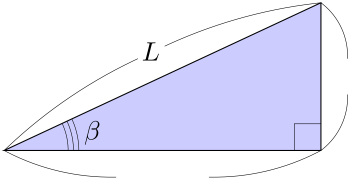
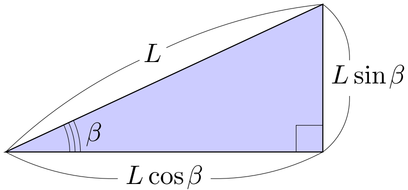
6.6 加法定理の証明

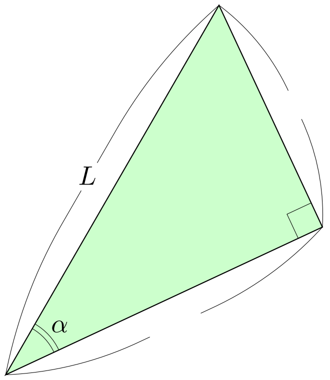
　直角三角形の一つの内角の大きさが β であり斜辺（直角に対する辺）の長さが L であるとき他の辺の長さは次のようになる.



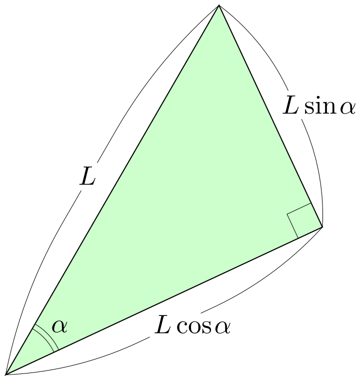
直角三角形の一つの内角の大きさが β であり斜辺（直角に対する辺）の長さが L であるとき他の辺の長さは次のようになる.



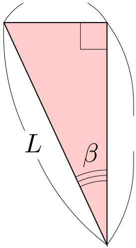
直角三角形の一つの内角の大きさが α であり斜辺（直角に対する辺）の長さが L であるとき他の辺の長さは次のようになる.



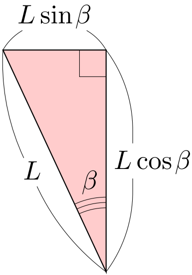
直角三角形の一つの内角の大きさが α であり斜辺（直角に対する辺）の長さが L であるとき他の辺の長さは次のようになる.



直角三角形の一つの内角の大きさが β であり斜辺（直角に対する辺）の長さが L であるとき他の辺の長さは次のようになる.



　直角三角形の一つの内角の大きさが β であり斜辺（直角に対する辺）の長さが L であるとき他の辺の長さは次のようになる.



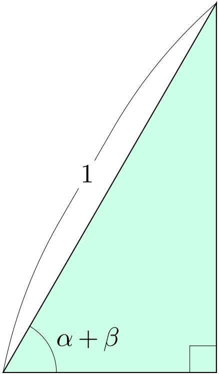
鋭角 α と β について $\alpha+\beta<90^\circ$ とする．正弦及び余弦の加法定理

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\alpha\ ,$$

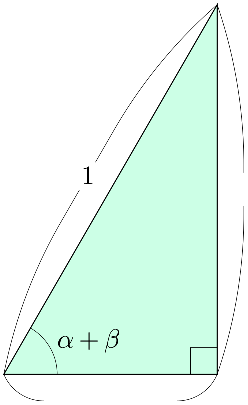
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\alpha$$

を導く.

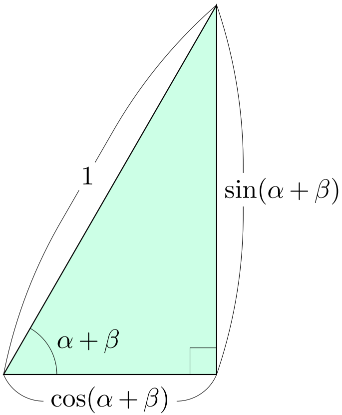
最初の直角三角形を次のようにする.



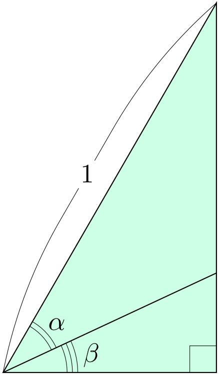
最初の直角三角形を次のようにする.



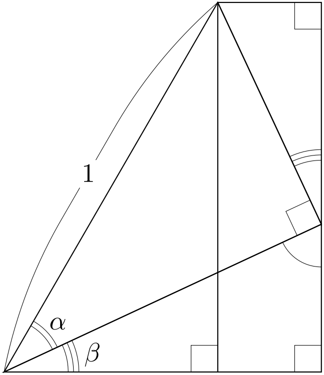
最初の直角三角形を次のようにする.



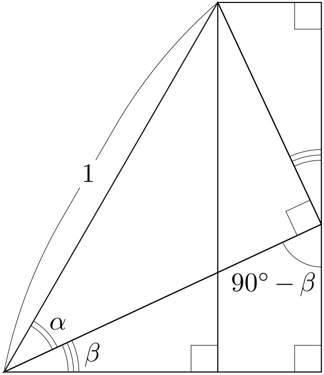
次のように内角を分ける.



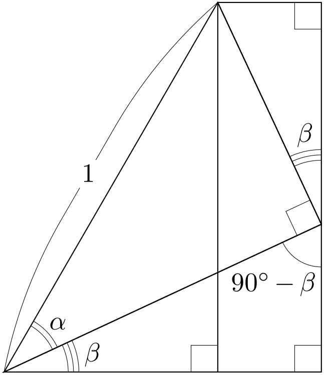
次のように拡張する.



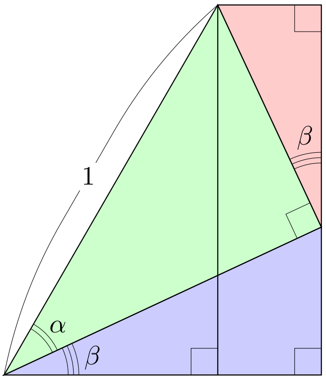
次のように拡張する.



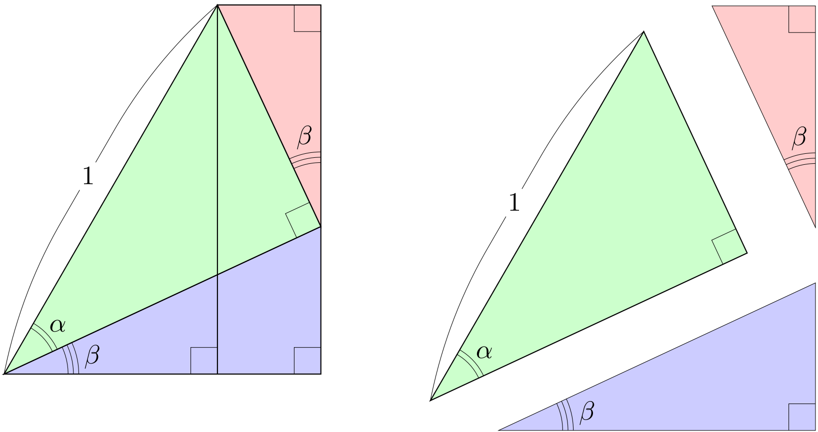
次のように拡張する.



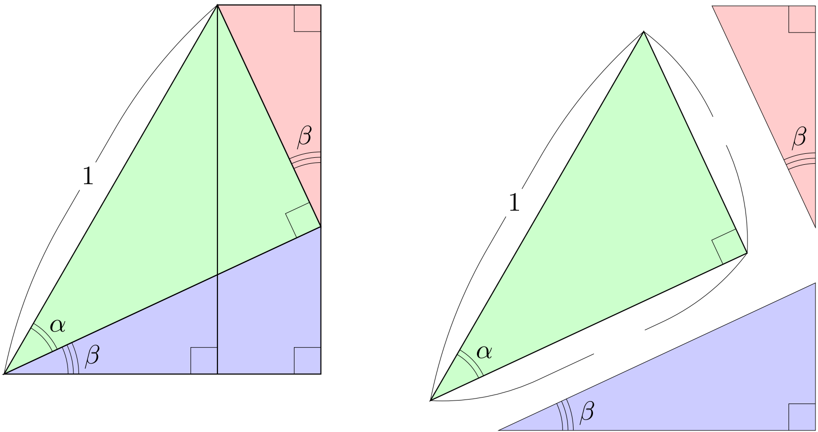
次のような色分けされた 3 個の直角三角形を考える.



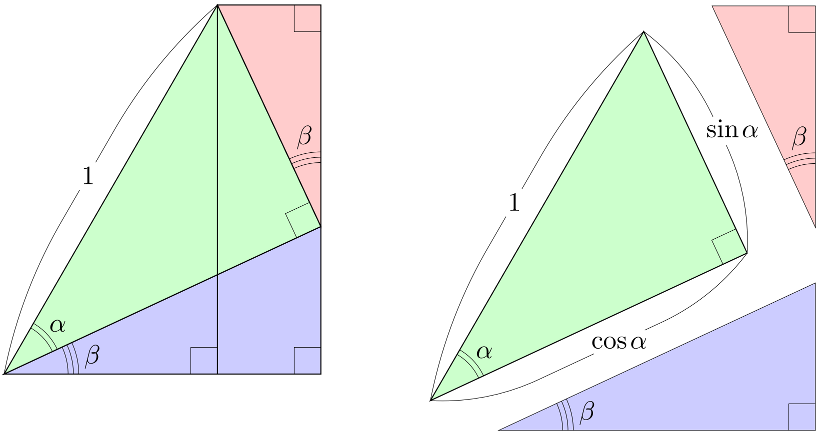
次のような色分けされた 3 個の直角三角形を考える.



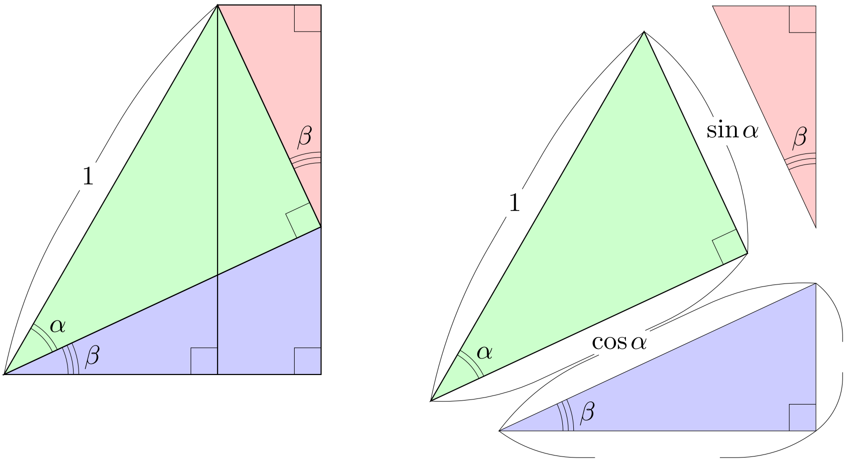
次のような色分けされた 3 個の直角三角形を考える.



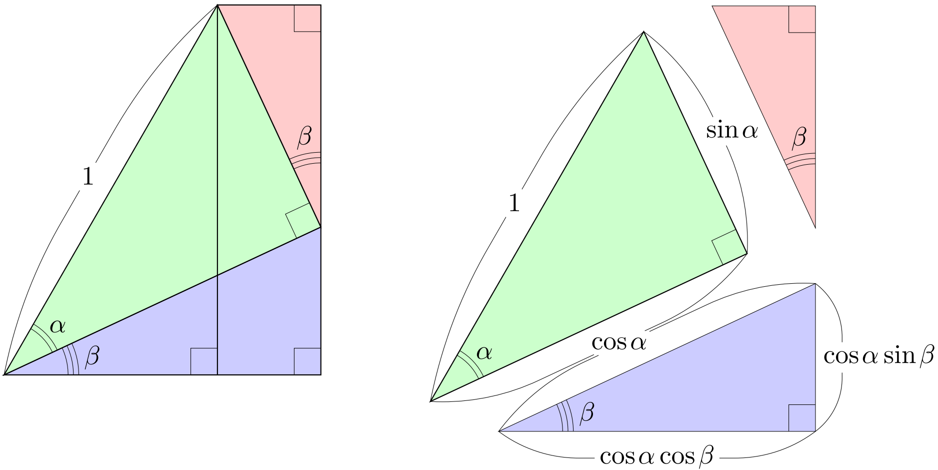
次のような色分けされた 3 個の直角三角形を考える.



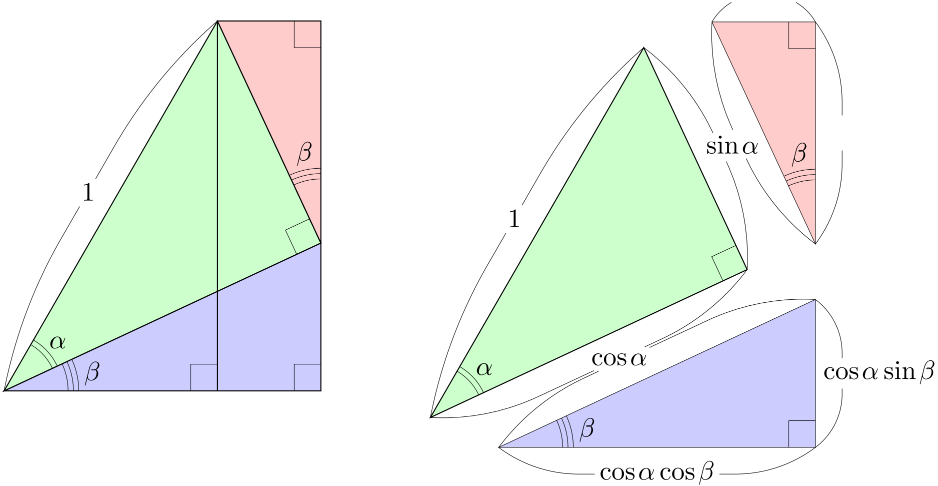
次のような色分けされた 3 個の直角三角形を考える.



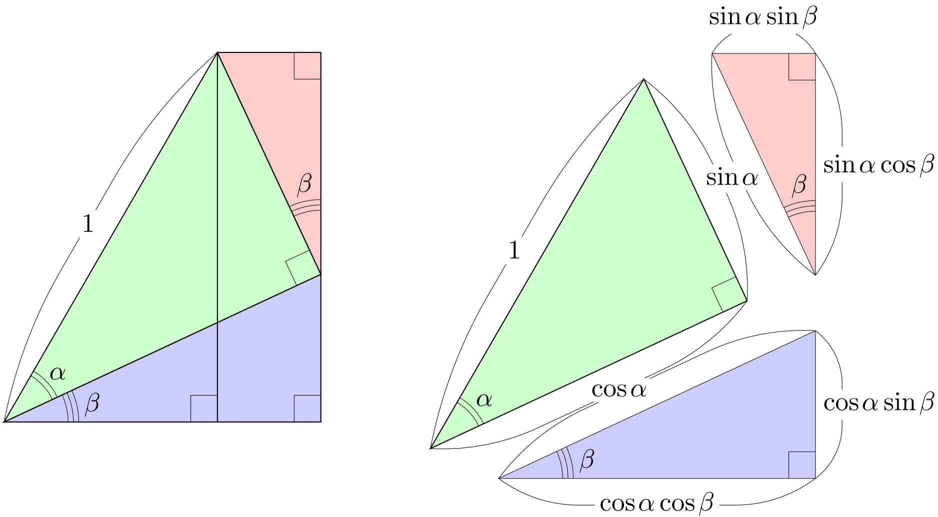
次のような色分けされた 3 個の直角三角形を考える.



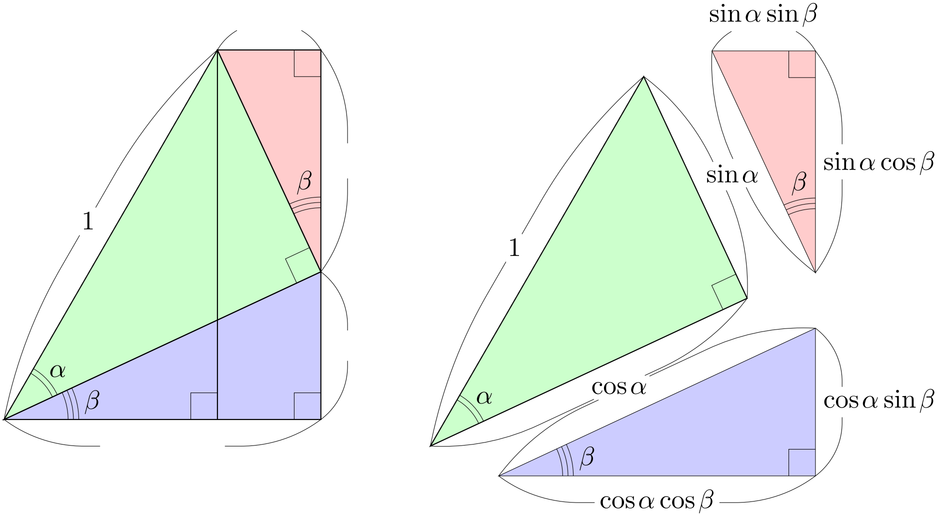
次のような色分けされた 3 個の直角三角形を考える.



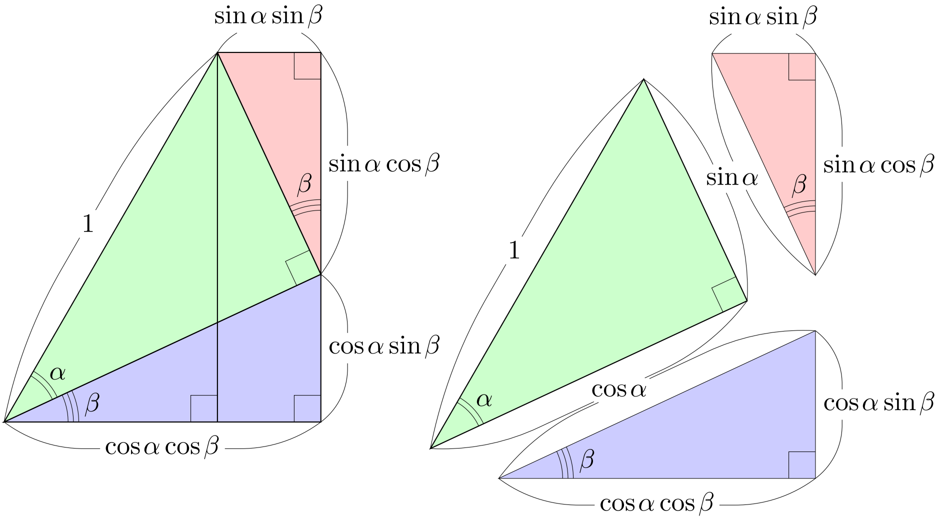
次のような色分けされた 3 個の直角三角形を考える.



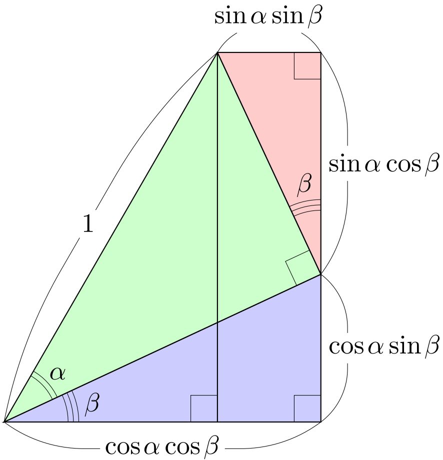
次のような色分けされた 3 個の直角三角形を考える.



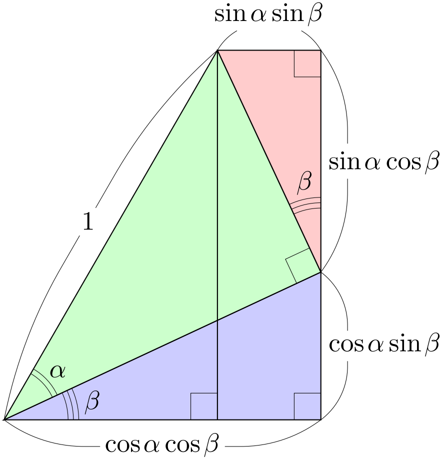
次のような色分けされた 3 個の直角三角形を考える.

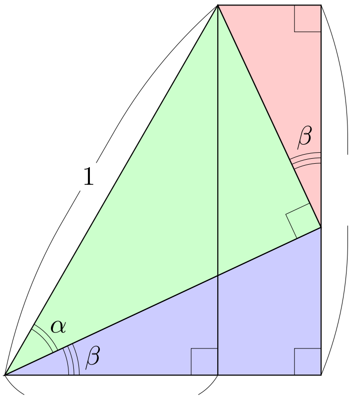


次のような色分けされた 3 個の直角三角形を考える.

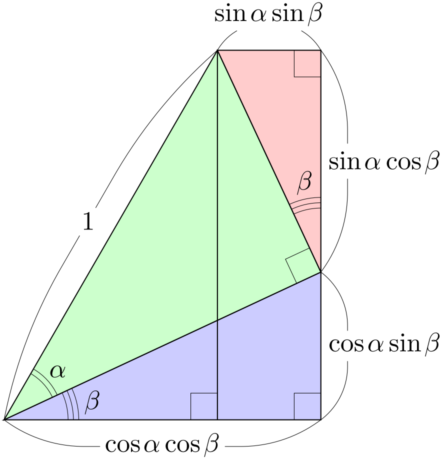


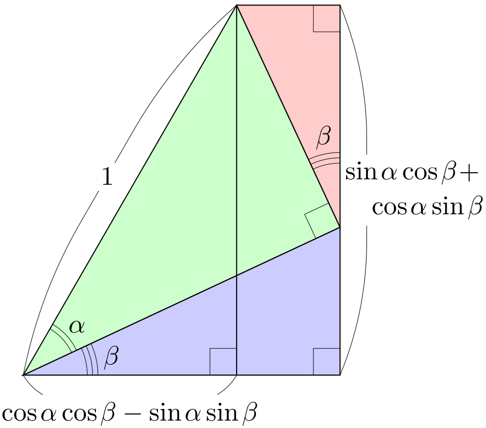
次のような色分けされた 3 個の直角三角形を考える.



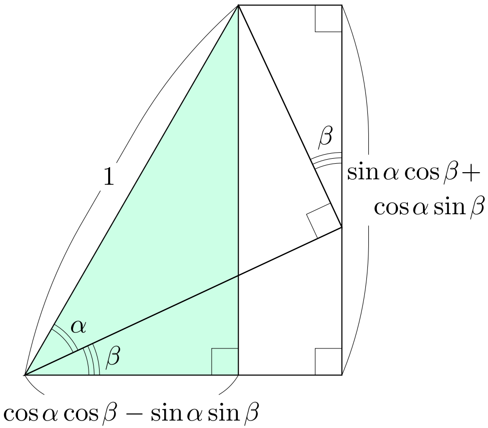


次のような色分けされた 3 個の直角三角形を考える.



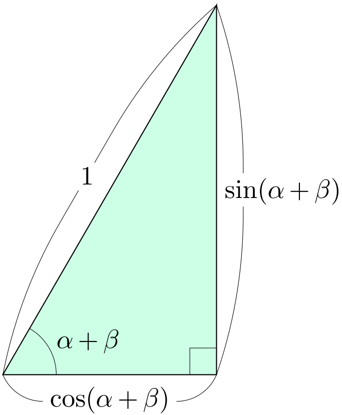


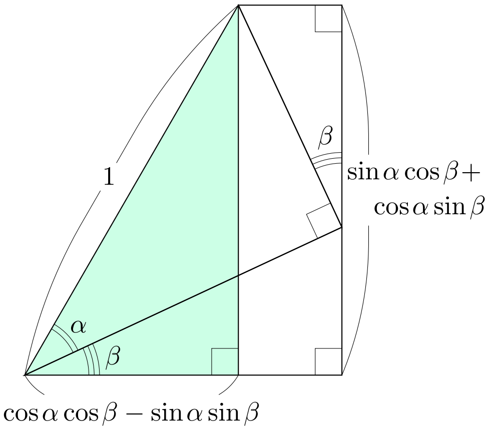
次の図のようになる.



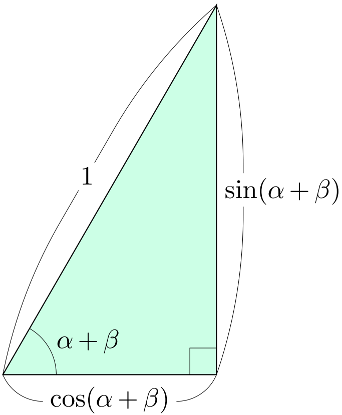
1
α
β
β
$\sin\alpha\cos\beta +$
$\cos\alpha\sin\beta$
$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

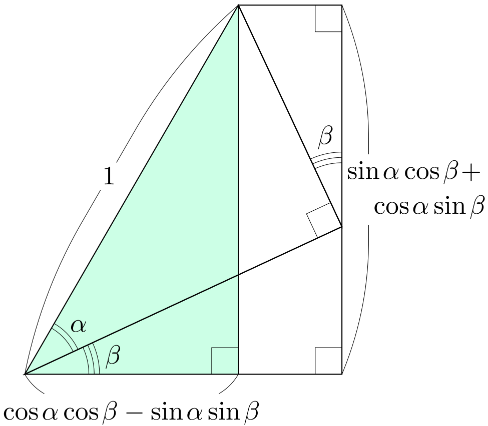
最初の直角三角形を考える.





最初の直角三角形を考える.





上の左右の図を対比すると,

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\alpha \text{ ,} \quad \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\alpha \text{ .}$$

こうして次のことが導かれた：鋭角 α と β について $\alpha+\beta<90^\circ$ であるとき，

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\alpha\ ,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\alpha\ .$$

こうして次のことが導かれた：鋭角 α と β について $\alpha+\beta<90^\circ$ であるとき，

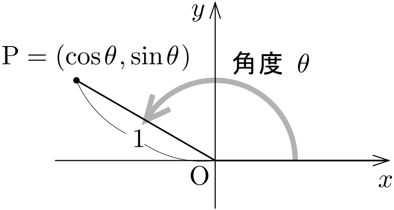
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\alpha\ ,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\alpha\ .$$

しかしこの証明は，角度 α と β と $\alpha+\beta$ とが第 1 象限の角度のときだけにしか通用しない．

角度 α と β とが一般角であるときも通用する証明を述べる．

点 O を原点とする xy 座標平面の点 P について，$\overline{\mathrm{OP}}=1$ で線分 OP の始線 Ox に対する角度が θ であるとき，$\mathrm{P}=(\cos\theta,\sin\theta)$ ．このことを用いてまず余弦の加法定理を証明する.



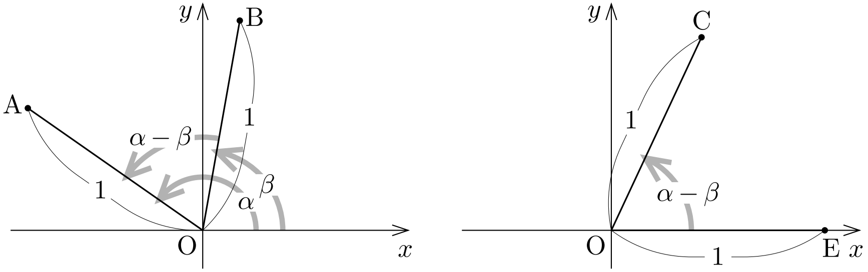
一般角 α と β に対して，点 O を原点とする xy 座標平面において，3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を次のように定める： $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{OC}} = 1$ で，

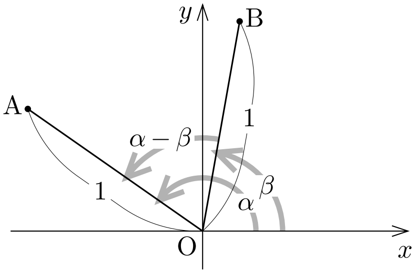
線分 OA は 始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 α の線分，

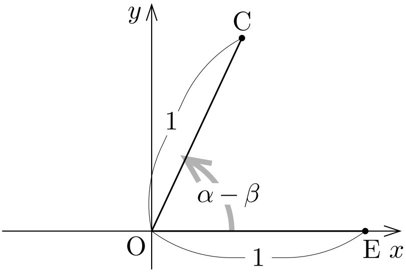
線分 OB は 始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 β の線分，

線分 OC は 始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 $(\alpha - \beta)$ の線分.

更に，点 E を $\mathrm{E} = (1,0)$ と定める.



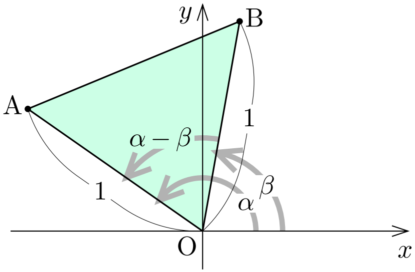


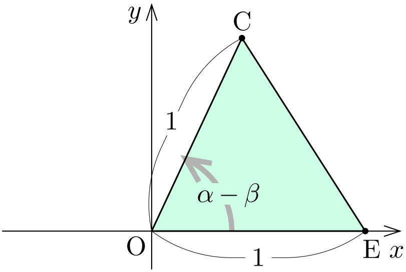


線分 OB と線分 OA ，及び線分 OE と線分 OC との位置関係は次のようになる：点 O を中心にして，

線分 OB を $(\alpha-\beta)$ の角度だけ回転させた線分が OA であり，

線分 OE を $(\alpha-\beta)$ の角度だけ回転させた線分が OC である．



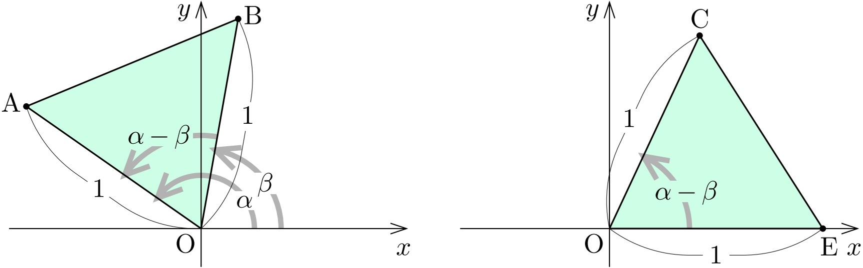


線分 OB と線分 OA ，及び線分 OE と線分 OC との位置関係は次のようになる：点 O を中心にして，

線分 OB を $(\alpha - \beta)$ の角度だけ回転させた線分が OA であり，

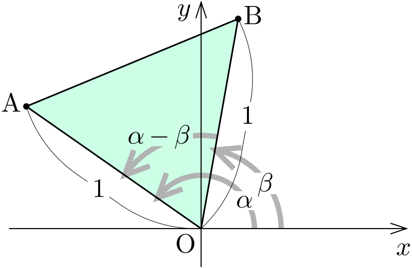
線分 OE を $(\alpha - \beta)$ の角度だけ回転させた線分が OC である．

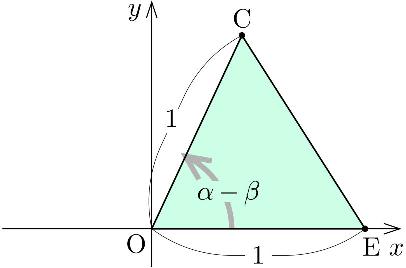
従って 角 AOB と角 COE とは同じ大きさである．更に $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{OC}} = \overline{\mathrm{OE}}$ なので，三角形 AOB と三角形 COE とは合同である．よって $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CE}}$ ．



$A=(\cos\alpha,\sin\alpha)$,　$B=(\cos\beta,\sin\beta)$ なので,

$$\overline{AB}^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$$



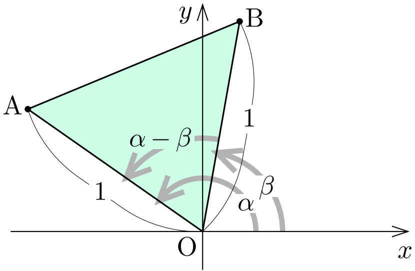


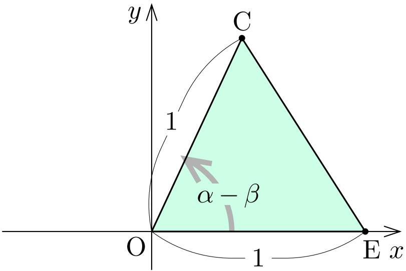
$\mathrm{A} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\mathrm{B} = (\cos\beta, \sin\beta)$ なので,

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathrm{AB}}^2 &= (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 \\
&= (\cos\alpha)^2 - 2\cos\alpha\cos\beta + (\cos\beta)^2 + (\sin\alpha)^2 - 2\sin\alpha\sin\beta + (\sin\beta)^2 \\
&= (\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\sin\beta)^2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta \\
&= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \ .
\end{aligned}
$$

$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$

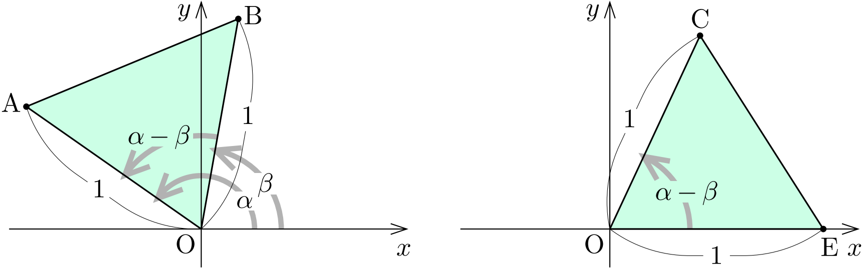
$(\cos\beta)^2 + (\sin\beta)^2 = 1$





$\mathrm{C} = \bigl(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta)\bigr)$ ， $\mathrm{E} = (1, 0)$ なので，

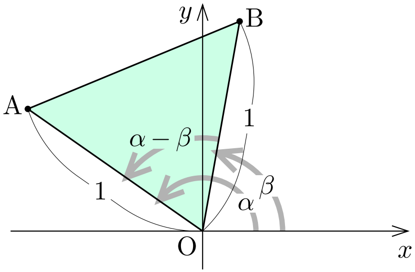
$$\overline{\mathrm{CE}}^2 = \{\cos(\alpha - \beta) - 1\}^2 + \{\sin(\alpha - \beta)\}^2$$

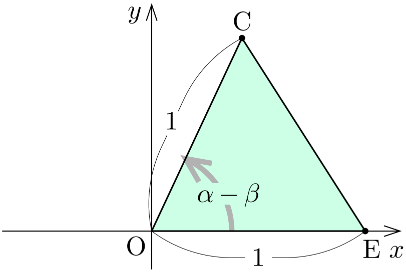


$\mathrm{C} = \bigl(\cos(\alpha-\beta), \sin(\alpha-\beta)\bigr)$,　$\mathrm{E} = (1, 0)$ なので，

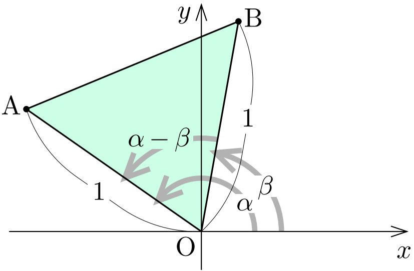
$$
\begin{aligned}
\overline{\mathrm{CE}}^2 &= \{\cos(\alpha-\beta)-1\}^2 + \{\sin(\alpha-\beta)\}^2 \\
&= \{\cos(\alpha-\beta)\}^2 - 2\cos(\alpha-\beta) + 1 + \{\sin(\alpha-\beta)\}^2 \\
&= 1 + \{\sin(\alpha-\beta)\}^2 + \{\cos(\alpha-\beta)\}^2 - 2\cos(\alpha-\beta) \\
&= 2 - 2\cos(\alpha-\beta)\ .
\end{aligned}
$$

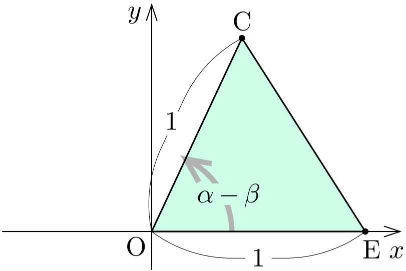
$\{\sin(\alpha-\beta)\}^2 + \{\cos(\alpha-\beta)\}^2 = 1$





$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)\ ,\qquad \overline{\mathrm{CE}}^2 = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)\ .$$





$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)\ ,\qquad \overline{\mathrm{CE}}^2 = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)\ .$$

$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CE}}$ より $\overline{\mathrm{CE}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2$ なので，

$$2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)\ ,$$

$$-2\cos(\alpha - \beta) = -2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)\ ,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\ .$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad .$$

$$\cos(\alpha - \beta) \ = \ \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \ \ .$$

この等式において β を $-\beta$ に置き換えると

$$\cos\{\alpha - (-\beta)\} \ = \ \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) \ \ ,$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \ .$$

この等式において β を $-\beta$ に置き換えると

$$\cos\{\alpha-(-\beta)\} = \cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta) \ ,$$

$\cos(-\beta)=\cos\beta$ ， $\sin(-\beta)=-\sin\beta$ なので,

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \ .$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \ .$$

この等式において β を $-\beta$ に置き換えると

$$\cos\{\alpha - (-\beta)\} = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) \ ,$$

$\cos(-\beta) = \cos\beta$ ， $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ なので,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \ .$$

定理 （余弦の加法定理）　任意の一般角 α と β とについて

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \quad \text{（複号同順）}.$$

余弦の加法定理により

$$\cos(\theta + 90^\circ) = \cos\theta\cos 90^\circ - \sin\theta\sin 90^\circ$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

余弦の加法定理により

$$\cos(\theta + 90^\circ) = \cos\theta\cos 90^\circ - \sin\theta\sin 90^\circ = \cos\theta \cdot 0 - \sin\theta \cdot 1$$

$$\cos 90^\circ = 0 \ , \quad \sin 90^\circ = 1$$

余弦の加法定理により

$$\cos(\theta + 90^\circ) = \cos\theta\cos 90^\circ - \sin\theta\sin 90^\circ = \cos\theta \cdot 0 - \sin\theta \cdot 1 = -\sin\theta$$

余弦の加法定理により

$$\cos(\theta+90^\circ) = \cos\theta\cos 90^\circ - \sin\theta\sin 90^\circ = \cos\theta\cdot 0 - \sin\theta\cdot 1 = -\sin\theta$$

つまり $\cos(\theta+90^\circ) = -\sin\theta$.

余弦の加法定理により

$$\cos(\theta+90^\circ) = \cos\theta\cos 90^\circ - \sin\theta\sin 90^\circ = \cos\theta\cdot 0 - \sin\theta\cdot 1 = -\sin\theta$$

つまり $\cos(\theta+90^\circ) = -\sin\theta$ ． 更に，この等式において θ を $-(\theta+90^\circ)$ で置き換えると

$$\cos\{-(\theta+90^\circ)+90^\circ\} = -\sin\{-(\theta+90^\circ)\}\ .$$

余弦の加法定理により

$$\cos(\theta + 90^\circ) = \cos\theta\cos 90^\circ - \sin\theta\sin 90^\circ = \cos\theta\cdot 0 - \sin\theta\cdot 1 = -\sin\theta$$

つまり $\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin\theta$ ．更に，この等式において θ を $-(\theta+90^\circ)$ で置き換えると

$$\cos\{-(\theta + 90^\circ) + 90^\circ\} = -\sin\{-(\theta + 90^\circ)\} \ .$$

この等式の左辺は，

$$\cos\{-(\theta + 90^\circ) + 90^\circ\} = \cos(-\theta - 90^\circ + 90^\circ) = \cos(-\theta) = \cos\theta \ ,$$

余弦の加法定理により

$$\cos(\theta+90^\circ) \,=\, \cos\theta\cos 90^\circ-\sin\theta\sin 90^\circ \,=\, \cos\theta\cdot 0-\sin\theta\cdot 1 \,=\, -\sin\theta$$

つまり $\cos(\theta+90^\circ)=-\sin\theta$ ．更に，この等式において θ を $-(\theta+90^\circ)$ で置き換えると

$$\cos\{-(\theta+90^\circ)+90^\circ\} \,=\, -\sin\{-(\theta+90^\circ)\} \ .$$

この等式の左辺は,

$$\cos\{-(\theta+90^\circ)+90^\circ\} \,=\, \cos(-\theta-90^\circ+90^\circ) \,=\, \cos(-\theta) \,=\, \cos\theta \ ,$$

右辺は,

$$-\sin\{-(\theta+90^\circ)\} \,=\, -\{-\sin(\theta+90^\circ)\} \,=\, \sin(\theta+90^\circ) \ ,$$

余弦の加法定理により

$$\cos(\theta+90^\circ) \;=\; \cos\theta\cos 90^\circ-\sin\theta\sin 90^\circ \;=\; \cos\theta\cdot 0-\sin\theta\cdot 1 \;=\; -\sin\theta$$

つまり $\cos(\theta+90^\circ)=-\sin\theta$ ．更に，この等式において θ を $-(\theta+90^\circ)$ で置き換えると

$$\cos\{-(\theta+90^\circ)+90^\circ\} \;=\; -\sin\{-(\theta+90^\circ)\}\ .$$

この等式の左辺は，

$$\cos\{-(\theta+90^\circ)+90^\circ\} \;=\; \cos(-\theta-90^\circ+90^\circ) \;=\; \cos(-\theta) \;=\; \cos\theta\ ,$$

右辺は，

$$-\sin\{-(\theta+90^\circ)\} \;=\; -\{-\sin(\theta+90^\circ)\} \;=\; \sin(\theta+90^\circ)\ ,$$

よって $\sin(\theta+90^\circ)=\cos\theta$ ．

　余弦の加法定理により

$$\cos(\theta+90^\circ) \;=\; \cos\theta\cos 90^\circ - \sin\theta\sin 90^\circ \;=\; \cos\theta\cdot 0 - \sin\theta\cdot 1 \;=\; -\sin\theta$$

つまり $\cos(\theta+90^\circ)=-\sin\theta$ ．更に，この等式において θ を $-(\theta+90^\circ)$ で置き換えると

$$\cos\{-(\theta+90^\circ)+90^\circ\} \;=\; -\sin\{-(\theta+90^\circ)\} \;.$$

この等式の左辺は，

$$\cos\{-(\theta+90^\circ)+90^\circ\} \;=\; \cos(-\theta-90^\circ+90^\circ) \;=\; \cos(-\theta) \;=\; \cos\theta \;,$$

右辺は，

$$-\sin\{-(\theta+90^\circ)\} \;=\; -\{-\sin(\theta+90^\circ)\} \;=\; \sin(\theta+90^\circ) \;,$$

よって $\sin(\theta+90^\circ)=\cos\theta$ ．

定理　任意の一般角 θ について，$\cos(\theta+90^\circ)=-\sin\theta$ ， $\sin(\theta+90^\circ)=\cos\theta$ ．

正弦の加法定理を導く．余弦の加法定理により

$$\cos\{\alpha + (\beta + 90^\circ)\} = \cos\alpha\cos(\beta + 90^\circ) - \sin\alpha\sin(\beta + 90^\circ) \ .$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

　正弦の加法定理を導く．余弦の加法定理により

$$\cos\{\alpha+(\beta+90^\circ)\} = \cos\alpha\cos(\beta+90^\circ)-\sin\alpha\sin(\beta+90^\circ)\ \ .$$

ここで，

$$\cos\{\alpha+(\beta+90^\circ)\} = \cos\{(\alpha+\beta)+90^\circ\} = -\sin(\alpha+\beta)\ \ ,$$

$$\cos(\beta+90^\circ) = -\sin\beta\ \ , \qquad \sin(\beta+90^\circ) = \cos\beta\ \ ,$$

　正弦の加法定理を導く．余弦の加法定理により

$$\cos\{\alpha + (\beta + 90^\circ)\} \;=\; \cos\alpha\cos(\beta + 90^\circ) - \sin\alpha\sin(\beta + 90^\circ) \;\; .$$

ここで，

$$\cos\{\alpha + (\beta + 90^\circ)\} = \cos\{(\alpha + \beta) + 90^\circ\} = -\sin(\alpha + \beta) \;\; ,$$

$$\cos(\beta + 90^\circ) = -\sin\beta \;\; , \qquad \sin(\beta + 90^\circ) = \cos\beta \;\; ,$$

従って

$$-\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha(-\sin\beta) - \sin\alpha\cos\beta \;\; ,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \;\; .$$

　正弦の加法定理を導く．余弦の加法定理により

$$\cos\{\alpha+(\beta+90^\circ)\} \;=\; \cos\alpha\cos(\beta+90^\circ)-\sin\alpha\sin(\beta+90^\circ) \;\; .$$

ここで，

$$\cos\{\alpha+(\beta+90^\circ)\}=\cos\{(\alpha+\beta)+90^\circ\}=-\sin(\alpha+\beta) \;\; ,$$

$$\cos(\beta+90^\circ)=-\sin\beta \;\; , \qquad \sin(\beta+90^\circ)=\cos\beta \;\; ,$$

従って

$$-\sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha(-\sin\beta)-\sin\alpha\cos\beta \;\; ,$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \;\; .$$

また，この等式において β を $-\beta$ に置き換えると

$$\sin\{\alpha+(-\beta)\} \;=\; \sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta) \;\; ,$$

正弦の加法定理を導く．余弦の加法定理により

$$\cos\{\alpha+(\beta+90^\circ)\} = \cos\alpha\cos(\beta+90^\circ)-\sin\alpha\sin(\beta+90^\circ)\ .$$

ここで，

$$\cos\{\alpha+(\beta+90^\circ)\}=\cos\{(\alpha+\beta)+90^\circ\}=-\sin(\alpha+\beta)\ ,$$

$$\cos(\beta+90^\circ)=-\sin\beta\ , \qquad \sin(\beta+90^\circ)=\cos\beta\ ,$$

従って

$$-\sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha(-\sin\beta)-\sin\alpha\cos\beta\ ,$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\ .$$

また，この等式において β を $-\beta$ に置き換えると

$$\sin\{\alpha+(-\beta)\} = \sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)\ ,$$

$\cos(-\beta)=\cos\beta$ ， $\sin(-\beta)=-\sin\beta$ なので，

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\ .$$

定理（正弦の加法定理）　任意の一般角 α と β とについて

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \quad \text{（複号同順）}.$$

正接の加法定理を導く．正弦及び余弦の加法定理により，

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

正接の加法定理を導く．正弦及び余弦の加法定理により，

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

正接の加法定理を導く．正弦及び余弦の加法定理により，

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} \\
&= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}
\end{aligned}$$

正接の加法定理を導く．正弦及び余弦の加法定理により，

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$

正接の加法定理を導く．正弦及び余弦の加法定理により，

$$
\begin{aligned}
\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} \\
&= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} \\
&= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \ .
\end{aligned}
$$

正接の加法定理を導く．正弦及び余弦の加法定理により，

$$
\begin{aligned}
\tan(\alpha-\beta) &= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta} \\
&= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} \\
&= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\ .
\end{aligned}
$$

定理 （正接の加法定理） 任意の一般角 α と β とについて，$\tan\alpha$，$\tan\beta$ 及び，$\tan(\alpha+\beta)$ または $\tan(\alpha-\beta)$ の値があるとき，

$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \quad （複号同順）.$$