角形の一つの内角の大きさが β であり斜辺（直角に対する辺）の長さが L であるとき他の辺の長さは次のようになる。



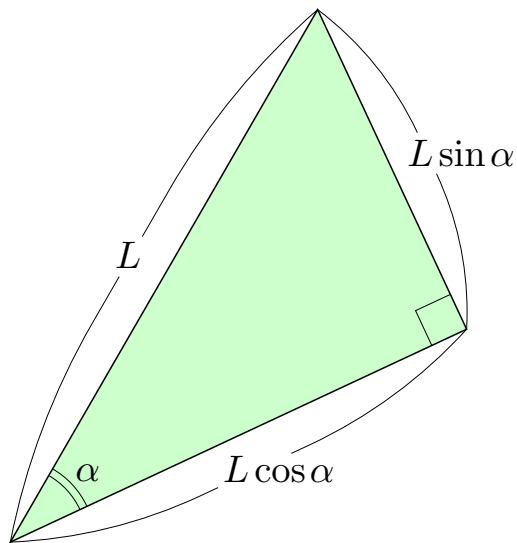
直角三角形の一つの内角の大きさが β であり斜辺（直角に対する辺）の長さが L であるとき他の辺の長さは次のようになる。



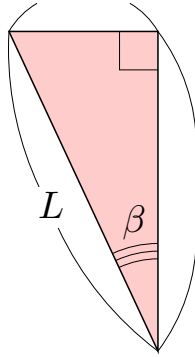
直角三角形の一つの内角の大きさが α であり斜辺（直角に対する辺）の長さが L であるとき他の辺の長さは次のようになる。



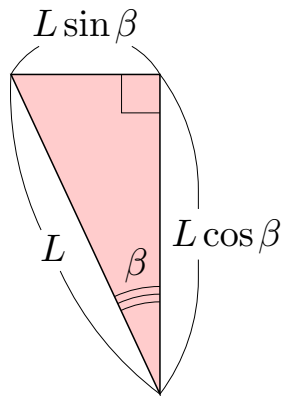
直角三角形の一つの内角の大きさが α であり斜辺（直角に対する辺）の長さが L であるとき他の辺の長さは次のようになる。



直角三角形の一つの内角の大きさが β であり斜辺（直角に対する辺）の長さが L であるとき他の辺の長さは次のようになる。



直角三角形の一つの内角の大きさが β であり斜辺（直角に対する辺）の長さが L であるとき他の辺の長さは次のようになる。



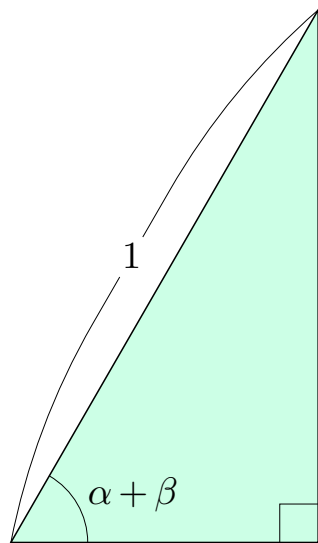
鋭角 α と β について $\alpha + \beta < 90^\circ$ とする. 正弦及び余弦の加法定理

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta ,$$

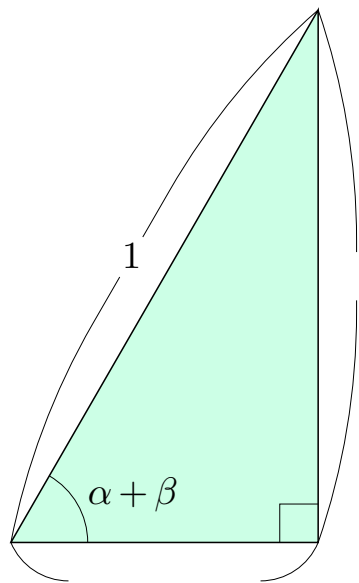
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

を導く.

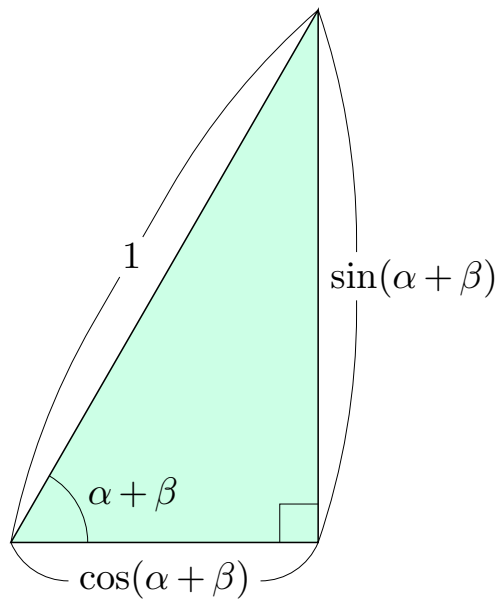
最初の直角三角形を次のようにする.



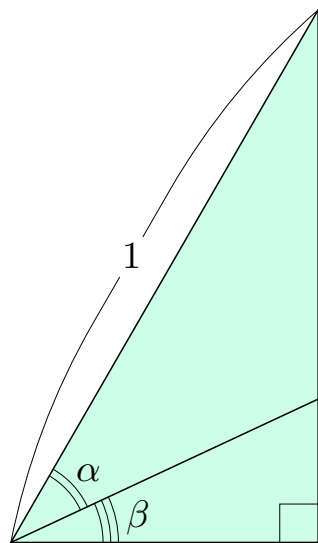
最初の直角三角形を次のようにする.



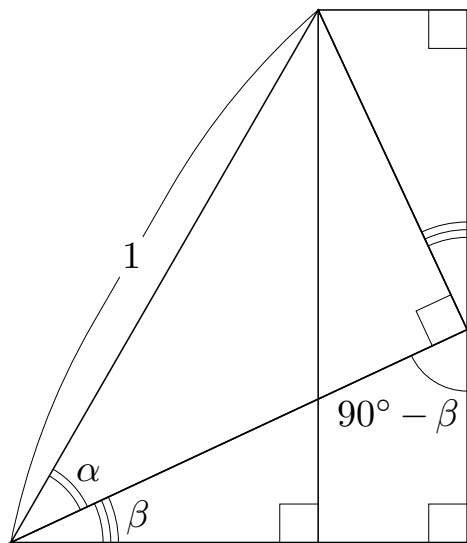
最初の直角三角形を次のようにする.



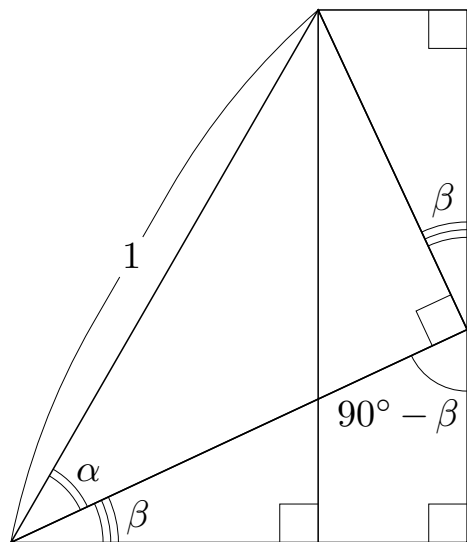
次のように内角を分ける.



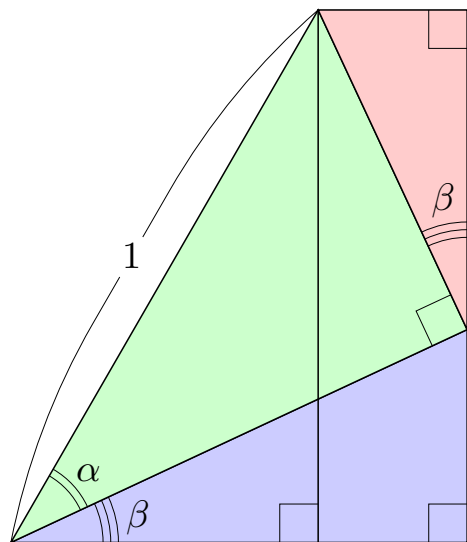
次のように拡張する.



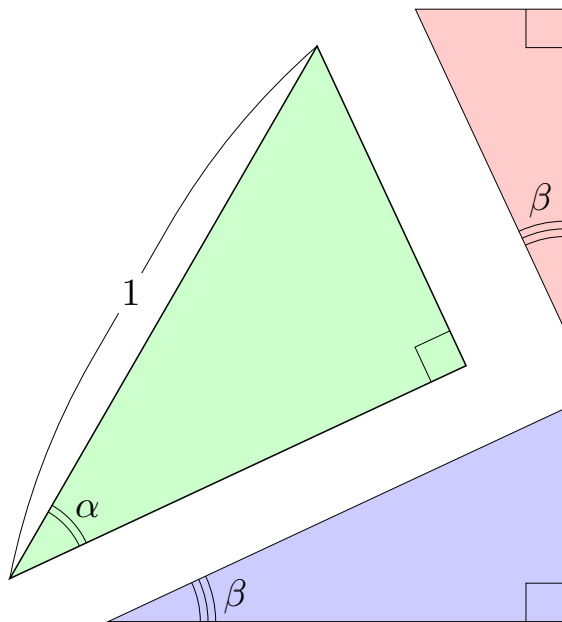
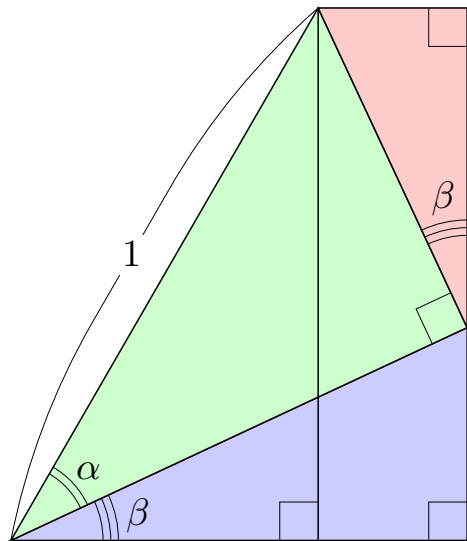
次のように拡張する.



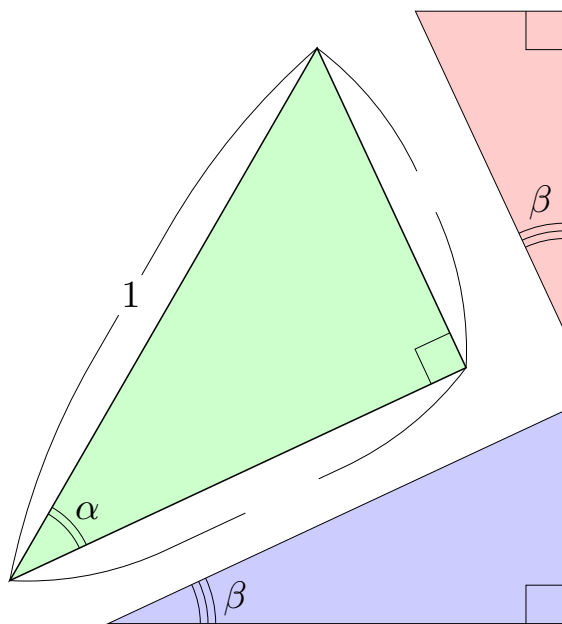
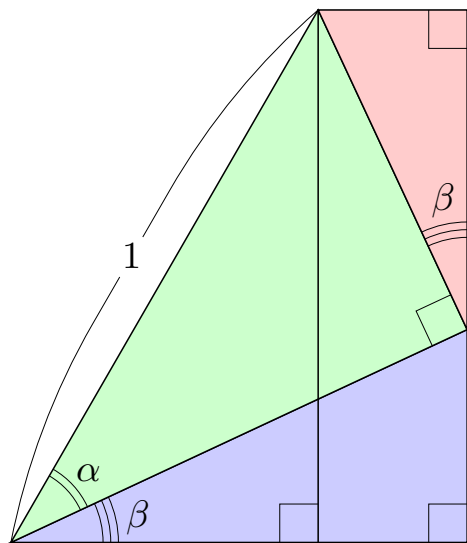
次のような色分けされた3個の直角三角形を考える.



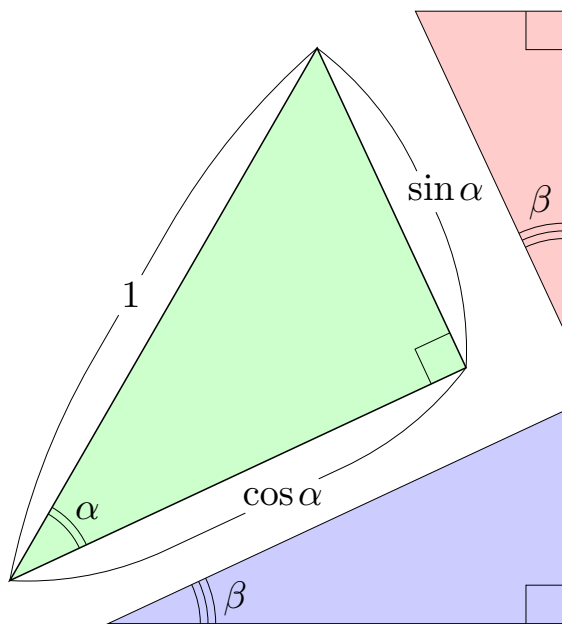
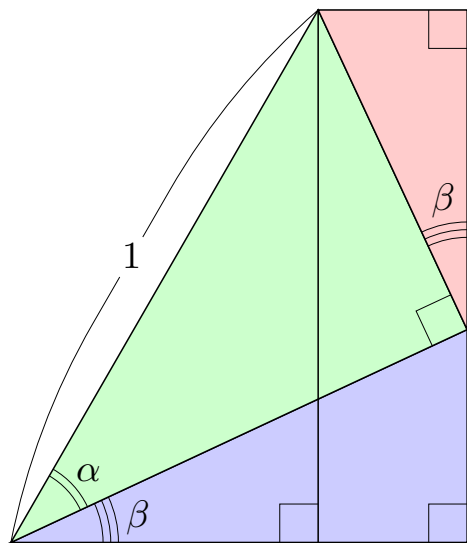
次のような色分けされた3個の直角三角形を考える。



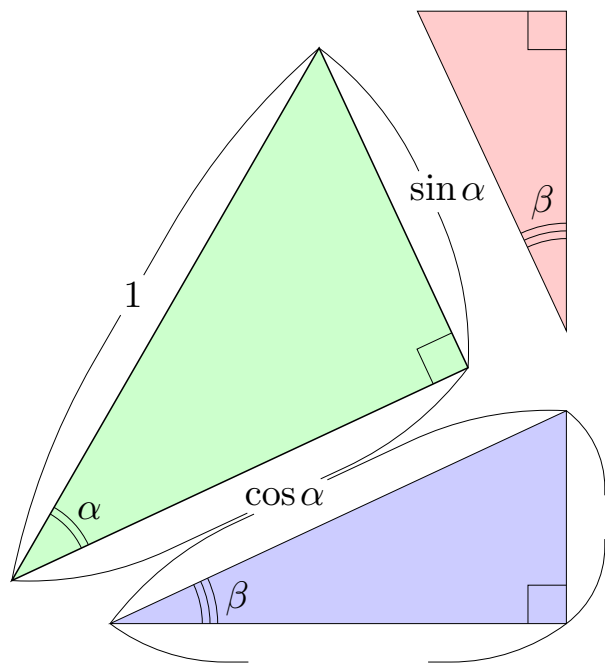
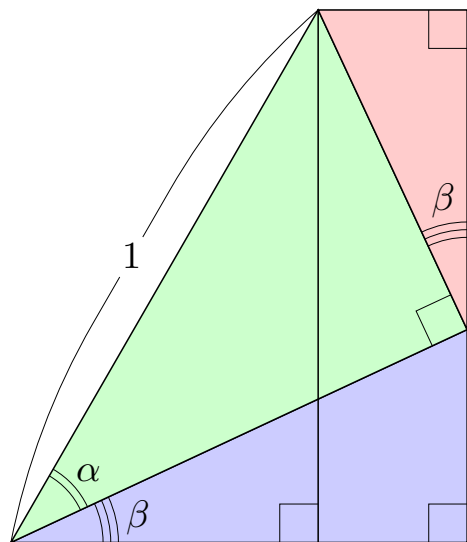
次のような色分けされた3個の直角三角形を考える。



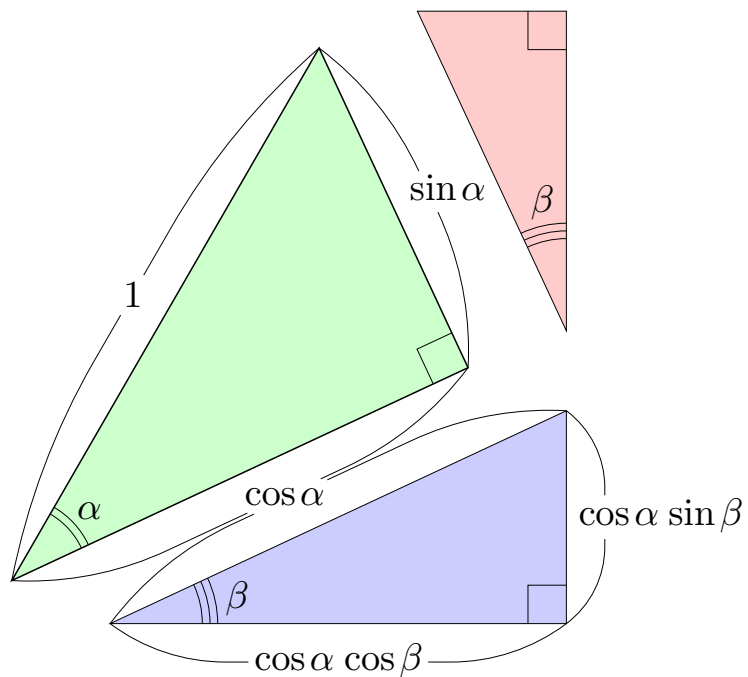
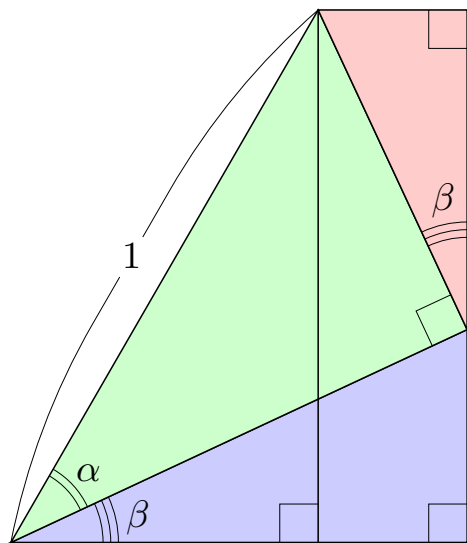
次のような色分けされた3個の直角三角形を考える。



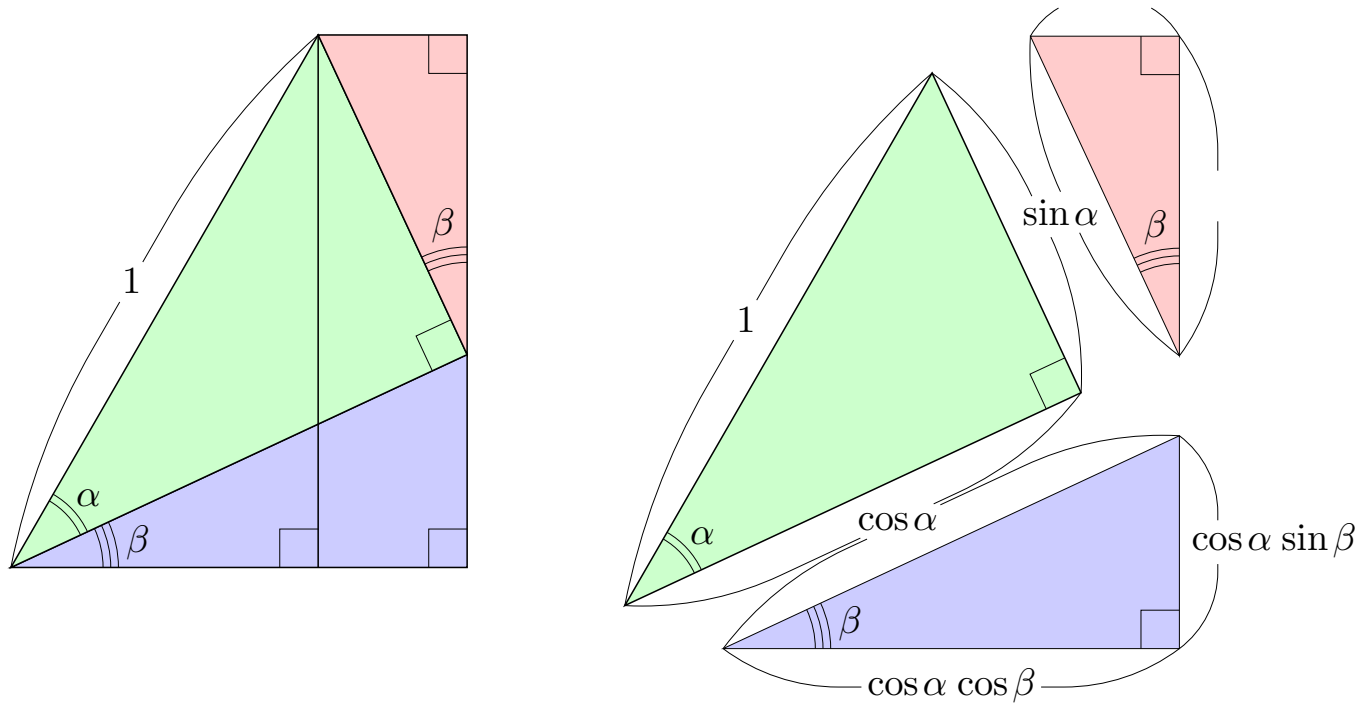
次のような色分けされた3個の直角三角形を考える。



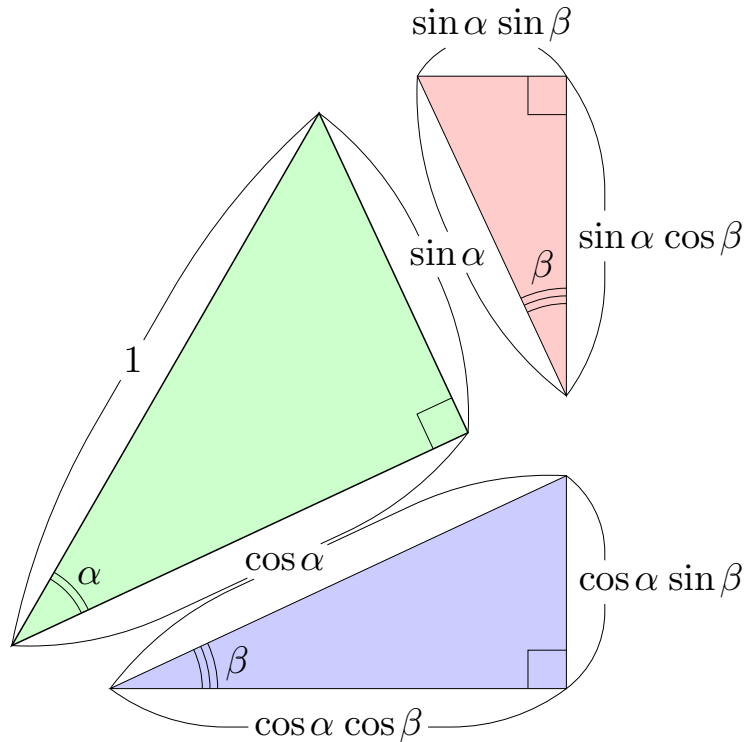
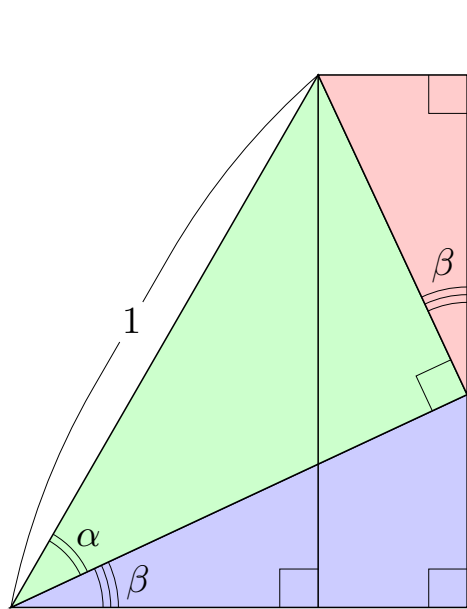
次のような色分けされた3個の直角三角形を考える。



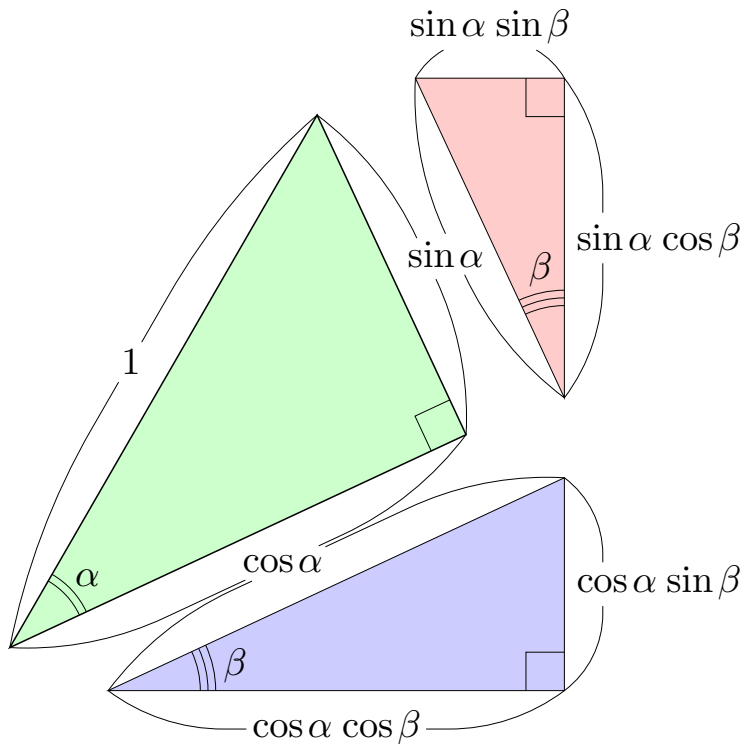
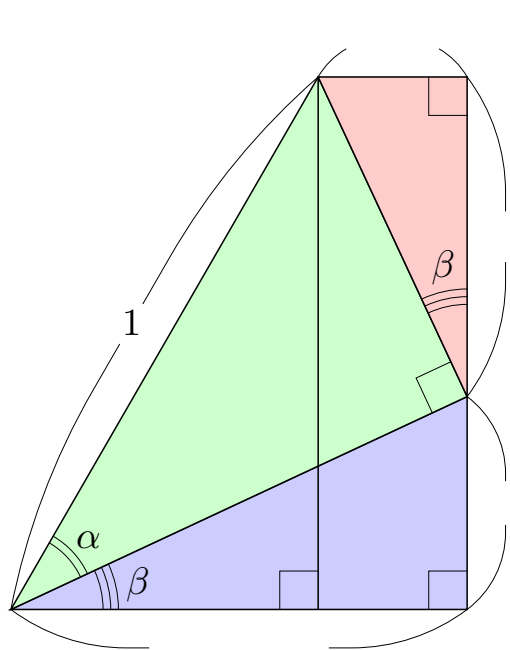
次のような色分けされた3個の直角三角形を考える。



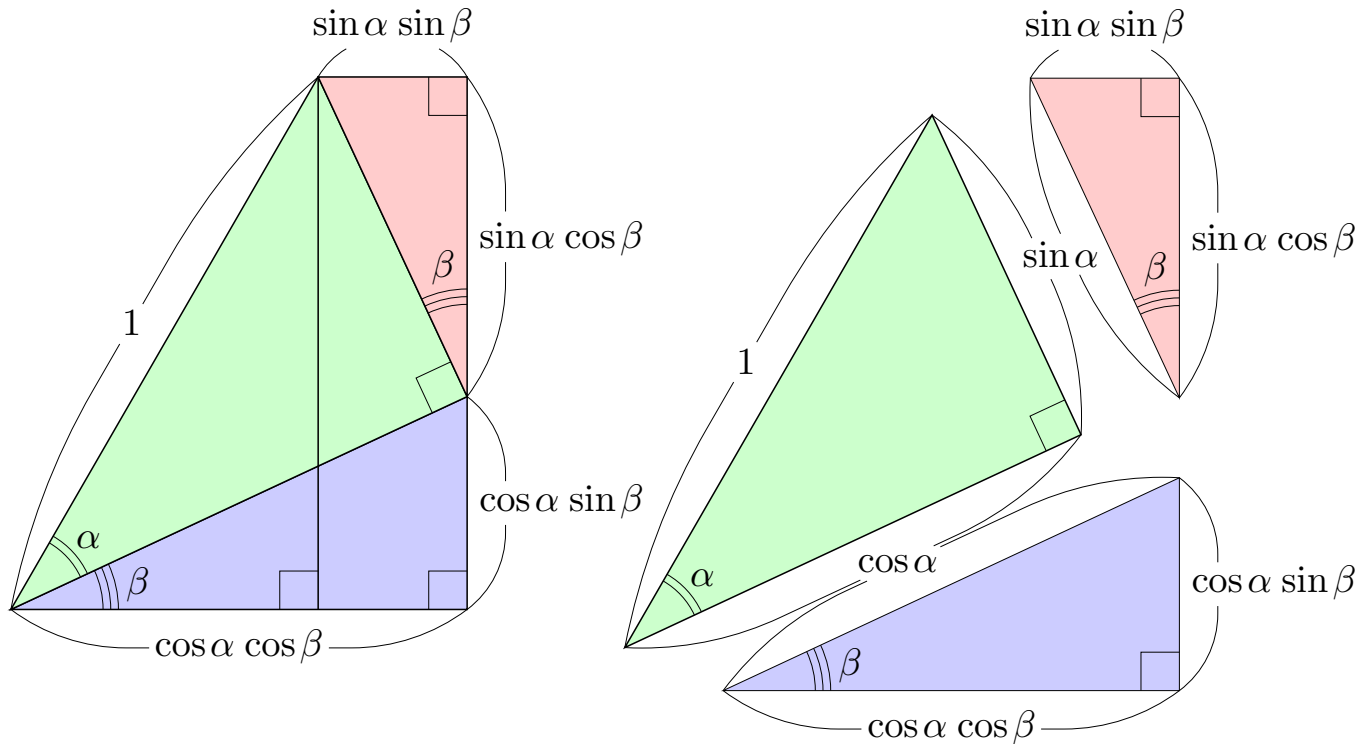
次のような色分けされた3個の直角三角形を考える。



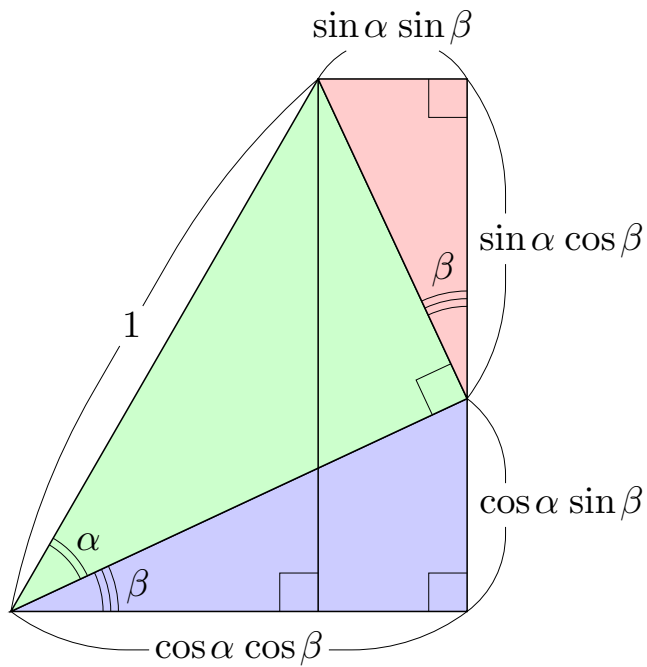
次のような色分けされた3個の直角三角形を考える。



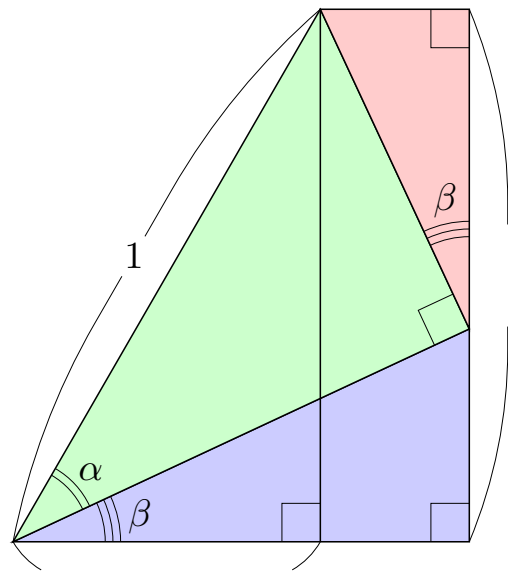
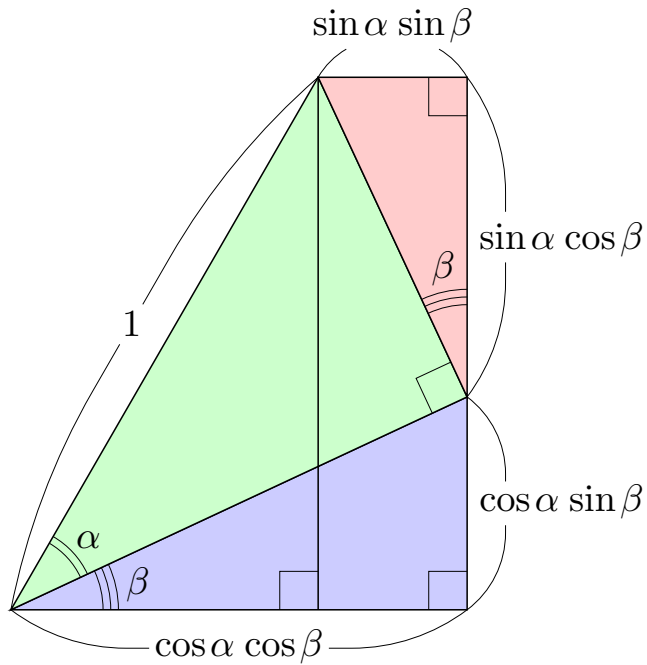
次のような色分けされた3個の直角三角形を考える.



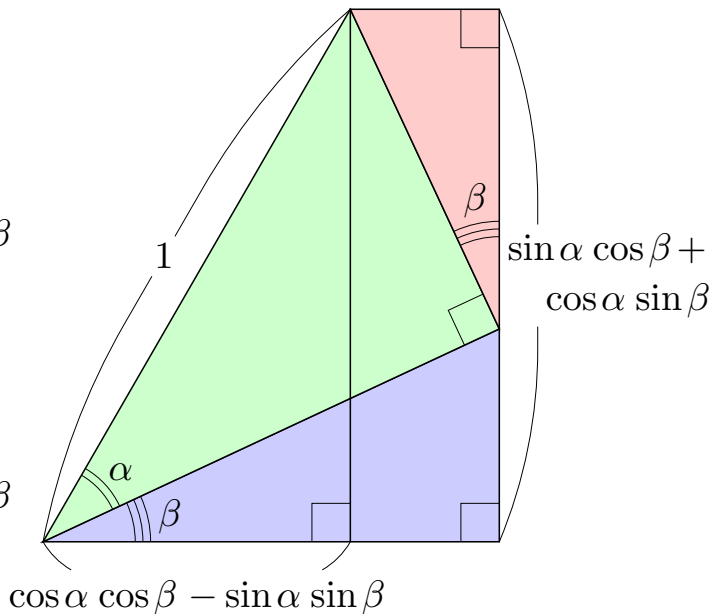
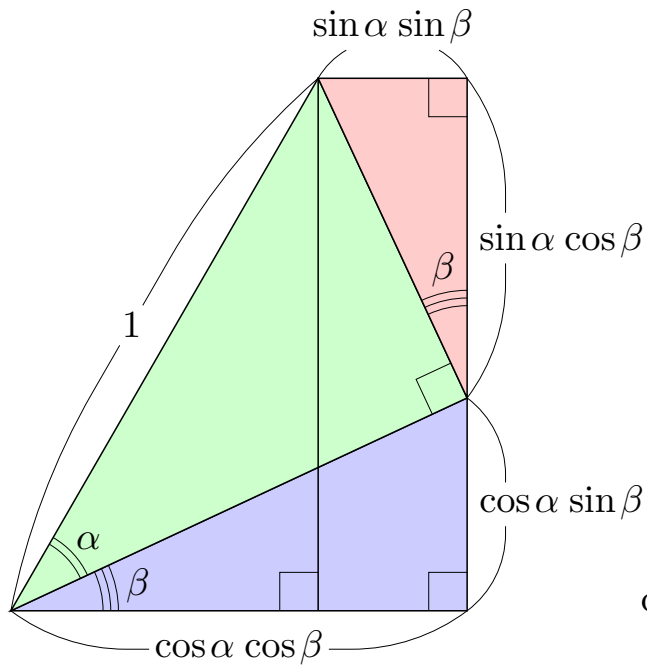
次のような色分けされた3個の直角三角形を考える.



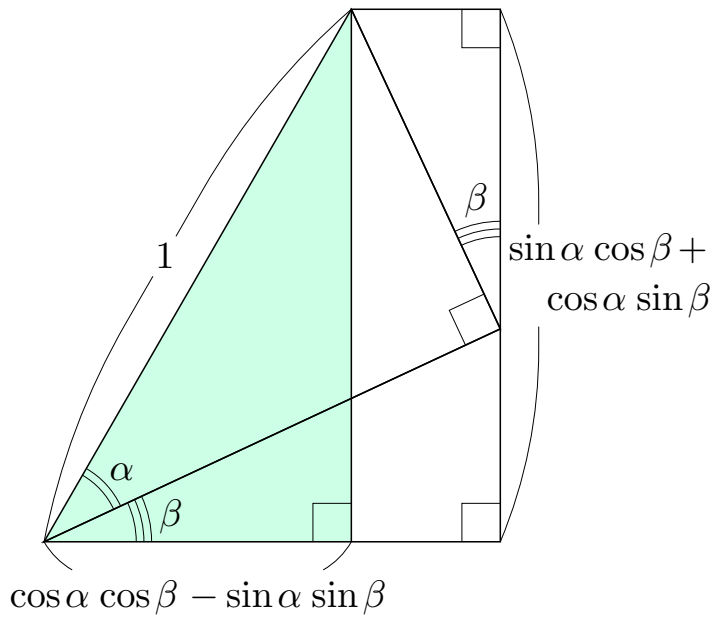
次のような色分けされた3個の直角三角形を考える。



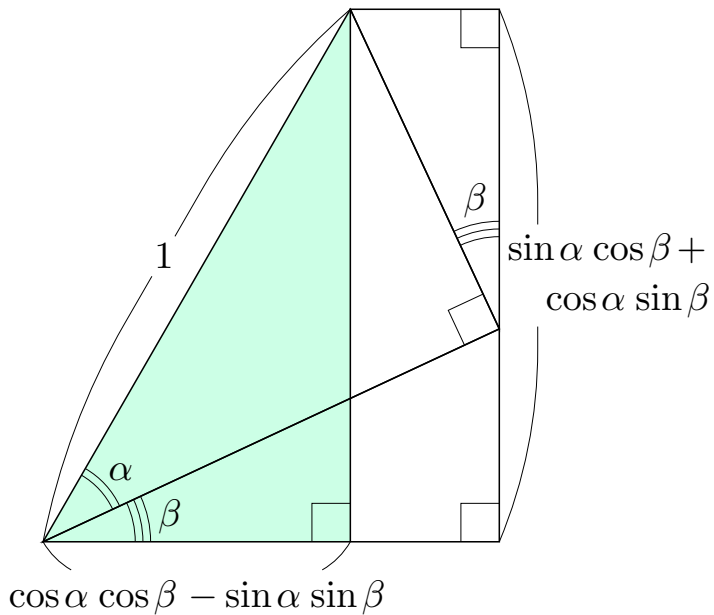
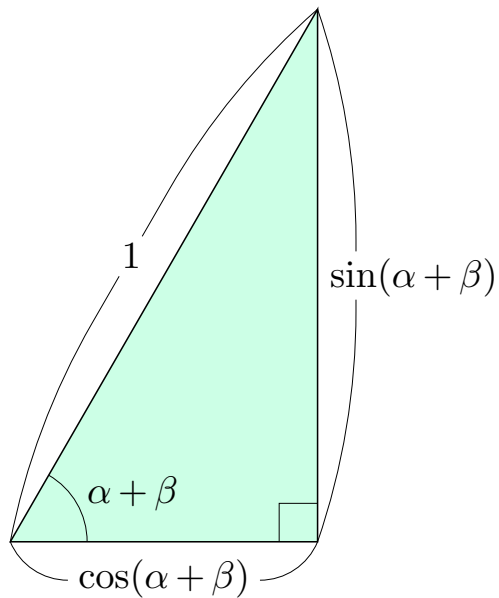
次のような色分けされた3個の直角三角形を考える。



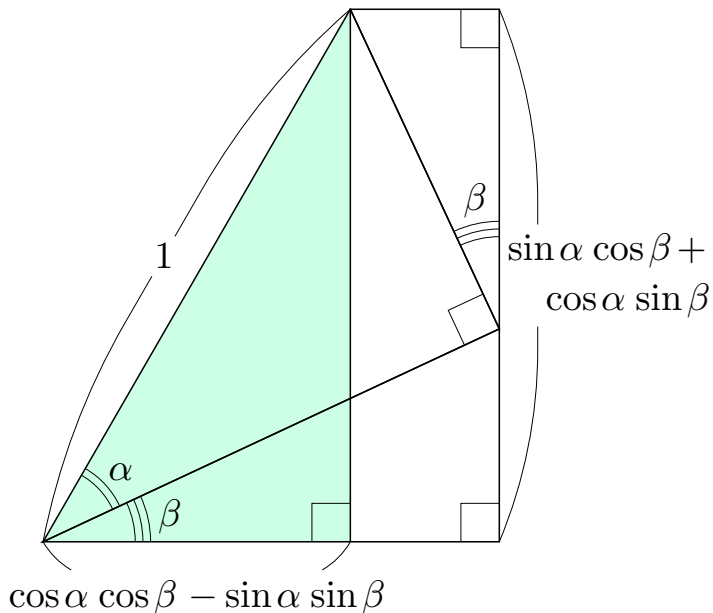
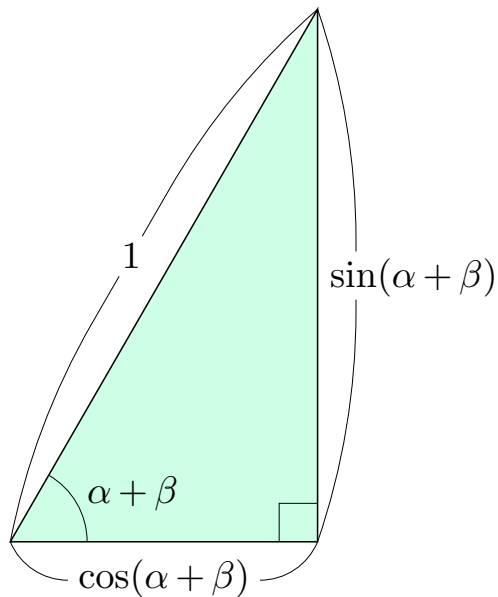
次の図のようになる.



最初の直角三角形を考える.



最初の直角三角形を考える.



上の左右の図を対比すると,

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \alpha \quad , \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \alpha \quad .$$

こうして次のことが導かれた：鋭角 α と β について $\alpha + \beta < 90^\circ$ であるとき，

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta ,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta .$$

こうして次のことが導かれた：鋭角 α と β について $\alpha + \beta < 90^\circ$ であるとき，

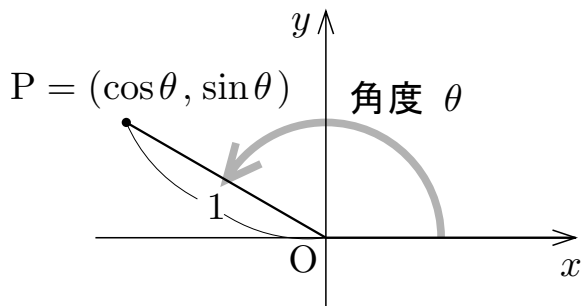
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta ,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta .$$

しかしこの証明は，角度 α と β と $\alpha + \beta$ とが第 1 象限の角度のときだけにしか通用しない．

角度 α と β とが一般角であるときも通用する証明を述べる．

点 O を原点とする xy 座標平面の点 P について、 $\overline{OP} = 1$ で線分 OP の始線 Ox に対する角度が θ であるとき、 $P = (\cos \theta, \sin \theta)$. このことを用いてまず余弦の加法定理を証明する.



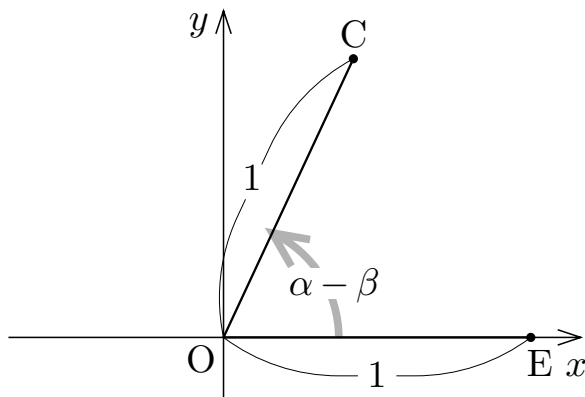
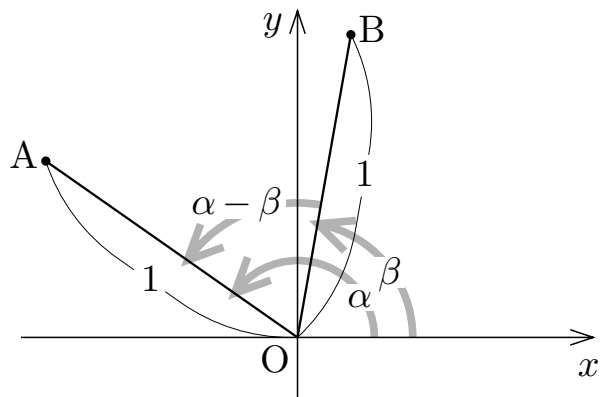
一般角 α と β に対して、点 O を原点とする xy 座標平面において、3点 A, B, C を次のように定める： $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = 1$ で、

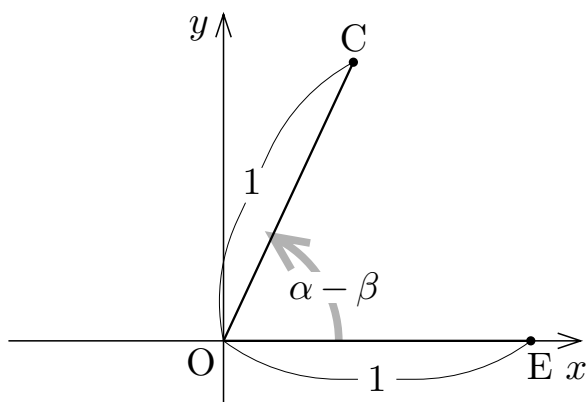
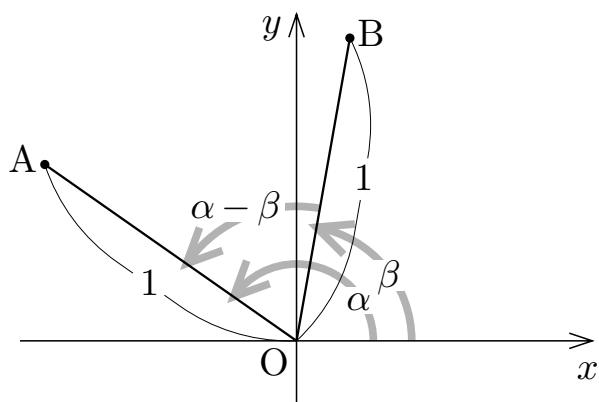
線分 OA は始線 Ox に対する角度 α の線分、

線分 OB は始線 Ox に対する角度 β の線分、

線分 OC は始線 Ox に対する角度 $(\alpha - \beta)$ の線分。

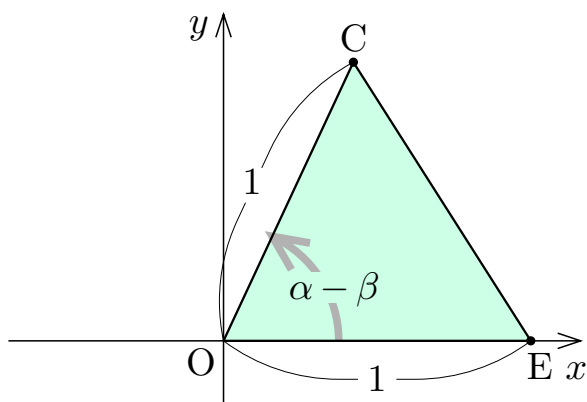
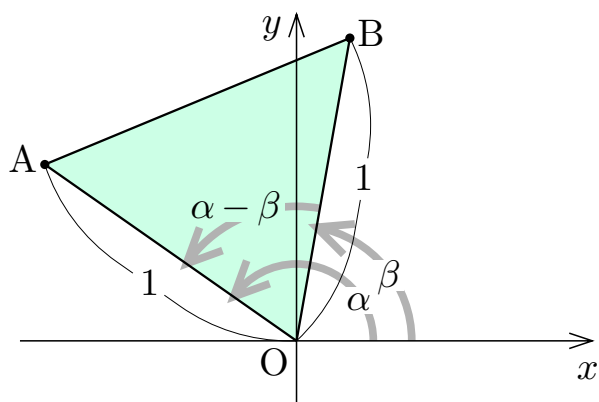
更に、点 E を $E = (1, 0)$ と定める。





線分 OB と線分 OA , 及び線分 OE と線分 OC との位置関係は次のようになる : 点 O を中心にして,

線分 OB を $(\alpha - \beta)$ の角度だけ回転させた線分が OA であり,
 線分 OE を $(\alpha - \beta)$ の角度だけ回転させた線分が OC である.

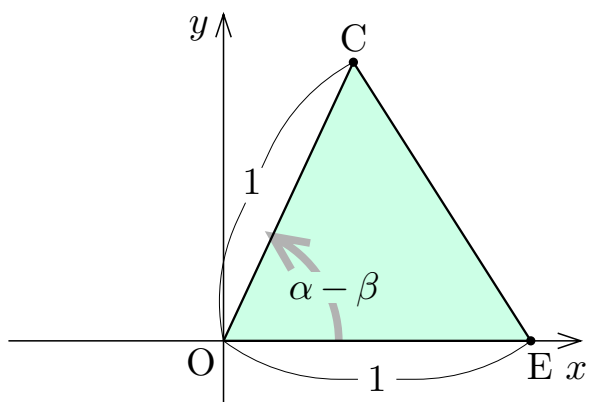
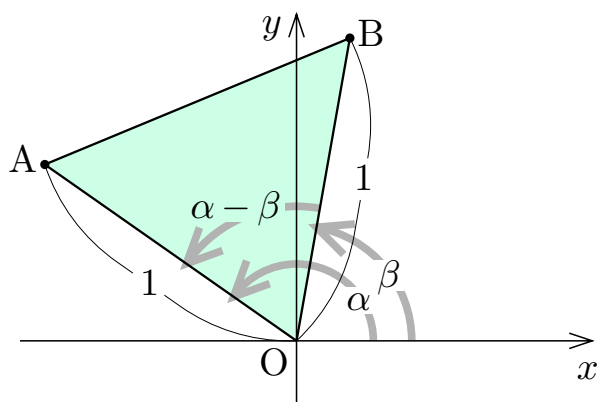


線分 OB と線分 OA , 及び線分 OE と線分 OC との位置関係は次のようになる : 点 O を中心にして,

線分 OB を $(\alpha - \beta)$ の角度だけ回転させた線分が OA であり,

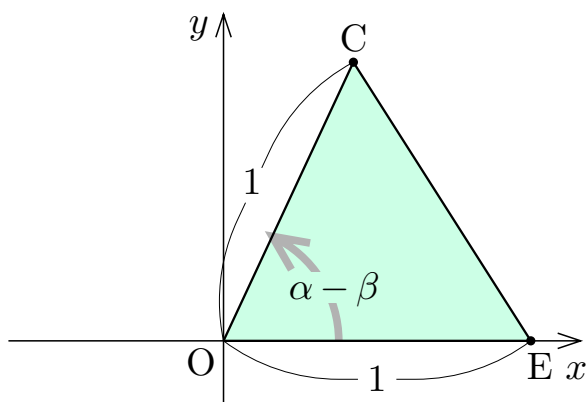
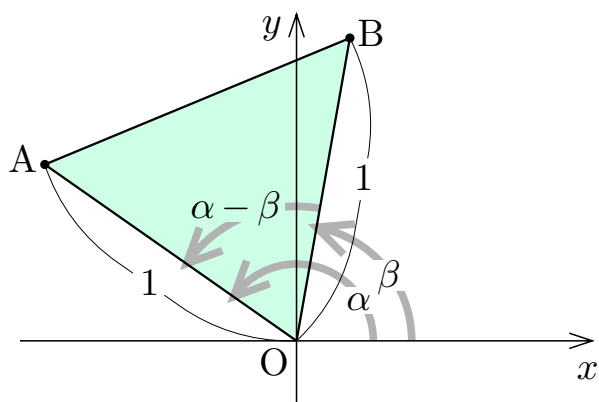
線分 OE を $(\alpha - \beta)$ の角度だけ回転させた線分が OC である.

従って角 AOB と角 COE とは同じ大きさである. 更に $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OE}$ なので, 三角形 AOB と三角形 COE とは合同である. よって $\overline{AB} = \overline{CE}$.



$A = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $B = (\cos \beta, \sin \beta)$ なので,

$$\overline{AB}^2 = (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2$$



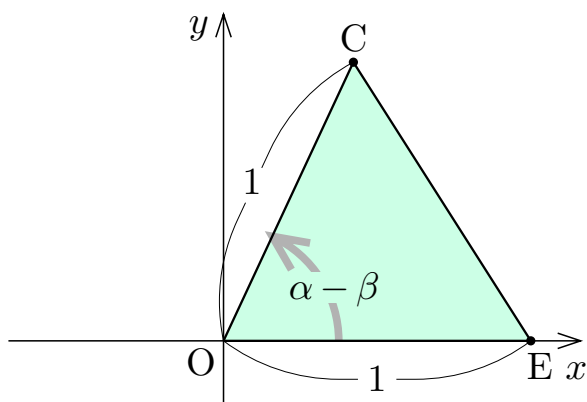
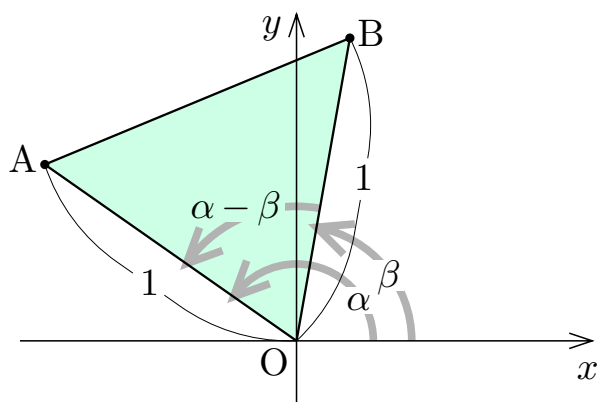
$A = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $B = (\cos \beta, \sin \beta)$ **なので**,

$$\overline{AB}^2 = (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2$$

$$= (\cos \alpha)^2 - 2 \cos \alpha \cos \beta + (\cos \beta)^2 + (\sin \alpha)^2 - 2 \sin \alpha \sin \beta + (\sin \beta)^2$$

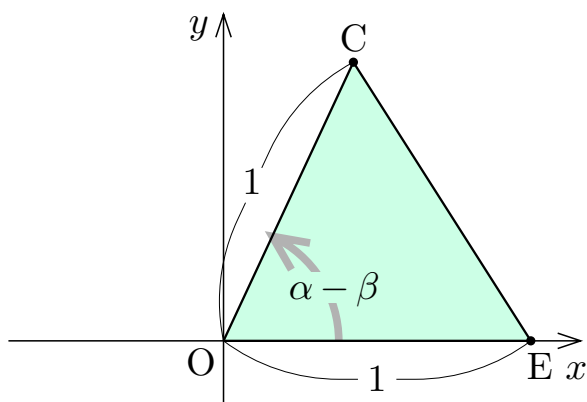
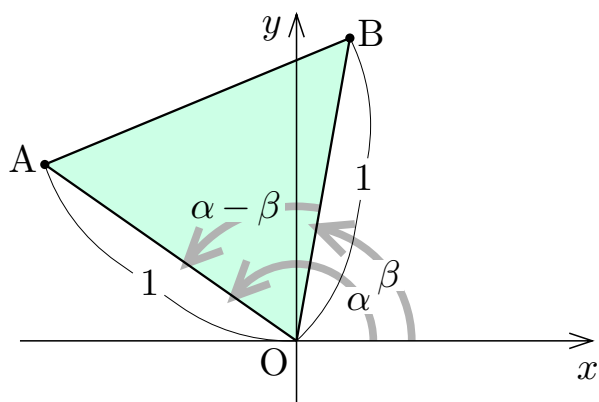
$$= (\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 + (\cos \beta)^2 + (\sin \beta)^2 - 2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$= 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) .$$



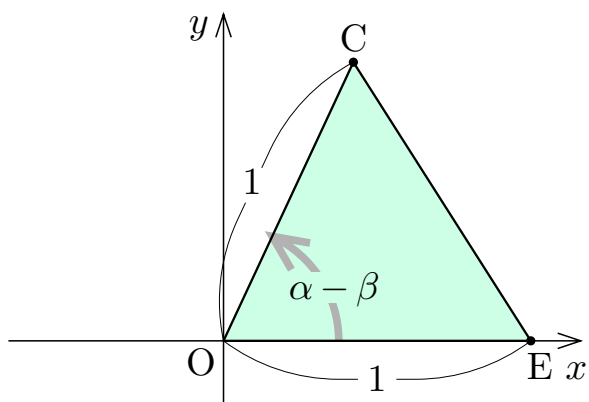
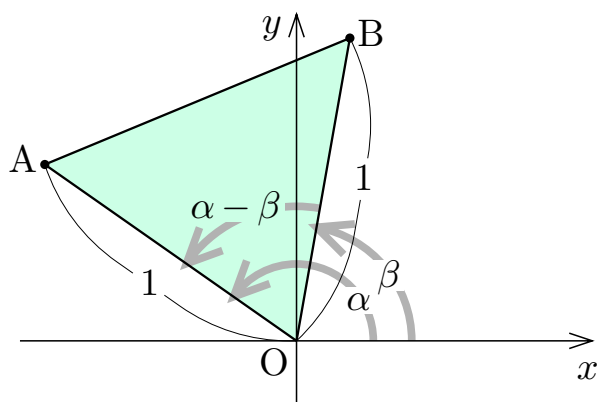
$C = (\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))$, $E = (1, 0)$ なので,

$$\overline{CE}^2 = \{\cos(\alpha - \beta) - 1\}^2 + \{\sin(\alpha - \beta)\}^2$$

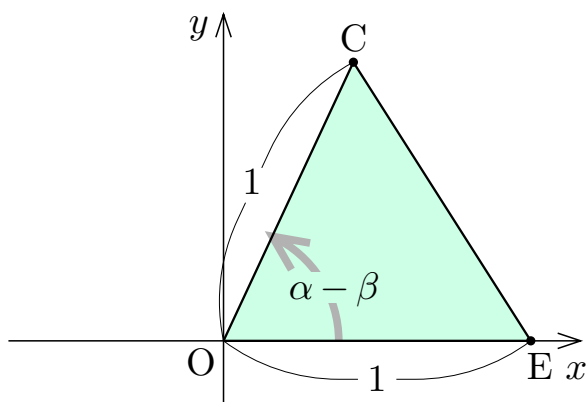
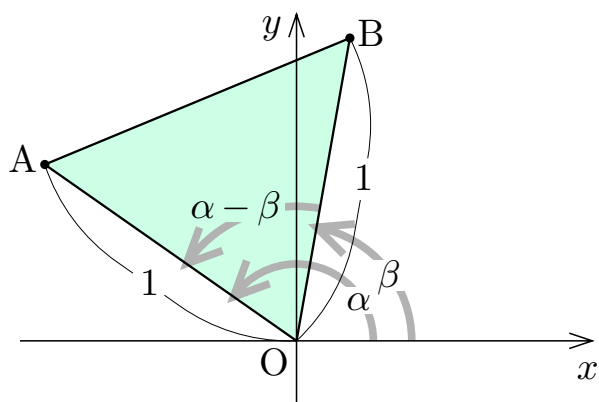


$C = (\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))$, $E = (1, 0)$ なので,

$$\begin{aligned}
 \overline{CE}^2 &= \{\cos(\alpha - \beta) - 1\}^2 + \{\sin(\alpha - \beta)\}^2 \\
 &= \{\cos(\alpha - \beta)\}^2 - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 + \{\sin(\alpha - \beta)\}^2 \\
 &= 1 + \{\sin(\alpha - \beta)\}^2 + \{\cos(\alpha - \beta)\}^2 - 2\cos(\alpha - \beta) \\
 &= 2 - 2\cos(\alpha - \beta) .
 \end{aligned}$$



$$\overline{AB}^2 = 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) , \quad \overline{CE}^2 = 2 - 2 \cos(\alpha - \beta) .$$



$$\overline{AB}^2 = 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) , \quad \overline{CE}^2 = 2 - 2 \cos(\alpha - \beta) .$$

$\overline{AB} = \overline{CE}$ より $\overline{CE}^2 = \overline{AB}^2$ なので,

$$2 - 2 \cos(\alpha - \beta) = 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) ,$$

$$-2 \cos(\alpha - \beta) = -2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) ,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta .$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta .$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta .$$

この式において β を $-\beta$ におきかえると

$$\cos\{\alpha - (-\beta)\} = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta) ,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta .$$

この式において β を $-\beta$ におきかえると

$$\cos\{\alpha - (-\beta)\} = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta) ,$$

$\cos(-\beta) = \cos \beta$, $\sin(-\beta) = -\sin \beta$ **なので**,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta .$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta .$$

この式において β を $-\beta$ におきかえると

$$\cos\{\alpha - (-\beta)\} = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta) ,$$

$\cos(-\beta) = \cos \beta$, $\sin(-\beta) = -\sin \beta$ なので,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta .$$

定理 (余弦の加法定理) 任意の一般角 α と β について

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \quad (\text{複号同順}) .$$

余弦の加法定理より

$$\cos(\theta + 90^\circ) = \cos\theta \cos 90^\circ - \sin\theta \sin 90^\circ .$$

余弦の加法定理より

$$\cos(\theta + 90^\circ) = \cos\theta \cos 90^\circ - \sin\theta \sin 90^\circ .$$

$\cos 90^\circ = 0$, $\sin 90^\circ = 1$ **なので**

$$\cos\theta \cos 90^\circ - \sin\theta \sin 90^\circ = \cos\theta \cdot 0 - \sin\theta \cdot 1 = -\sin\theta ,$$

従って $\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin\theta$.

余弦の加法定理より

$$\cos(\theta + 90^\circ) = \cos\theta \cos 90^\circ - \sin\theta \sin 90^\circ .$$

$\cos 90^\circ = 0$, $\sin 90^\circ = 1$ **なので**

$$\cos\theta \cos 90^\circ - \sin\theta \sin 90^\circ = \cos\theta \cdot 0 - \sin\theta \cdot 1 = -\sin\theta ,$$

従って $\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin\theta$. 更に, この等式において θ を $-(\theta + 90^\circ)$ でおき替える :

$$\cos\{-(\theta + 90^\circ) + 90^\circ\} = -\sin\{-(\theta + 90^\circ)\} .$$

余弦の加法定理より

$$\cos(\theta + 90^\circ) = \cos\theta \cos 90^\circ - \sin\theta \sin 90^\circ .$$

$\cos 90^\circ = 0$, $\sin 90^\circ = 1$ **なので**

$$\cos\theta \cos 90^\circ - \sin\theta \sin 90^\circ = \cos\theta \cdot 0 - \sin\theta \cdot 1 = -\sin\theta ,$$

従って $\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin\theta$. 更に, この等式において θ を $-(\theta + 90^\circ)$ でおき替える :

$$\cos\{-(\theta + 90^\circ) + 90^\circ\} = -\sin\{-(\theta + 90^\circ)\} .$$

この等式の左辺は,

$$\cos\{-(\theta + 90^\circ) + 90^\circ\} = \cos(-\theta - 90^\circ + 90^\circ) = \cos(-\theta) = \cos\theta ,$$

右辺は,

$$-\sin\{-(\theta + 90^\circ)\} = -\{-\sin(\theta + 90^\circ)\} = \sin(\theta + 90^\circ) .$$

よって $\sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta$.

定理 任意の一般角 θ について, $\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin\theta$, $\sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta$.

正弦の加法定理を導く. 余弦の加法定理より

$$\cos\{\alpha + (\beta + 90^\circ)\} = \cos\alpha \cos(\beta + 90^\circ) - \sin\alpha \sin(\beta + 90^\circ) .$$

正弦の加法定理を導く．余弦の加法定理より

$$\cos\{\alpha + (\beta + 90^\circ)\} = \cos\alpha \cos(\beta + 90^\circ) - \sin\alpha \sin(\beta + 90^\circ) .$$

ここで,

$$\cos\{\alpha + (\beta + 90^\circ)\} = \cos\{(\alpha + \beta) + 90^\circ\} = -\sin(\alpha + \beta) ,$$

$$\cos(\beta + 90^\circ) = -\sin\beta , \quad \sin(\beta + 90^\circ) = \cos\beta ,$$

正弦の加法定理を導く． 余弦の加法定理より

$$\cos\{\alpha + (\beta + 90^\circ)\} = \cos\alpha \cos(\beta + 90^\circ) - \sin\alpha \sin(\beta + 90^\circ) .$$

ここで,

$$\cos\{\alpha + (\beta + 90^\circ)\} = \cos\{(\alpha + \beta) + 90^\circ\} = -\sin(\alpha + \beta) ,$$

$$\cos(\beta + 90^\circ) = -\sin\beta , \quad \sin(\beta + 90^\circ) = \cos\beta ,$$

従って

$$-\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha (-\sin\beta) - \sin\alpha \cos\beta ,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta .$$

正弦の加法定理を導く． 余弦の加法定理より

$$\cos\{\alpha + (\beta + 90^\circ)\} = \cos\alpha \cos(\beta + 90^\circ) - \sin\alpha \sin(\beta + 90^\circ) .$$

ここで,

$$\cos\{\alpha + (\beta + 90^\circ)\} = \cos\{(\alpha + \beta) + 90^\circ\} = -\sin(\alpha + \beta) ,$$

$$\cos(\beta + 90^\circ) = -\sin\beta , \quad \sin(\beta + 90^\circ) = \cos\beta ,$$

従って

$$-\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha (-\sin\beta) - \sin\alpha \cos\beta ,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta .$$

また, この式において β を $-\beta$ におき替えると

$$\sin\{\alpha + (-\beta)\} = \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta) ,$$

正弦の加法定理を導く. 余弦の加法定理より

$$\cos\{\alpha + (\beta + 90^\circ)\} = \cos\alpha \cos(\beta + 90^\circ) - \sin\alpha \sin(\beta + 90^\circ) .$$

ここで,

$$\cos\{\alpha + (\beta + 90^\circ)\} = \cos\{(\alpha + \beta) + 90^\circ\} = -\sin(\alpha + \beta) ,$$

$$\cos(\beta + 90^\circ) = -\sin\beta , \quad \sin(\beta + 90^\circ) = \cos\beta ,$$

従って

$$-\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha (-\sin\beta) - \sin\alpha \cos\beta ,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta .$$

また, この式において β を $-\beta$ におき替えると

$$\sin\{\alpha + (-\beta)\} = \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta) ,$$

$\cos(-\beta) = \cos\beta$, $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ **なので,**

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta .$$

定理 (正弦の加法定理) 任意の一般角 α と β について

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad (\text{複号同順}).$$

正接の加法定理を導く。正弦及び余弦の加法定理より、

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$$

正接の加法定理を導く. 正弦及び余弦の加法定理より,

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

正接の加法定理を導く。正弦及び余弦の加法定理より、

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}\end{aligned}$$

正接の加法定理を導く。正弦及び余弦の加法定理より、

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}\end{aligned}$$

正接の加法定理を導く。正弦及び余弦の加法定理より、

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} .\end{aligned}$$

正接の加法定理を導く。正弦及び余弦の加法定理より、

$$\begin{aligned}\tan(\alpha - \beta) &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} .\end{aligned}$$

定理 (正接の加法定理) 任意の一般角 α と β について, $\tan\alpha, \tan\beta$ 及び, $\tan(\alpha + \beta)$ または $\tan(\alpha - \beta)$ の値があるとき,

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta} \quad (\text{複号同順}).$$